Curs 4

Integrale curbilinii de speţa I

4.1 Drumuri şi curbe

4.1 Definiţie. *O funcţie continuă* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *se numeşte* **drum plan** *dacă* $m = 2$ *sau* **drum în spaţiu** *dacă* $m = 3$. *Punctul* $\gamma(a)$ *se numeşte* **originea** *drumului, iar* $\gamma(b)$ *reprezintă* **extremitatea** *drumului. Dacă* $\gamma(a) = \gamma(b)$ *drumul se numeşte* **închis**. *Mulţimea* $\gamma([a,b])$ *se numeşte* **imaginea** *drumului.*

4.2 Observaţie. Dacă $m = 3$, putem scrie drumul γ specificând componentele funcţiei vectoriale $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sau scriind vectorul de poziţie al fiecărui punct

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{\kappa}, \quad t \in [a,b].$$

Putem descrie drumul scriind coordonatele ca nişte funcţii continue de un parametru real t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a,b].$$

4.3 Exemplu. Drumul descris de

$$\begin{cases} x = (1-t)x_A + tx_B, \\ y = (1-t)y_A + ty_B, \\ z = (1-t)z_A + tz_B, \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

are ca suport segmentul AB, parcurs de la $A(x_A, y_A, z_A)$ la $B(x_B, y_B, z_B)$.

4.4 Exemplu. Drumul descris de

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

este drumul plan închis ce are ca suport cercul de ecuaţie $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, cu centrul (x_0, y_0) şi raza r, care este parcurs în sens trigonometric având originea şi extremitatea în punctul $(x_0 + r, y_0)$.

4.5 Definiţie. *Două drumuri* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *şi* $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^m$ *sunt* **echivalente** *dacă există o funcţie* $h : [a,b] \to [c,d]$ *strict crescătoare şi continuă astfel încât* $h(a) = c$ *şi* $h(b) = d$ *şi* $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

4.6 Observaţie. Dacă notăm prin $\gamma_1 \sim \gamma_2$ faptul că γ_1 şi γ_2 sunt drumuri echivalente, atunci relaţia binară $\sim$ reprezintă o relaţie de echivalenţă.

Într-adevăr, alegând $h(t) = t$ avem $\gamma \sim \gamma$, ceea ce arată proprietatea de reflexivitate.

Pentru că h e strict crescătoare, ea este injectivă, iar pentru că h e continuă şi $h(a) = c$ şi $h(b) = d$ rezultă că $h([a,b]) = [c,d]$ şi deci h este surjectivă, ceea ce implică faptul că h este bijectivă. Astfel, există inversa funcţiei h, care este o funcţie continuă, strict crescătoare şi $h^{-1}(c) = a$ şi $h^{-1}(d) = b$. În plus, avem $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1}$. Am demonstrat că $\gamma_1 \sim \gamma_2$ implică $\gamma_2 \sim \gamma_1$, ceea ce reprezintă proprietatea de simetrie.

Ne rămâne să verificăm faptul că relaţia $\sim$ este tranzitivă. Fie $\gamma_1 \sim \gamma_2$ şi $\gamma_2 \sim \gamma_3$. Atunci există $h : [a,b] \to [c,d]$ şi $g : [c,d] \to [e,f]$ strict crescătoare şi continue cu $h(a) = c$, $h(b) = d$ şi $g(c) = e$, $g(d) = f$ cu proprietatea că $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ şi $\gamma_2 = \gamma_3 \circ g$. Funcţia $i = g \circ h : [a,b] \to [e,f]$ are proprietatea că $i(a) = g(h(a)) = g(c) = e$ şi $i(b) = f$. În plus, i este strict crescătoare şi continuă şi $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h = (\gamma_3 \circ g) \circ h = \gamma_3 \circ (g \circ h) = \gamma_3 \circ i$, ceea ce demonstrează că $\gamma_1 \sim \gamma_3$.

4.7 Definiţie. *Se numeşte* **curbă** *o clasă de drumuri echivalente. Fiind dată o curbă, un drum care o reprezintă se numeşte* **parametrizare** *a curbei. Întotdeauna putem reprezenta curba printr-un drum definit pe* $[0,1]$.

4.8 Exemplu. Drumul $\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este echivalent cu drumul $\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [0,1]$. Într-adevăr, funcţia $h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0,1]$, $h(t) = \sin t$ este strict crescătoare şi continuă cu $h(0) = 0$ şi $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ şi în plus $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

Ambele drumuri γ_1 şi γ_2 reprezintă parametrizări ale aceleaşi curbe: sfertul de cerc din primul cadran parcurs de la $(0,1)$ la $(1,0)$.

4.9 Observaţie. O curbă este mulţimea tuturor drumurilor echivalente care au o imagine dată şi un sens de parcurs precizat.

O curbă plană se poate specifica în 4 forme:

1) forma parametrică: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$
2) forma vectorială: $\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, $t \in [a,b]$
3) forma explicită: $y = f(x)$, $x \in [a,b]$
4) forma implicită: $F(x,y) = 0$ şi descrierea sensului de parcurs.

O curbă în spaţiu se poate specifica în 3 forme:

1) forma parametrică: $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$
2) forma vectorială: $\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{\kappa}$, $t \in [a,b]$
3) ca intersecţie de două suprafeţe

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

şi descrierea sensului de parcurs.

4.10 Definiţie. *Fiind dat un drum* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, *drumul* $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ *definit prin* $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$ *se numeşte* **inversul** *drumului* γ.

4.11 Observaţie. Să observăm că $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$ şi $\gamma^-([a,b]) = \gamma([a,b])$. Drumul γ^- are aceeşi imagine ca şi drumul iniţial, dar este parcurs în sens invers de la extremitatea drumului iniţial la originea acestuia.

4.12 Definiţie. *Fie $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ şi $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{R}^m$ două drumuri cu proprietatea că extremitatea primului coincide cu originea celui de-al doilea $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.* **Reuniunea** *drumurilor γ_1 şi γ_2 este drumul notat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{R}^m$, definit prin*

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c]. \end{cases}$$

4.13 Definiţie. *Fiind dat un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ şi o diviziune Δ a intervalului $[a,b]$*

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

drumurile $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ definite prin $\gamma_k(t) = \gamma(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ formează **descompunerea** *drumului γ asociată diviziunii Δ. Putem scrie*

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n.$$

4.14 Definiţie. *Un drum $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ se numeşte* **neted** *dacă aplicaţia γ este de clasă C^1 pe $[a,b]$ şi $\gamma'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in [a,b]$. Drumul γ se numeşte* **neted pe porţiuni** *dacă există o descompunere $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ astfel încât toate drumurile γ_k sunt netede.*

4.15 Observaţie. Un drum în spaţiu este neted dacă componentele sale x, y, z sunt funcţii derivabile cu derivatele funcţii continue pe $[a,b]$ şi $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0,0,0)$, pentru orice $t \in [a,b]$. Condiţia ca nu toate derivatele să se anuleze simultan înseamnă că în fiecare punct din imaginea drumului se poate duce dreapta tangentă.

Într-adevăr, scriind ecuaţia unei drepte ce trece prin $\gamma(t_0)$ unde $t_0 \in [a,b]$ este fixat şi $\gamma(t)$ unde $t \neq t_0$ este variabil, avem

$$\frac{x - x(t_0)}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z(t) - z(t_0)}.$$

Împărţind cu $t - t_0 \neq 0$ la numitor $\frac{x-x(t_0)}{\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}} = \frac{y-y(t_0)}{\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}} = \frac{z-z(t_0)}{\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}}$ şi trecând la limită când $t \to t_0$, obţinem ecuaţia tangentei

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

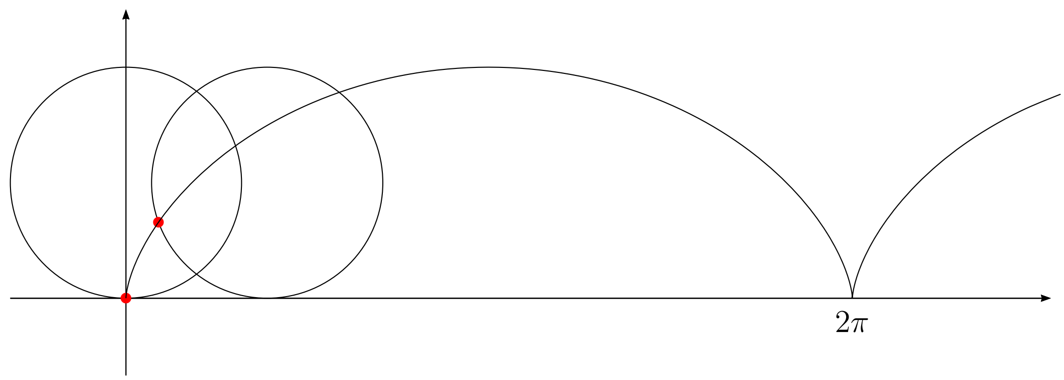


Figura 4.1: Cicloida e urma lăsată de un punct de pe un cerc care se rostogoleşte pe axa reală

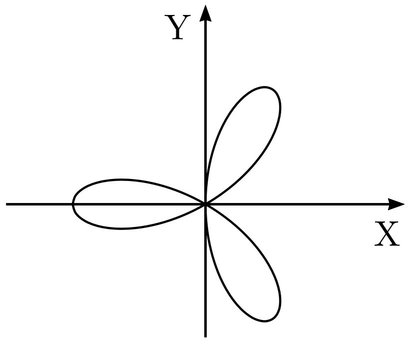
4.16 Exemplu. Drumul descris de $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \geq 0$ se numeşte cicloidă şi reprezintă traiectoria punctului aflat la intersecţia unui cerc de rază a cu originea axelor de coordonate când cercul începe să se rostogolească de-a lungul axei OX în direcţia pozitivă.

În punctele $t_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, ambele derivate se anulează: $x'(t_k) = 0$ şi $y'(t_k)$, ceea ce arată că această curbă nu are tangentă în punctele respective.

4.17 Definiţie. *Se numeşte curbă* **simplă** *o curbă cu parametrizarea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ funcţie injectivă pe $[a, b)$ (adică pentru $t_1, t_2 \in [a, b)$, $t_1 \neq t_2$ avem $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$). O curbă simplă cu $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ se numeşte* **arc**, *iar o curbă simplă închisă se numeşte* **contur**.

4.18 Exemplu. Un exemplu de curbă care nu este simplă este curba descrisă parametric prin ecuaţiile

$$\begin{cases} x = -\cos 3t \cos t, \\ y = -\cos 3t \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$



Punctul $(0, 0)$ se obţine pentru trei valori distincte ale parametrului t: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{5\pi}{6}$. Un astfel de punct se numeşte punct triplu. Curba se numeşte trifoi.

4.2 Lungimea unei curbe

4.19 Definiţie. *Fie C o curbă. Considerăm n puncte luate pe curbă în ordine notate P_k, $k = 0, 2, \ldots, n$. Unind punctele P_k cu P_{k+1} se formează linia poligonală $P_0 P_1 \ldots P_n$, notată pe scurt P. Notăm cu*

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} P_k$$

lungimea liniei poligonale P. Se notează

$$L_C = \sup L_P$$

marginea superioară a tuturor lungimilor liniilor poligonale care se pot lua pe curba C. Dacă L_C este un număr real, curba C se numeşte **rectificabilă**, *iar numărul L_C se numeşte* **lungimea curbei** *C.*

4.20 Teoremă (Formula de calcul a lungimii unei curbe netede)**.** *Orice curbă netedă este rectificabilă. Dacă curba C este reprezentată parametric prin*

$$C\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(y), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

atunci lungimea se calculează cu formula

$$L_C = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi că o curbă netedă este rectificabilă. Dacă $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ este o parametrizare a curbei netede C, atunci componentele x, y, z sunt funcţii derivabile cu derivata continuă pe $[a,b]$. Rezultă că derivatele x', y', z' sunt funcţii mărginite pe $[a,b]$. Orice linie poligonală $P = P_0P_1 \dots P_n$, cu P_k luate pe curbă în parcurgerea ei de la origine la extremitate, are o lungime finită. Mai exact, fiecărui punct P_k îi corespunde un punct t_k din diviziunea intervalului $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Aplicând teorema lui Lagrange fiecărei componente pe fiecare interval $[t_{k-1}, t_k]$ există punctele $a_k, b_k, c_k \in (t_{k-1}, t_k)$ astfel încât

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= (t_k - t_{k-1})x'(a_k), \quad a_k \in (t_{k-1}, t_k) \\ y(t_k) - y(t_{k-1}) &= (t_k - t_{k-1})y'(b_k), \quad b_k \in (t_{k-1}, t_k) \\ z(t_k) - z(t_{k-1}) &= (t_k - t_{k-1})z'(c_k), \quad c_k \in (t_{k-1}, t_k). \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} L_P &= \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k = \sum_{k=1}^{n} |\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{[x'(a_k)]^2 + [y'(b_k)]^2 + [z'(c_k)]^2} \leq \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\|x'\|^2 + \|y'\|^2 + \|z'\|^2} \\ &= (b-a) \cdot \sqrt{\|x'\|^2 + \|y'\|^2 + \|z'\|^2}. \end{aligned}$$

Fiindcă L_C este cel mai mic majorant al tuturor lungimilor liniilor poligonale, rezultă

$$L_C \leq (b-a) \cdot \sqrt{\|x'\|^2 + \|y'\|^2 + \|z'\|^2},$$

ceea ce arată că C este rectificabilă.

Pentru a demonstra formula pentru lungimii curbei, fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ şi o linie poligonală $P = P_0P_1 \dots P_n$ cu proprietatea că

$$L_C < \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k.$$

Pentru că $|\vec{r'}(t)|$ este o funcţie continuă pe $[a,b]$, ea este integrabilă pe $[a,b]$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| = \max(t_k - t_{k-1}) < \delta$ şi orice $d_k \in [t_{k-1}, t_k]$ să avem

$$\left| \int_a^b |\vec{r'}(t)| \, \mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) |\vec{r'}(d_k)| \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Vom arăta în continuare că putem alege δ suficient de mic astfel încât

$$\left| \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) |\vec{r'}(d_k)| \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aceste ultime trei inegalităţi demonstrează că

$$\left| L_C - \int_a^b |\vec{r'}(t)| \, \mathrm{d}t \right| < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, adică $L_C = \int_a^b |\vec{r'}(t)| \,\mathrm{d}t$.

Plecăm de la

$$\sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sqrt{[x'(a_k)]^2 + [y'(b_k)]^2 + [z'(c_k)]^2}.$$

şi folosind inegalitatea lui Minkowski

$$\begin{aligned}&\sqrt{[x'(a_k)]^2 + [y'(b_k)]^2 + [z'(c_k)]^2} - \sqrt{[x'(d_k)]^2 + [y'(d_k)]^2 + [z'(d_k)]^2}\\ &\leq \sqrt{[x'(a_k) - x'(d_k)]^2 + [y'(b_k) - y'(d_k)]^2 + [z'(c_k) - z'(d_k)]^2}\end{aligned}$$

şi modulul de continuitate ω asociat unei funcţii uniform continue h pe mulţimea $[a, b]$

$$\omega(h, \eta) = \sup_{u,v \in [a,b],\ |u-v| \leq \eta} |h(u) - h(v)|,$$

vom avea

$$\left| \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}P_k - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) |\vec{r'}(d_k)| \right| \leq (b - a) \cdot \sqrt{[\omega(x', \|\Delta\|)]^2 + \omega(y', \|\Delta\|)]^2 + \omega(z', \|\Delta\|)]^2}.$$

□

4.21 Exemplu. Să se calculeze lungimea unui cerc.

Considerăm cercul cu centrul de coordonate (x_0, y_0) şi rază r. Parametrizarea acestui cerc parcurs în sens trigonometric este

$$C\colon \begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Avem

$$\begin{aligned} L_C &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}t = 2\pi r. \end{aligned}$$

4.22 Observaţie. Există curbe închise care mărginesc un domeniu mărginit, dar care au lungime infinită. Un astfel de exemplu este fulgul de nea al lui von Koch. Se obţine printr-un şir infinit de iteraţii. Iniţial, se consideră un triunghi echilateral. La fiecare iteraţie, se împarte fiecare latură în trei părţi, se înlocuieşte treimea de la mijloc cu alte două segmente de aceeaşi mărime care formează în exterior un triunghi echilateral cu latura scoasă. La iteraţia zero, perimetrul este $P_0 = 3L$. După prima iteraţie, perimetrul este $P_1 = 4L = P_0 \cdot \frac{4}{3}$. După n iteraţii, perimetrul este $P_n = P_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Când $n \to \infty$, perimetrul P_n tinde la infinit.

Aria triunghiului echilateral iniţial este $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot L^2$. Calculăm aria la fiecare iteraţie

$$A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{L}{3}\right)^2 = A_0 \left(1 + \frac{3 \cdot 1}{9}\right)$$
$$A_2 = A_1 + 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{L}{3^2}\right)^2 = A_0 \left(1 + \frac{3 \cdot 1}{9^1} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right)$$
$$A_3 = A_2 + 3 \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{L^2}{3^3}\right)^2 = A_0 \left(1 + \frac{3 \cdot 1}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = A_0 \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{3 \cdot 4^{k-1}}{9^k}\right).$$

Aria fulgului de nea este

$$A = A_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{9^n}\right) = A_0 \left(1 + \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}\right) = \frac{8A_0}{5}.$$

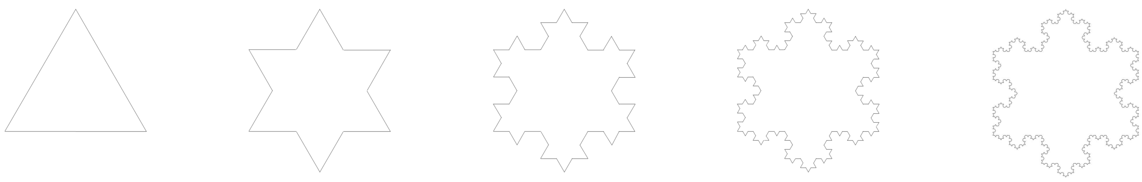


Figura 4.2: Triunghiul echilateral şi fulgul de zăpadă după 4 iteraţii

4.3 Integrale curbilinii de speţa I

4.23 Definiţie. *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ o funcţie şi C o curbă care are suportul inclus în D. Numim* **integrală curbilinie de speţa I a funcţiei f pe curba** *C numărul real I (dacă un astfel de număr există) cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice alegere a punctelor P_k în ordine pe curbă cu proprietatea că P_0 este originea curbei, P_n este extremitatea curbei C, iar fiecare segment $P_{k-1}P_k$ are lungimea mai mică decât δ şi pentru orice alegere a punctelor N_k de pe curbă aflate între P_{k-1} şi P_k să aibă loc*

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \cdot P_{k-1}P_k \right| < \varepsilon.$$

4.24 Notaţie. Dacă numărul I există, atunci el este unic (depinde doar de funcţie şi de curbă şi nu de alegerea punctelor P_k şi N_k) şi se notează $\int_C f \,\mathrm{d}s$. Această valoare poate fi privită ca o limită

$$\int_C f \,\mathrm{d}s = \lim_{\max(P_{k-1}P_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \cdot P_{k-1}P_k.$$

Existenţa limitei depinde de proprietăţile funcţiei f şi ale curbei C.

4.25 Observaţie. Să considerăm un exemplu practic care a condus la noţiunea de integrală curbilinie de speţa I. Avem un fir material de grosime neglijabilă în raport cu lungimea având forma curbei C. În fiecare punct al curbei avem o anumită densitate dată de funcţia $\rho : C \to \mathbb{R}$. Ne propunem să calculăm masa firului material.

Aproximăm curba C cu linia poligonală $P_0P_1 \dots P_n$, unde P_k sunt puncte luate în ordine pe curbă. Aproximăm masa firului material cu masa liniei poligonale construite, presupunând că densitatea pe fiecare segment al liniei poligonale este constantă şi are ca valoare densitatea unui anumit punct N_k de pe curbă aflat între P_{k-1} şi P_k. Masa fiecărui segment omogen este produsul dintre densitatea segmentului şi lungimea segmentului. Masa liniei poligonale va fi

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{masa}(P_{k-1}P_k) = \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k) \cdot P_{k-1}P_k.$$

În anumite condiţii ce ţin de funcţie şi de curbă, atunci când numărul de puncte de pe curbă creşte la infinit, această sumă a masei poligonale tinde la masa firului material.

4.26 Observaţie. Masa firului material se calculează cu formula $m = \int_C \rho \, \mathrm{d}s$. Dacă firul este omogen şi $\rho = 1$ atunci masa coincide cu lungimea firului. Formula pentru lungimea unei curbe este

$$\ell(C) = \int_C \mathrm{d}s.$$

4.27 Teoremă (Formula de calcul a integralei curbilinii de speţa I)**.** *Dacă C este o curbă netedă reprezentată parametric prin*

$$C\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(y), \qquad t \in [a,b] \\ z = z(t), \end{cases}$$

şi $f : C \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

4.28 Observaţie. Integrala nu depinde de parametrizare. Luând două drumuri echivalente γ_1 şi γ_2 legate prin $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$, se face schimbarea de variabilă $h(t) = u$ în integrala pe γ_2.

4.29 Teoremă. *Fie C o curbă netedă pe porţiuni şi fie C_k curbele netede care alcătuiesc descompunerea curbei C. Atunci*

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1 \cup \dots \cup C_n} f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \dots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s.$$

4.30 Teoremă. *Fie C o curbă netedă şi fie C^- curba parcursă în mod invers. Atunci*

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C^-} f\,\mathrm{d}s.$$

Demonstraţie. Se face schimbarea de variabilă $a + b - t = u$ în integrala pe drumul invers. □

4.31 Exemplu. Să se calculeze $\int_C (x+1)\,\mathrm{d}s$, unde C este curba închisă formată din segmentul AB, cu $A(-1,1)$ şi $B(1,1)$ şi arcul de pe parabola $y = x^2$ cu originea în B şi extremitatea în A.

Putem scrie

$$\int_C (x+1)\,\mathrm{d}s = \int_{AB} (x+1)\,\mathrm{d}s + \int_P (x+1)\,\mathrm{d}s,$$

unde P este porţiunea de pe parabola de ecuaţie $y = x^2$ cu originea în B şi extremitatea în A.

Segmentul AB se parametrizează $x = t$, $y = 1$, $t \in [-1,1]$. Avem $x' = 1$ şi $y' = 0$. Atunci $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$ şi

$$\int_{AB} (x+1)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} (t+1)\,\mathrm{d}t = 2.$$

Curba P^{-1} se parametrizează prin $x = t$, $y = t^2$, $t \in [-1,1]$. Atunci

$$\int_P (x+1)\,\mathrm{d}s = \int_{P^{-1}} (x+1)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} (t+1)\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Prin integrare prin părţi, rezultă

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t &= t\sqrt{1+4t^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{4t^2}{\sqrt{1+4t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{5} - \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{5} - I + \frac{1}{2}\cdot\ln(2+\sqrt{5}). \end{aligned}$$

În final,

$$\int_C (x+1)\,\mathrm{d}s = 2 + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}).$$