Curs 5

Integrale curbilinii de speţa a II-a

5.1 Integrale curbilinii de speţa II

5.1 Definiţie. *Fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o funcţie vectorială $F = (P, Q, R)$ şi C o curbă care are suportul inclus în D. Numim* **integrală curbilinie de speţa a II-a a funcţiei** F **pe curba** C *numărul real I (dacă un astfel de număr există) cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice alegere a punctelor $P_k(x_k, y_k, z_k)$ în ordine pe curbă cu proprietatea că P_0 este originea curbei, P_n este extremitatea curbei C, iar fiecare segment $P_{k-1}P_k$ are lungimea mai mică decât δ şi pentru orice alegere a punctelor N_k de pe curbă aflate între P_{k-1} şi P_k să aibă loc*

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} P(N_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(N_k)(y_k - y_{k-1}) + R(N_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

5.2 Notaţie. Dacă numărul I din definiţie există, atunci el este unic (depinde doar de curba C şi de funcţia F şi nu depinde de alegerea punctelor P_k şi N_k de pe curbă) şi se notează $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

5.3 Observaţie. Să considerăm un exemplu practic care a condus la noţiunea de integrală curbilinie de speţa a II-a. Ne propunem să calculăm lucrul mecanic L al unei forţe $\vec{F}$ ce acţionează asupra unui punct ce se deplasează pe curba C.

Aproximăm curba C cu linia poligonală $P_0P_1\ldots P_n$, unde P_k sunt puncte luate în ordine pe curbă. Aproximăm lucrul mecanic L cu lucrul mecanic al unui punct ce se deplasează pe linia poligonală construită, presupunând că forţa pe fiecare segment al liniei poligonale este constantă şi are aceeaşi valoare ca forţa ce acţionează asupra unui anumit punct N_k de pe curbă aflat între P_{k-1} şi P_k. Lucru mecanic de pe fiecare segment este produsul scalar dintre forţă şi deplasare. Lucrul mecanic pe linia poligonală va fi

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \overrightarrow{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(N_k)(y_k - y_{k-1}) + R(N_k)(z_k - z_{k-1}).$$

La limită, această sumă tinde la lucrul mecanic L.

5.4 Observaţie. Dacă $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ este vectorul de poziţie, atunci vectorul deplasare este $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{\imath} + \mathrm{d}y\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\vec{k}$. Cu aceasta, putem scrie

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

care se mai numeşte circulaţia vectorului $\vec{F}$ de-a lungul curbei C. Dacă curba C este închisă, atunci pentru integrală se mai foloseşte şi notaţia $\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

5.5 Teoremă (Formula de calcul a integralei curbilinii de speţa a II-a)**.** *Dacă C este o curbă netedă reprezentată parametric prin*

$$C\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

şi $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$, unde P, Q, R sunt funcţii continue pe un domeniu ce conţine suportul lui C, atunci

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

5.6 Observaţie. Integrala nu depinde de parametrizare.

5.7 Teoremă. *Fie C o curbă netedă pe porţiuni şi fie C_k curbele netede care alcătuiesc descompunerea curbei C. Atunci*

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1 \cup \cdots \cup C_n} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

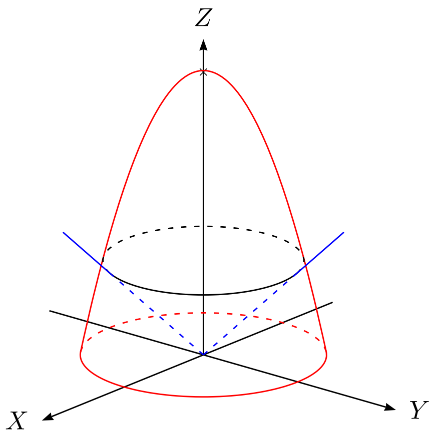
5.8 Teoremă. *Fie C o curbă netedă şi fie C^- curba parcursă în mod invers. Atunci*

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{C^-} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

5.9 Exemplu. Să se calculeze $\int_C z^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z$, unde C este curba aflată la intersecţia conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ cu paraboloidul $z = 6 - (x^2 + y^2)$, iar sensul de parcurgere al curbei este sensul orar dacă curba este privită din origine.

La intersecţia conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ cu paraboloidul $z = 6 - (x^2 + y^2)$ se găseşte un cerc. Ecuaţia cercului se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 6 - (x^2 + y^2). \end{cases}$$



Obţinem $z = 6 - z^2$, adică $z^2 + z - 6 = 0$ cu soluţiile $z = 2$ şi $z = -3$. Dar z trebuie să fie pozitiv, aşadar $z = 2$. În acest caz $x^2 + y^2 = 4$. Putem să parametrizăm acest cerc în felul următor:

$$C\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 2, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pentru calculul integralei avem

$$\begin{aligned} I &= \int_C z^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} [4(-2\sin t) + 2\cos t(2\cos t)]\,\mathrm{d}t \\ &= -8\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\cos t\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 4\pi. \end{aligned}$$

5.2 Forme diferenţiale exacte

5.10 Definiţie. *O mulţime $D \subset \mathbb{R}^3$ este* **deschisă** *dacă pentru orice $(x_0, y_0, z_0) \in D$ există un $r > 0$ astfel încât mulţimea*

$$\left\{\, (x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2 \,\right\}$$

este inclusă în D. Altfel spus, o mulţime este deschisă dacă pentru orice punct al mulţimii, mulţimea include cel puţin o bilă centrată în punctul ales.

5.11 Observaţie. Dacă (x, y, z) aparţine mulţimii deschise D, atunci există un $r > 0$ cu proprietatea că $(x + h, y, z) \in D$ pentru orice $0 \leq h < r$.

5.12 Definiţie. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi fie $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe D. Expresia*

$$\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

se numeşte **formă diferenţială de ordinul întâi** *pe D.*

5.13 Definiţie. *Forma diferenţială*

$$\omega = P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

se numeşte **exactă** *dacă există o funcţie $\phi \in C^1(D)$ cu proprietatea că*

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Funcţia ϕ se numeşte **primitiva** *formei diferenţiale exacte ω.*

5.14 Observaţie. Din punct de vedere vectorial, dacă $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{\kappa}$ este câmpul vectorial asociat formei diferenţiale exacte ω, atunci

$$\vec{v} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{\kappa} = \operatorname{grad} \phi.$$

Spunem că $\vec{v}$ este un câmp de gradienţi şi numim ϕ potenţial scalar al lui $\vec{v}$.

5.15 Teoremă. ***Formula lui Leibniz-Newton pentru forme diferenţiale exacte***
Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Dacă $\gamma : [a, b] \to D$ un drum de clasă C^1 pe D, iar $\phi : D \to \mathbb{R}$ este o primitivă a formei diferenţiale exacte ω, atunci

$$\int_\gamma \omega = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)).$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_\gamma P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_a^b [P(\gamma(t)) \cdot x'(t) + Q(\gamma(t)) \cdot y'(t) + R(\gamma(t)) \cdot z'(t)]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(\gamma(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(\gamma(t)) \cdot y'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial z}(\gamma(t)) \cdot z'(t)\right]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b [\phi(\gamma(t))]'\,\mathrm{d}t = \phi(\gamma(t))\Big|_a^b = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

5.16 Definiţie. *Mulţimea $D \subseteq \mathbb{R}^m$ se numeşte* **conexă prin arce** *dacă pentru orice $x, y \in D$ există $\gamma : [0,1] \to D$ continuă cu proprietatea că $\gamma(0) = x$ şi $\gamma(1) = y$. Fiindcă oricare două puncte ale mulţimii pot fi unite printr-un drum cu suport inclus în mulţime, o astfel de mulţime este "dintr-o singură bucată".*

5.17 Teoremă. ***Teorema de caracterizare a formelor diferenţiale exacte***
Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi conexă prin arce şi ω o formă diferenţială pe D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) ω este o formă diferenţială exactă
2) pentru orice drum închis γ cu suportul inclus în D avem $\int_\gamma \omega = 0$
3) $\int_\gamma \omega$ nu depinde de drum.

Demonstraţie. Arătam că 1) $\Rightarrow$ 2).
Dacă γ este un drum închis, atunci $\gamma(a) = \gamma(b)$ şi conform formulei lui Leibniz-Newton pentru forme diferenţiale exacte, rezultă $\int_\gamma \omega = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)) = 0$.

Arătam că 2) $\Rightarrow$ 3).
Fie γ_1 şi γ_2 două drumuri incluse în D care au aceleaşi capete. Drumul $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$ este un drum închis inclus în D. Atunci pe baza ipotezei, $\int_\gamma \omega = 0$. Dar,

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^{-1}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega.$$

Rezultă $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Arătam că 3) $\Rightarrow$ 1).
Fie $A \in D$ un punct fixat şi $M \in D$ un punct variabil. Pentru că D este conexă prin arce, există cel puţin un drum AM care leagă punctul A de punctul M. Definim funcţia $\phi : D \to \mathbb{R}$ prin $\phi(M) = \int_{AM} \omega$. Această funcţie este corect definită pentru că integrala nu depinde de alegerea drumului AM. Arătăm că ϕ este o primitivă a formei diferenţiale ω.

Fie $M(a,b,c) \in D$. Pentru că D este deschisă, există $r > 0$ astfel încât $N(a+h,b,c) \in D$, pentru orice $0 < h < r$. Demonstrăm că $\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b,c) = P(a,b,c)$. Avem

$$\frac{\phi(a+h,b,c) - \phi(a,b,c)}{h} = \frac{\phi(N) - \phi(M)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{AN} \omega - \int_{AM} \omega\right) = \frac{1}{h}\int_{MN} \omega.$$

Parametrizarea drumului MN este $x = t$, $y = b$, $z = c$, $t \in [a, a+h]$. Atunci

$$\frac{1}{h}\int_{MN} \omega = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} P(t,b,c)\,\mathrm{d}t = P(a+\eta,b,c), \qquad \text{pentru un } \eta \in (0,h).$$

Trecând la limită cu $h \to 0$ în egalitatea

$$\frac{\phi(a+h,b,c) - \phi(a,b,c)}{h} = P(a+\eta,b,c)$$

şi folosind derivabilitatea funcţiei ϕ în raport cu variabila x şi continuitatea lui P, obţinem $\frac{\partial \phi}{\partial x}(a,b,c) = P(a,b,c)$. La fel se arată că

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(a,b,c) = Q(a,b,c) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}(a,b,c) = R(a,b,c).$$

□

5.18 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este o formă diferenţială exactă, iar ϕ este o primitivă de clasă $C^2(D)$ a formei diferenţiale ω, atunci*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Demonstraţie. Prima egalitate rezultă din

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

iar celelalte se demonstrează la fel. □

5.19 Observaţie. Folosind rotorul unui câmp vectorial $\vec{v} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{\kappa}$

$$\mathrm{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{\kappa},$$

rezultatul anterior arată că dacă $\vec{v} = \mathrm{grad}\,\phi$ este un câmp de gradienţi şi potenţialul scalar ϕ este de clasă $C^2(D)$, atunci $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$.

5.20 Definiţie. *O mulţime $D \subset \mathbb{R}^m$ se numeşte* **simplu conexă** *dacă este conexă prin arce şi dacă pentru orice două drumuri $\gamma_1 : [0,1] \to D$ şi $\gamma_2 : [0,1] \to D$ cu aceeaşi origine $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ şi aceeaşi extremitate $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, există o funcţie de clasă $C^2(D)$ de două variabile $H : [0,1]^2 \to D$ cu proprietatea că*

$$H(u,0) = \gamma_1(u) \quad \text{şi} \quad H(u,1) = \gamma_2(u), \quad \text{pentru orice } u \in [0,1]$$

şi

$$H(0,v) = H(0,0) \quad \text{şi} \quad H(1,v) = H(1,1), \quad \text{pentru orice } v \in [0,1].$$

Funcţia H se numeşte **omotopie***, iar cele două drumuri care se deformează în mod continuu dintr-unul în celălalt se numesc* **omotopice***.*

5.21 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi simplu conexă. Dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, $P, Q, R \in C^1(D)$ este o formă diferenţială cu proprietatea că*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

atunci ω este o formă diferenţială exactă.

Demonstraţie. Conform Teoremei de caracterizare a formelor diferenţiale exacte, este suficient să arătăm că integrala $\int_\gamma \omega$ nu depinde de drum. Fie $\gamma_1 : [0,1] \to D$ şi $\gamma_2 : [0,1] \to D$ două drumuri cu aceeaşi origine $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ şi aceeaşi extremitate $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Arătăm că $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$.

Pentru că D este simplu conexă, există $H : [0,1]^2 \to D$ cu proprietatea că $H(u,0) = \gamma_1(u)$ şi $H(u,1) = \gamma_2(u)$, pentru orice $u \in [0,1]$. Fie $H(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $u, v \in [0,1]$. Fie $s \in [0,1]$ oarecare. Considerăm curbele

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad (x,y,z) = H(u,0), \quad u \in [0,s] \\ C_2 &: \quad (x,y,z) = H(s,v), \quad v \in [0,1] \\ C_3 &: \quad (x,y,z) = H(u,1), \quad u \in [0,s] \end{aligned}$$

Demonstrăm că $\int_{C_1\cup C_2\cup C_3^{-1}}\omega = 0$ sau echivalent $\int_{C_3\cup C_1^{-1}}\omega = \int_{C_2}\omega$ pentru orice $s\in[0,1]$.

Notând $F=(P,Q,R)$, putem scrie

$$A(s)=\int_{C_3\cup C_1^{-1}}\omega=\int_0^s\left[F(H(u,1))\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(H(u,1)\right)-F(H(u,0))\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(H(u,0)\right)\right]\mathrm{d}u$$

şi

$$B(s)=\int_{C_2}\omega=\int_0^1 F(H(s,v))\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(H(s,v)\right)\mathrm{d}v.$$

Vom demonstra că $A(s)=B(s)$ pentru orice $s\in[0,1]$, arătând că $A'(s)=B'(s)$ pentru orice $s\in[0,1]$ şi $A(0)=B(0)$. Acest lucru va implica egalitatea $A(1)=B(1)$. Dar $B(1)=0$, pentru că $H(1,v)$ este constant pentru orice $v\in[0,1]$, iar $A(1)=\int_{\gamma_2}\omega-\int_{\gamma_1}\omega$. Acest lucru demonstrează egalitatea $\int_{\gamma_1}\omega=\int_{\gamma_2}\omega$.

Să observăm pentru început că $A(0)=0$, iar $B(0)=0$, pentru că $H(0,v)$ este constant pentru orice $v\in[0,1]$. În ce priveşte derivata lui B, putem aplica formula pentru derivarea unei integrale cu parametru, din moment ce funcţia de sub integrală este de clasă C^1

$$B'(s)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial s}\left(F(H(s,v))\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(H(s,v)\right)\right)\mathrm{d}v.$$

Calculăm derivata funcţiei de sub integrală

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\left(F(H(s,v))\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(H(s,v)\right)\right)\\
&=\frac{\partial}{\partial s}\Big(P(H(s,v))x'_v(s,v)+Q(H(s,v))y'_v(s,v)+R(H(s,v))z'_v(s,v)\Big)\\
&=(P'_x x'_u+P'_y y'_u+P'_z z'_u)x'_v+Px''_{vu}+(Q'_x x'_u+Q'_y y'_u+Q'_z z'_u)y'_v+Qy''_{vu}\\
&\quad+(R'_x x'_u+R'_y y'_u+R'_z z'_u)z'_v+Rz''_{vu}\\
&=(P'_x x'_v+P'_y y'_v+P'_z z'_v)x'_u+Px''_{uv}+(Q'_x x'_v+Q'_y y'_v+Q'_z z'_v)y'_u+Qy''_{uv}\\
&\quad+(R'_x x'_v+R'_y y'_v+R'_z z'_v)z'_u+Rz''_{uv}\\
&=\frac{\partial}{\partial v}\left(F(H(s,v))\cdot\frac{\partial H}{\partial u}(s,v)\right).
\end{aligned}$$

Va rezulta

$$B'(s)=\left(F(H(s,v))\cdot\frac{\partial H}{\partial u}(s,v)\right)\Bigg|_{v=0}^{v=1}=A'(s).$$

□

5.22 Observaţie. Condiţia ca D să fie simplu conex este esenţială după cum arată următorul exemplu. Se dă câmpul vectorial

$$F=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},0\right)$$

definit pe mulţimea $D=\mathbb{R}^3\setminus\{\,(0,0,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\,\}$. Fie $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$ şi $Q=\frac{x}{x^2+y^2}$. Acestea sunt funcţii de clasă C^1 pe D, cu proprietatea că

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\qquad (x,y)\neq(0,0).$$

Rezultă că $\operatorname{rot}(F) = 0$, dar F nu este un câmp de gradienţi, pentru că integrala $\int_C \omega$, unde C este cercul $x^2+y^2 = r^2$ din planul $z = 0$ parcurs în sens trigonometric, nu este nulă. Într-adevăr,

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2}(r\cos t) \right] \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Acest lucru se explică prin faptul că mulţimea D nu este simplu conexă.

5.23 Observaţie. Primitiva acestei forme diferenţiale exacte se determină cu formula

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,\mathrm{d}t.$$

În plan, formula pentru primitiva unei forme diferenţiale exacte $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ este

$$\phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

5.24 Exemplu. Calculaţi $\displaystyle\int_{(1,0,1)}^{(2,3,4)} yz(2x+y-z)\,\mathrm{d}x + xz(x+2y-z)\,\mathrm{d}y + xy(x+y-2z)\,\mathrm{d}z.$

Fie

$$P = yz(2x+y-z), \quad Q = xz(x+2y-z), \quad R = xy(x+y-2z).$$

Acestea sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$ şi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + 2yz - z^2\\
\frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 + 2xy - 2xz\\
\frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy + y^2 - 2yz.
\end{aligned}$$

Pentru că $\mathbb{R}^3$ este simplu conexă, rezultă că forma diferenţială $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este exactă. Determinăm o primitivă cu formula

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^z xy(x+y-2t)\,\mathrm{d}t = xy(x+y)t - xyt^2\Big|_0^z = xyz(x+y-z).
\end{aligned}$$

Pe baza formulei lui Leibniz-Newton

$$\int_{(1,0,1)}^{(2,3,4)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \phi(2,3,4) - \phi(1,0,1) = 24.$$

5.25 Exemplu. Să se calculeze lucrul mecanic efectual asupra unui corp de masă m care este deplasat pe curba $x = d\cos t$, $y = d\sin t$, $z = dt$, $t \in [0, 2\pi]$ în câmpul gravitaţional al Pământului. Forţa care acţionează asupra corpului este $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}$. (Am notat cu $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ vectorul de poziţie şi cu $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ lungimea vectorului de poziţie, M este masa Pământului şi G constanta gravitaţională).

Calculăm $\operatorname{rot}(\vec{F}) = -GmM\operatorname{grad}(r^{-3}) \times \vec{r} - GmMr^{-3}\operatorname{rot}(\vec{r}) = 3GmMr^{-5}\vec{r} \times \vec{r} - 0 = 0$. Pentru că $\vec{F}$ este de clasă C^1 pe mulţimea simplu conexă $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\,(0,0,0)\,\})$ şi $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$, există ϕ de clasă C^1 pe D astfel încât $\vec{F} = \operatorname{grad}\phi$. Funcţia ϕ este $\phi = \frac{GmM}{r}$. Atunci

$$L = \int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \phi(d,0,2d\pi) - \phi(d,0,0) = \frac{GmM}{d\sqrt{1+4\pi^2}} - \frac{GmM}{d}.$$