Curs 6

Numere complexe

6.1 Operaţii cu numere complexe

6.1 Definiţie. *Mulţimea* $\mathbb{R}^2$ *a tuturor perechilor ordonate de numere reale, pe care o înzestrăm cu operaţiile de adunare şi înmulţire*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

formează un corp comutativ numit **corpul numerelor complexe***, pe care îl vom nota cu* $\mathbb{C}$. *Elementele lui* $\mathbb{C}$ *se numesc* **numere complexe***.*

6.2 Notaţie. Observăm că $(a,0)+(c,0)=(a+c,0)$ şi $(a,0)\cdot(c,0)=(ac,0)$ ceea ce ne justifică faptul că mulţimea $\{\,(a,0)\,|\,a\in\mathbb{R}\,\}$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$ care este izomorf cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Acest lucru ne arată că putem face identificarea dintre perechea $(a,0)$ şi numărul real a.

Astfel, orice număr complex îl putem scrie

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1).$$

Perechea $(0,1)$ se notează cu i şi se numeşte unitatea imaginară. Aşadar numărul complex $z=(a,b)$ se scrie

$$z=a+bi.$$

Această formă se numeşte ***forma algebrică*** a numărului complex. Numerele reale a şi b se numesc ***partea reală*** şi ***partea imaginară*** a numărului complex z şi se notează

$$\operatorname{Re} z=a \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} z=b.$$

6.3 Exemplu. Pentru a calcula $(2,-3)\cdot(1,2)+(-1,1)$ putem aplica definiţia

$$(2,-3)\cdot(1,2)+(-1,1)=(8,1)+(-1,1)=(7,2)$$

sau putem folosi forma algebrică şi facem calculele cu i ca şi cum ar fi o expresie reală, iar atunci când avem i^2 ţinem cont că $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$, adică $i^2=-1$:

$$(2-3i)(1+2i)-1+i=2+4i-3i-6i^2-1+i=7+2i.$$

Uşurinţa cu care se fac calculele în acest mod arată utilitatea formei algebrice.

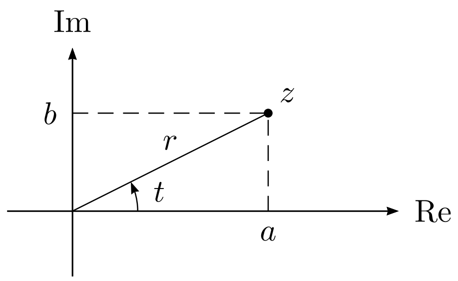

Figura 6.1: Reprezentarea numărului complex $z = a + bi = r(\cos t + i \sin t)$

6.4 Observaţie. Numerele complexe pot fi reprezentate de punctele unui plan. Fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex numit ***afixul*** punctului. Astfel punctul de coordonate (a, b) are afixul $z = a + bi$. Punctele de pe axa orizontală au afixele numere reale şi de aceea axa orizontală se va numi ***axa reală***. Axa verticală se va numi ***axă imaginară***, pe ea fiind reprezentate numerele pur imaginare ib.

6.5 Observaţie. Fie M punctul care are afixul $z = a + ib$. Distanţa de la origine la punctul M o vom nota cu r, iar unghiul pe care semidreapta OM îl face cu partea pozitivă a axei reale, măsurat în radiani în sens invers acelor de ceasornic îl vom nota cu t. Fiecare punct din plan poate fi localizat ştiind mărimile r şi t numite ***coordonate polare***. Avem relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele polare

$$\begin{aligned} a &= r\cos t \\ b &= r\sin t. \end{aligned}$$

Obţinem ***forma trigonometrică*** a numărului complex $z = r(\cos t + i \sin t)$, căci

$$z = a + bi = r\cos t + ir\sin t = r(\cos t + i\sin t).$$

Numărul $r \geq 0$ se numeşte ***modulul*** numărului complex z şi se notează $|z|$. Avem

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Numărul $t \in \mathbb{R}$ se numeşte ***argumentul*** numărului complex z şi se notează $\arg z$. Valoarea argumentului din intervalul $[0, 2\pi)$ se numeşte valoare principală a argumentului. Aceasta se determină astfel:

$$t = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & (a,b) \text{ în cadranul 1 } (a > 0, b \geq 0) \\ \dfrac{\pi}{2}, & (a = 0, b > 0) \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & (a,b) \text{ în cadranele 2 şi 3 } \ (a < 0, b \in \mathbb{R}) \\ \dfrac{3\pi}{2}, & (a = 0, b < 0) \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & (a,b) \text{ în cadranul 4 } \ (a > 0, b < 0). \end{cases}$$

Pentru numărul complex $z = 0$ ($a = 0$ şi $b = 0$), argumentul t este nedeterminat.

Datorită periodicităţii funcţiilor cosinus şi sinus, valoarea argumentului nu este unic determinată. Mulţimea tuturor argumentelor numărului complex $z \neq 0$ se notează $\operatorname{Arg} z$. Avem

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Uneori se defineşte argumentul unui număr complex, ca fiind valoarea lui t din intervalul $(-\pi, \pi]$.

6.6 Exemplu. Mai jos sunt câteva exemple de numere complexe scrise în formă algebrică şi trigonometrică

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 + i \sin 0 \\
-2 &= 2(\cos\pi + i\sin\pi) \\
i &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\
-3i &= 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \\
1+2i &= \sqrt{5}\,[\cos(\operatorname{arctg} 2) + i\sin(\operatorname{arctg} 2)] \\
-2+2i &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i &== \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \\
1-i &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

6.7 Observaţie. Deoarece $|z_1|, |z_2|$ şi $|z_1 + z_2|$ sunt laturile unui triunghi are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

numită inegalitatea triunghiului. Ca şi consecinţă are loc şi inegalitatea

$$||z_2| - |z_1|| \leq |z_2 - z_1|.$$

6.8 Observaţie. Scrierea sub forma trigonometrică este avantajoasă când efectuăm operaţii de înmulţire cu numere complexe. Aceasta pentru că dacă

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos t_1 + i\sin t_1) \\
z_2 &= r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)
\end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2\,[\cos t_1 \cos t_2 - \sin t_1 \sin t_2 + i(\cos t_1 \sin t_2 + \sin t_1 \cos t_2)] \\
&= r_1 r_2\,[\cos(t_1 + t_2) + i\sin(t_1 + t_2)].
\end{aligned}$$

Astfel când se înmulţesc două numere complexe, modulul produsului este produsul modulelor, iar argumentul produsului este suma argumentelor:

$$\begin{aligned}
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\
\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) &= \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.
\end{aligned}$$

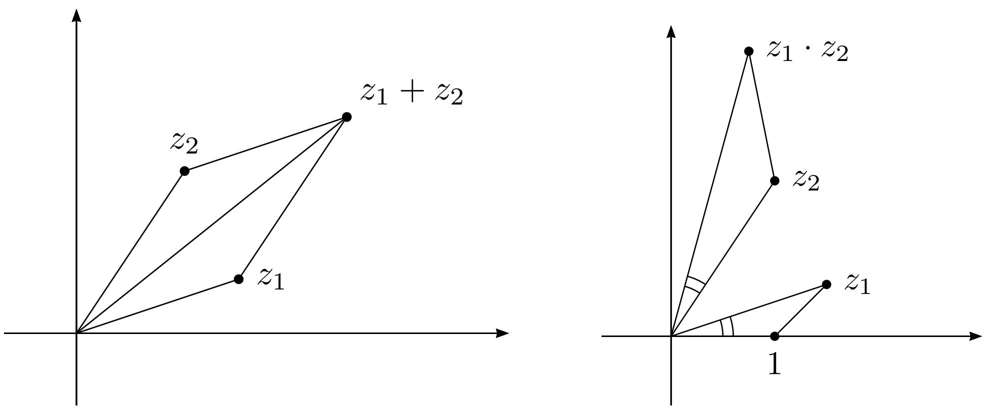

Figura 6.2: Adunarea şi înmulţirea numerelor complexe

Prin înmulţire repetată se obţine formula $z^n = r^n(\cos nt + i \sin nt)$. În particular pentru $r = 1$ rezultă formula lui Moivre

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

6.9 Exemplu. Să se calculeze $(1 + i\sqrt{3})^{100}$.

Scriem pe $z = 1 + i\sqrt{3}$ în forma trigonometrică. Avem $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ şi $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Atunci

$$\begin{aligned} z^{100} &= |z|^{100}\left(\cos\frac{100\pi}{3} + i \sin\frac{100\pi}{3}\right) = 2^{100}\left[\cos\left(32\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(32\pi + \frac{4\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2^{100}\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2^{100}\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2^{99}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

6.10 Exemplu. Definind argumentul în intervalul $(-\pi, \pi]$ şi considerând argumentul produsului

$$(1 + ix)(1 + iy) = 1 - xy + i(x + y),$$

deducem formula

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & xy < 1 \\ \dfrac{\pi}{2}, & xy = 1,\ x + y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & xy = 1,\ x + y < 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & xy > 1,\ x + y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}, & xy > 1,\ x + y < 0 \end{cases}$$

În particular $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Folosind această proprietate a argumentelor, din egalitatea

$$(5 + i)^4 = (24 + 10i)^2 = 476 + 480i = 2(238 + 240i) = 2(1 + i)(239 + i)$$

deducem formula lui Machin

$$4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

6.11 Definiţie. Conjugatul *numărului complex* $z = a + bi$ *este numărul complex*

$$\overline{z} = a - bi.$$

6.12 Propoziţie. *Principalele proprietăţi legate de conjugatul unui număr complex sunt*

$$\begin{array}{lll}
a) & \overline{\overline{z}} = z & \\
b) & \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, & \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
c) & \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, & \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2} \\
d) & z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} & \\
e) & z \cdot \overline{z} = |z|^2. &
\end{array}$$

6.13 Exemplu. Să se demonstreze că $|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

Vom folosi proprietăţile conjugatului şi avem

$$\begin{aligned}
|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - z_1\overline{z_2})\,\overline{1 - z_1\overline{z_2}} - (z_1 - z_2)\,\overline{z_1 - z_2} \\
&= (1 - z_1\overline{z_2})\,(1 - \overline{z_1}z_2) - (z_1 - z_2)\,(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= 1 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} \cdot \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} \\
&= 1 + |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \\
&= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2).
\end{aligned}$$

6.14 Observaţie. Pentru a împărţi numărul z_1 la $z_2 \neq 0$ determinăm numărul complex z astfel încât $z_1 = z_2 \cdot z$. Înmulţind cu conjugatul lui z_2 avem $z_1 \cdot \overline{z_2} = z_2 \cdot \overline{z_2} \cdot z$, de unde

$$\frac{z_1}{z_2} = z = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{cb - ad}{c^2 + d^2}.$$

În formă trigonometrică, aceasta se scrie

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(t_1 - t_2) + i\sin(t_1 - t_2)\right].$$

6.15 Definiţie. Funcţia exponenţială $\exp(z)$ *sau* e^z *se defineşte pentru orice număr complex* z, $z = a + bi$ *prin*

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

6.16 Observaţie. Pentru $a = 0$ obţinem ***formula lui Euler*** $e^{ib} = \cos b + i\sin b$. Pentru $-b$ aceasta se scrie $e^{-ib} = \cos b - i\sin b$. De aici se obţin formulele lui Euler

$$\cos b = \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$$
$$\sin b = \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}.$$

Formula lui Euler ne permite să scriem orice număr complex în ***forma exponenţială***

$$z = |z|e^{i\arg z}.$$

De exemplu, este adevărată formula $1 = e^{2\pi i}$.

6.17 Observaţie. Să mai observăm că funcţia exponenţială astfel definită verifică proprietatea obişnuită a funcţiei exponenţiale $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. De aici rezultă relaţia $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ ceea ce ne arată că funcţia exponenţială este periodică de perioadă $2\pi i$.

6.18 Exemplu. O formulă utilă care apare în inginerie este următoarea relaţie

$$a\cos\lambda t + b\sin\lambda t = A\cos(\lambda t - \phi), \qquad \text{unde } a + bi = Ae^{i\phi}.$$

Pentru a o demonstra, să observăm că

$$(a - bi)\cdot(\cos\lambda t + i\sin\lambda t) = a\cos\lambda t + b\sin\lambda t + i\left(a\sin\lambda t - b\cos\lambda t\right).$$

De aici, rezultă

$$\begin{aligned} a\cos\lambda t + b\sin\lambda t &= \operatorname{Re}\left[(a - bi)\cdot(\cos\lambda t + i\sin\lambda t)\right] \\ &= \operatorname{Re}\left(Ae^{-i\phi}\cdot e^{i\lambda t}\right) = \operatorname{Re}\left(Ae^{i(\lambda t-\phi)}\right) \\ &= A\cos(\lambda t - \phi). \end{aligned}$$

6.19 Definiţie. *Definim funcţiile* **sinus** *şi* **cosinus** *pe* $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

şi funcţiile **sinus hiperbolic** *şi* **cosinus hiperbolic** *pe* $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

6.20 Observaţie. Din definiţia funcţiilor trigonometrice şi a celor hiperbolice rezultă

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} iz &= \cos z & \qquad \cos iz &= \operatorname{ch} z \\ \operatorname{sh} iz &= i\sin z & \qquad \sin iz &= i\operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Formulele cu sin şi cos din cazul real rămân adevărate. De exemplu

$$\begin{aligned} \sin a\cos b &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\cdot\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{4i} + \frac{e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)}}{4i} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]. \end{aligned}$$

Dar există şi o deosebire între funcţiile sin şi cos definite pe $\mathbb{R}$ şi cele definite pe $\mathbb{C}$: funcţiile sin şi cos sunt mărginite pe $\mathbb{R}$, dar pe $\mathbb{C}$ sunt nemărginite. Într-adevăr, pentru că $\lim_{b\to\infty} \operatorname{ch} b = \infty$ şi $\cos ib = \operatorname{ch} b$ rezultă cos este nemărginită. Din $\lim_{b\to\infty} \operatorname{sh} b = \infty$ şi $\sin ib = -i\operatorname{sh} b$ rezultă sin este nemărginită.

6.21 Definiţie. *Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei*

$$e^w = z$$

se numeşte **logaritm** *al lui z şi se notează* $\operatorname{Log} z$.

6.22 Propoziţie. *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $e^w = z$, unde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ este*

$$\operatorname{Log} z = \{ \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \} .$$

Demonstraţie. Scriind numărul z în forma exponenţială $z = re^{it}$ şi $w = u+iv$ în forma algebrică avem

$$e^u e^{iv} = e^{u+iv} = e^w = z = re^{it},$$

de unde rezultă $e^u = r$ şi $v = t + 2k\pi$, adică $u = \ln r = \ln |z|$ şi $v = \arg z + 2k\pi$. □

6.23 Observaţie. Spre deosebire de cazul real, unde un număr pozitiv are un singur logaritm, în cazul complex un număr nenul are o infinitate de logaritmi. Astfel în complex funcţia Log este o funcţie multivocă (adică asociază unui singur număr complex o mulţime de numere complexe). Funcţia obţinută pentru o valoare fixată a lui k se numeşte ***ramură*** sau ***determinare*** a funcţiei $\operatorname{Log} z$. Ramura corespunzătoare lui $k = 0$ se numeşte ramură principală şi se notează

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

unde $\arg z$ ia valori în intervalul $[0, 2\pi)$.

Funcţiile multivoce nu mai pot fi privite în acelaşi fel în care sunt privite funcţiile univoce. De exemplu să presupunem că obligăm variabila z să descrie un cerc cu centrul în origine în sens trigonometric. Să observăm că atunci când variabila ajunge de unde a plecat, argumentul ei a crescut cu 2π. Deşi am ajuns în acelaşi punct din plan valoarea funcţiei este diferită.

Pentru a corecta această problemă să presupunem că facem o "tăietură" în planul complex în partea pozitivă a axei reale de la punctul $z = 0$ până la $z = \infty$ şi convenim ca variabila z să nu poată trece peste această tăietură. În acest fel se sacrifică continuitatea funcţiei, pentru că în puncte apropiate situate de o parte şi alta a tăieturii valorile funcţiei diferă prin $2\pi i$. Pentru a înlătura şi acest neajuns, să considerăm în locul planului variabilei complexe z o suprafaţă formată din mai multe plane complexe suprapuse, câte unul pentru fiecare ramură a funcţiei. Lipim tăieturile acestor plane astfel încât marginea inferioară a fiecărui plan este lipită de marginea superioară a planului precedent şi marginea superioară este lipită la marginea inferioară a planului următor. În cazul unei funcţii cu un număr finit de ramuri, marginea superioară a ultimului plan este lipită de marginea inferioară a primului plan. În acest fel am obţinut o suprafaţă continuă.

6.24 Exemplu. Să vedem în cazul complex cât este $\operatorname{Log}(-1)$?

Modulul numărului $z = -1$ este $|z| = 1$ iar argumentul $\arg z = \pi$. Atunci

$$\operatorname{Log}(-1) = \{ \ln 1 + i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \} = \{ i\pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z} \} .$$

6.25 Observaţie. Şi în cazul complex are loc proprietatea $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$. Spre exemplu

$$\operatorname{Log}[(-1-i)(1-i)] = \operatorname{Log}(-2) = \ln 2 + i\pi + 2k\pi i$$

şi

$$\mathrm{Log}(-1-i)+\mathrm{Log}(1-i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{5\pi}{4}+i2n\pi+\ln\sqrt{2}+i\frac{7\pi}{4}+i2m\pi=\ln 2+3\pi i+2\pi i(n+m).$$

Avem egalitate dacă alegem $k=m+n+1$.

6.26 Definiţie. *Funcţia* **putere** *se defineşte cu ajutorul logaritmului în felul următor: pentru* $z,\alpha\in\mathbb{C}$

$$z^\alpha=e^{\alpha\cdot\mathrm{Log}\,z}.$$

6.27 Observaţie. Dacă α este număr raţional de forma $\alpha=p/q$ cu $p,q\in\mathbb{Z}$ şi $q>1$ atunci funcţia z^α este multivocă: unei valori fixate a lui z îi corespund q valori diferite. Dacă α nu este raţional atunci funcţia putere are o infinitate de ramuri. De exemplu

$$\sqrt{-1}=(-1)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\cdot\mathrm{Log}(-1)}=e^{\frac{1}{2}i(\pi+2k\pi)}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}=\{-i,i\}.$$

Acest lucru explică pe de o parte de ce $\sqrt{-1}$ nu este cea mai bună notaţie pentru i, iar pe de altă parte explică paradoxul $1=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=i\cdot i=-1$. De fapt, datorită faptului că funcţia putere este multivocă, proprietăţi ale puterilor care aveau loc în cazul real nu au loc în general în cazul complex: de exemplu $z^\alpha\cdot w^\alpha\neq(z\cdot w)^\alpha$ şi $(z^\alpha)^\beta\neq z^{\alpha\cdot\beta}$.

6.28 Exemplu. Cât este i^i?

Conform definiţiei $i^i=e^{i\cdot\mathrm{Log}\,i}$. Pentru a vedea cât este $\mathrm{Log}\,i$, calculăm modulul şi argumentul lui $z=i$: $|z|=1$ şi $\arg z=\frac{\pi}{2}$. Rezultă că
$\mathrm{Log}\,i=\{\ln 1+i(\pi/2+2k\pi)\}=\left\{i\frac{\pi}{2}(4k+1)\right\}$ şi

$$i^i=e^{i\cdot\mathrm{Log}\,i}=e^{i\cdot(i\frac{\pi(4k+1)}{2})}=\left\{e^{-\frac{\pi(4k+1)}{2}},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Am obţinut că i^i este o mulţime de numere reale.

6.29 Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $\cos z=-2$ în $\mathbb{C}$.

În mulţimea numerelor reale această ecuaţie nu are nici o soluţie, dar în mulţimea numerelor complexe are o infinitate. Să arătăm lucrul acesta. Pornind de la egalitatea $\cos z=(e^{iz}+e^{-iz})/2$ şi notând $w=e^{iz}$ obţinem ecuaţia $w^2+4w+1=0$. Cele două soluţii ale ecuaţiei sunt $w_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$. Luând pe rând avem $e^{iz}=-2+\sqrt{3}$. Rezultă $iz\in\mathrm{Log}(-2+\sqrt{3})=\left\{\ln|-2+\sqrt{3}|+i(\arg(-2+\sqrt{3})+2k\pi)\right\}$. Înmulţind cu $-i$ se obţine prima infinitate de soluţii

$$z\in\left\{-i\ln(2-\sqrt{3})+\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Analog pentru cazul $e^{iz}=-2-\sqrt{3}$ se obţine

$$z\in\left\{-i\ln(2+\sqrt{3})+\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Reuniunea celor două mulţimi obţinute constituie soluţia ecuaţiei date.

6.30 Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $z^3=i$.

Scriem $z=i^{\frac{1}{3}}$ şi folosim funcţia putere.

$$i^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}\cdot\mathrm{Log}\,i}=e^{\frac{1}{3}\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}.$$

Pentru $k = 0$ rezultă $z_0 = e^{\frac{\pi i}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
Pentru $k = 1$ rezultă $z_1 = e^{\frac{5\pi i}{6}} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.
Pentru $k = 2$ rezultă $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$. Datorită periodicităţii funcţiei sinus şi cosinus, acestea sunt singurele soluţii:

$$z \in \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -i \right\}.$$