Curs 7

Derivata şi integrala funcţiilor complexe

7.1 Mulţimi deschise

7.1 Definiţie. *Discul deschis cu centrul în a şi de rază r este mulţimea notată*

$$D(a,r) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r \,\}.$$

7.2 Definiţie. *O mulţime $G \subseteq \mathbb{C}$ se numeşte* **deschisă** *dacă pentru orice $z \in G$ există un număr real $r > 0$ astfel încât $D(z,r) \subseteq G$.*

7.3 Exemplu. Discul $D(z,r)$ este mulţime deschisă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Într-adevăr, luând $w \in D(z,r)$ şi alegând $\rho = r - |w-z| > 0$, discul $D(w,\rho)$ este inclus în $D(z,r)$. Pentru a demonstra acest lucru, fie $u \in D(w,\rho)$. Arătăm că $u \in D(z,r)$. Avem

$$|z-u| \le |z-w| + |w-u| < |z-w| + \rho = |z-w| + r - |w-z| = r.$$

Mulţimea $\{\, a \,\}$ nu este deschisă, pentru că ar însemna că există un disc $D(a,r)$ $(r > 0)$ inclus în $\{\, a \,\}$, ceea ce e imposibil.

7.2 Limita unei funcţii complexe într-un punct

7.4 Definiţie. *Fie $G \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f : G \to \mathbb{C}$ şi $a \in G$. Vom spune că funcţia f* **are limita** *$\ell \in \mathbb{C}$ în punctul a şi vom nota*

$$\lim_{z\to a} f(z) = \ell.$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $z \in G$ cu $0 < |z-a| < \delta$ să avem $|f(z) - \ell| < \varepsilon$.

7.5 Exemplu. Funcţia $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = z^2$ are limita 4 în punctul $z = 2$, pentru că, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $z \in \mathbb{R}$ cu $0 < |z-2| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$ are loc

$$|f_1(z) - 4| = \left|z^2 - 4\right| = |z-2|\,|z+2| \le |z-2| \cdot (|z-2| + 4) < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon.$$

7.6 Observaţie. Limita unei funcţii într-un punct este unică.

7.7 Propoziţie. *Fie $f, g : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi a un punct al mulţimii deschise G. Dacă*

$$\lim_{z\to a} f(z) = A \quad \text{şi} \quad \lim_{z\to a} g(z) = B$$

atunci

$$\lim_{z\to a}[f(z) \pm g(z)] = A \pm B$$
$$\lim_{z\to a}[f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B$$
$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \qquad \text{dacă } B \neq 0.$$

7.3 Funcţii continue

7.8 Definiţie. *Fie $G \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f : G \to \mathbb{C}$ şi $a \in G$. Funcţia f este* **continuă în punctul** *a, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât dacă $z \in G$ şi $|z - a| < \delta$, atunci $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$. Vom spune că f este* **continuă pe mulţimea** *G dacă f este continuă în fiecare punct al mulţimii G.*

7.9 Observaţie. Proprietatea de continuitate a funcţiei f în punctul a, se rescrie

$$\lim_{z\to a} f(z) = f(a) = f\left(\lim_{z\to a} z\right).$$

7.10 Propoziţie (Compunerea funcţiilor continue). *Fie $G \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă, $f :\to \mathbb{C}$, $g : f(G) \to \mathbb{C}$ şi $a \in G$. Dacă f este continuă în a şi g este continuă în $f(a)$, atunci $h : G \to \mathbb{C}$ definită prin $h(z) = g(f(z))$ este continuă în a.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din

$$\lim_{z\to a} h(z) = \lim_{z\to a} f(g(z)) = f(\lim_{z\to a} g(z)) = f(g(\lim_{z\to a} z)) = f(g(a)) = h(a).$$

□

7.11 Propoziţie. *Fie $f, g : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şi $a \in G$. Dacă f şi g sunt continue în a atunci şi $f + g$, $f \cdot g$ sunt continue în a. Dacă $g(a) \neq 0$ atunci funcţia cât f/g este continuă în a.*

7.12 Exemplu. Funcţia constantă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = c$ şi funcţia identică $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{C}$. Aplicând Propoziţia 7.11 deducem că şi $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ este continuă pe $\mathbb{C}$.

7.4 Funcţii olomorfe

7.13 Definiţie. *O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ definită pe o mulţime deschisă $G \subset \mathbb{C}$ este* **derivabilă** *într-un punct $z \in G$ dacă există şi este finită limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Această limită se numeşte **derivata** *funcţiei f în z şi se notează $f'(z)$.*

7.14 Observaţie. O funcţie $f : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabilă într-un punct se mai numeşte ***monogenă*** în acel punct. Această denumire de funcţie monogenă se foloseşte uneori pentru a face distinţia dintre o funcţie complexă de variabilă complexă care este derivabilă şi o funcţie complexă de variabilă reală derivabilă. Când se doreşte această distincţie, denumirea de funcţie derivabilă este rezervată funcţiilor complexe de variabilă reală.

7.15 Definiţie. *O funcţie $f : G \to \mathbb{C}$ este* **olomorfă** *într-un punct $z \in G$ dacă există un disc $D(z, r) \subset G$ astfel încât f să fie derivabilă în orice punct al discului $D(z, r)$. Spunem că f este olomorfă pe mulţimea D dacă f este olomorfă în fiecare punct al mulţimii D. Cu alte cuvinte f este olomorfă pe D dacă f este olomorfă pe o mulţime deschisă G care conţine mulţimea D.*

7.16 Notaţie. Mulţimea funcţiilor olomorfe pe mulţimea D se notează $\mathcal{H}(D)$.

7.17 Teoremă. *Fie $f : G \to \mathbb{C}$ şi $z = x + iy \in G$ şi fie $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ unde u şi v sunt funcţii reale de variabile reale definite pe G.*

Dacă f este derivabilă în z atunci funcţiile u şi v au derivate parţiale în punctul (x, y) şi sunt satisfăcute **condiţiile Cauchy-Riemann**

$$u'_x = v'_y \quad \text{şi} \quad u'_y = -v'_x.$$

Reciproc, dacă u şi v sunt funcţii diferenţiabile în punctul (x, y) şi sunt satisfăcute condiţiile Cauchy-Riemann atunci f este derivabilă în $x + iy$.

Demonstraţie. Dacă f este derivabilă în punctul $z = x + iy$ atunci există limita şi este finită

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}.$$

Fie $h = h_1 + ih_2$. Atunci

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y)}{h_1 + ih_2} + i\,\frac{v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y)}{h_1 + ih_2}.$$

Dacă luăm $h_2 = 0$ şi $h_1 \to 0$ atunci

$$f'(z) = \lim_{h_1 \to 0} \left(\frac{u(x + h_1, y) - u(x, y)}{h_1} + i\,\frac{v(x + h_1, y) - v(x, y)}{h_1} \right).$$

Acest lucru ne arată că există şi sunt finite limitele

$$\lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x + h_1, y) - u(x, y)}{h_1} \quad \text{şi} \quad \lim_{h_1 \to 0} \frac{v(x + h_1, y) - v(x, y)}{h_1}.$$

Dar aceasta înseamnă că există şi sunt finite u'_x şi v'_x şi avem

$$f'(z) = u'_x + iv'_x.$$

Dacă luăm $h_1 = 0$ şi $h_2 \to 0$ atunci

$$f'(z) = \lim_{h_2 \to 0} \left(\frac{u(x, y + h_2) - u(x, y)}{ih_2} + i\,\frac{v(x, y + h_2) - v(x, y)}{ih_2} \right).$$

Acest lucru ne arată că există şi sunt finite limitele

$$\lim_{h_2 \to 0} \frac{u(x, y + h_2) - u(x, y)}{h_2} \quad \text{şi} \quad \lim_{h_2 \to 0} \frac{v(x, y + h_2) - v(x, y)}{h_2}.$$

Dar aceasta înseamnă că există şi sunt finite u'_y şi v'_y şi avem

$$f'(z) = -iu'_y + v'_y.$$

Egalând acum $u'_x + iv'_x = f'(z) = -iu'_y + v'_y$ se obţin condiţiile Cauchy-Riemann.

Să presupunem acum că u şi v sunt diferenţiabile în punctul (x, y) şi sunt verificate condiţiile Cauchy-Riemann. Din definiţia diferenţiabilităţii funcţiilor u şi v avem

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = u'_x \cdot h_1 + u'_y \cdot h_2 + \alpha_1(x, y, h_1, h_2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$
$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = v'_x \cdot h_1 + v'_y \cdot h_2 + \alpha_2(x, y, h_1, h_2) \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

unde α_1 şi α_2 sunt funcţii cu proprietatea că

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \alpha_1(x, y, h_1, h_2) = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \alpha_2(x, y, h_1, h_2) = 0.$$

Putem scrie

$$\begin{aligned}
\frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y)}{h_1 + ih_2} + i\,\frac{v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y)}{h_1 + ih_2} \\
&= \frac{u'_x \cdot h_1 + u'_y \cdot h_2 + i(v'_x \cdot h_1 + v'_y \cdot h_2)}{h_1 + ih_2} + \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)|h|}{h_1 + ih_2} \\
&= \frac{u'_x \cdot (h_1 + ih_2) + v'_x \cdot (-h_2 + ih_1)}{h_1 + ih_2} + \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)|h|}{h_1 + ih_2} \\
&= u'_x + iv'_x + (\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot \frac{|h|}{h}.
\end{aligned}$$

Din faptul că

$$\left|(\alpha_1(x, y, h_1, h_2) + i\alpha_2(x, y, h_1, h_2)) \cdot \frac{|h|}{h}\right| \le |\alpha_1(x, y, h_1, h_2| + |\alpha_2(x, y, h_1, h_2)| \to 0$$

rezultă că limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

există şi este egală cu

$$f'(z) = u'_x + iv'_x.$$

□

7.18 Exemplu. Să se arate că funcţia $f(z) = e^z$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi $(e^z)' = e^z$.

Pentru $z = x + iy$ avem $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$. Dacă scriem $f = u + iv$ atunci prin identificare $u(x, y) = e^x \cos y$ şi $v(x, y) = e^x \sin y$. Pentru că au loc egalităţile $u'_x = e^x \cos y = v'_y$ şi $u'_y = -e^x \sin y = -v'_x$, condiţiile Cauchy-Riemann sunt verificate pentru orice punct (x, y), ceea ce ne arată că f este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Derivata funcţiei f va fi

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

7.19 Exemplu. Funcţia $f(z) = |z|^2$ este diferenţiabilă în $z = 0$ dar nu este olomorfă în nici un punct.

Dacă scriem $f = u + iv$ avem $u(x, y) = x^2 + y^2$ şi $v(x, y) = 0$ ceea ce ne arată că $u'_x = 2x$, $v'_y = 0$, $u'_y = 2y$ şi $v'_x = 0$. Condiţiile Cauchy-Riemann sunt verificate doar în punctul $(0, 0)$, ceea ce ne arată că f este derivabilă în $z = 0$ fără să fie olomorfă. Olomorfia funcţiei f în origine presupune existenţa unui disc cu centru în origine unde f să fie derivabilă. Dar cum f este derivabilă doar în origine, nu există un astfel de disc, deci f nu este olomorfă.

7.20 Observaţie. Dacă f este derivabilă într-un punct z, atunci derivata $f'(z)$ poate fi exprimată prin oricare din următoarele formule

$$\begin{aligned} f'(z) &= u'_x + iv'_x \\ f'(z) &= v'_y - iu'_y \\ f'(z) &= u'_x - iu'_y \\ f'(z) &= v'_y + iv'_x. \end{aligned}$$

7.21 Observaţie. Înlocuind $x = (z + \overline{z})/2$ şi $y = (z - \overline{z})/(2i)$ obţinem

$$f(z) = u\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + iv\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}\right).$$

Aceasta ne arată că putem privi funcţia f ca funcţie de variabilele independente z şi $\overline{z}$. Dacă u şi v au derivate parţiale de ordinul întâi atunci

$$\begin{aligned} f'_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}u'_x + \frac{i}{2}u'_y + \frac{i}{2}v'_x - \frac{1}{2}v'_y = \frac{1}{2}\left(u'_x - v'_y\right) + \frac{i}{2}\left(u'_y + v'_y\right) \\ f'_z &= \frac{1}{2}u'_x - \frac{i}{2}u'_y + \frac{i}{2}v'_x + \frac{1}{2}v'_y = \frac{1}{2}\left(u'_x + v'_y\right) + \frac{i}{2}\left(v'_x - u'_y\right). \end{aligned}$$

Dacă f este derivabilă în z atunci

$$f'_{\overline{z}} = 0 \quad \text{şi} \quad f'_z = f'(z).$$

7.22 Observaţie. Deoarece definiţia derivabilităţii unei funcţii complexe într-un punct este aceeaşi ca şi în cazul real, toate regulile de derivare din cazul real rămân adevărate şi în cazul funcţiilor de variabilă complexă. Astfel de exemplu $(z^2)' = 2z$.

7.23 Observaţie. Dacă f este o funcţie derivabilă şi $f = u + iv$ atunci u şi v sunt funcţii armonice. Pentru demonstraţie vom presupune că u şi v au derivate parţiale de ordinul al doilea mixte continue (se va vedea mai târziu că această presupunere nu este o restricţie). Derivând condiţiile Cauchy-Riemann, prima în raport cu x şi a doua în raport cu y obţinem $u''_{x^2} = v''_{yx}$ şi $u''_{y^2} = -v''_{xy}$. Adunând aceste relaţii şi ţinând cont că derivatele mixte sunt egale rezultă

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

ceea ce ne arată că u este funcţie armonică. La fel se arată că $v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0$.

7.24 Observaţie. Dacă f este olomorfă pe o mulţime G deschisă şi se cunoaşte partea reală sau partea imaginară atunci f este perfect determinată făcând abstracţie de o constantă.

7.25 Exemplu. Să se determine funcţia olomorfă f pentru care $\operatorname{Im} f = 3x^2y - y^3 - x$.

Fie $v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x$. Se poate arăta că v este armonică. Derivata funcţiei f este

$$f'(z) = v'_y + iv'_x = 3x^2 - 3y^2 + i(6xy - 1).$$

Luând $x = z$ şi $y = 0$ rezultă $f'(z) = 3z^2 - i$. Prin integrare $f(z) = z^3 - iz + C$.

7.26 Exemplu. Să se determine funcţia olomorfă f pentru care $\operatorname{Re} f = \varphi(x^2+y^2)$, unde φ este o funcţie de două ori derivabilă.

Fie $u = \varphi(x^2+y^2)$. Avem $u'_x = \varphi'(x^2+y^2)\cdot 2x$ şi $u'_y = \varphi'(x^2+y^2)\cdot 2y$. Derivatele de ordinul doi sunt $u''_{x^2} = \varphi''(x^2+y^2)\cdot 4x^2 + \varphi'(x^2+y^2)\cdot 2$ şi $u''_{y^2} = \varphi''(x^2+y^2)\cdot 4y^2 + \varphi'(x^2+y^2)\cdot 2$. Pentru că u este armonică rezultă că $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$. Aceasta revine la

$$4(x^2+y^2)\cdot\varphi''(x^2+y^2) + 4\varphi'(x^2+y^2) = 0.$$

Notând $r = x^2+y^2$ rezultă ecuaţia diferenţială $r\cdot\varphi''(r)+\varphi'(r) = 0$. Dacă notăm cu $\psi(r) = \varphi'(r)$ obţinem ecuaţia liniară de ordinul întâi $\psi'(r) + \frac{1}{r}\psi(r) = 0$. Înmulţind toată egalitatea cu $e^{\int \frac{1}{r}\,\mathrm{d}r} = e^{\ln r} = r$ obţinem

$$(r\cdot\psi(r))' = 0 \iff \psi(r) = \frac{C_1}{r} \iff \varphi(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Am obţinut că $u(x,y) = C_1 \ln(x^2+y^2) + C_2$. Derivata funcţiei f este

$$f'(z) = u'_x - iu'_y = \frac{C_1 2x}{x^2+y^2} - i\frac{C_1 2y}{x^2+y^2} = \frac{2C_1}{z}.$$

Rezultă prin integrare $f(z) = 2C_1 \operatorname{Log} z + C$, unde $C_1 \in \mathbb{R}$ şi $C \in \mathbb{C}$.

7.5 Integrala unei funcţii complexe

7.27 Definiţie. *Fie C o curbă din planul complex. O funcţie $f : C \to \mathbb{C}$ se va numi* **integrabilă pe curba** *C dacă există integralele curbilinii de speţa a doua*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\,\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x.$$

7.28 Propoziţie. *Dacă C este o curbă netedă cu parametrizarea $z = z(t)$, $t \in [a,b]$ şi f este o funcţie continuă pe C, atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

7.29 Observaţie. Din definiţie rezultă următoarele proprietăţi ale integralei complexe:

$$\int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{BA} f(z)\,\mathrm{d}z$$
$$\int_C [af(z)+bg(z)]\,\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + b\int_C g(z)\,\mathrm{d}z$$
$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1\cup C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

7.30 Propoziţie. *Dacă f este o funcţie integrabilă pe o curbă netedă C, atunci*

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{z\in C}|f(z)|\cdot\ell(C).$$

Demonstraţie. Fie $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, o parametrizare a curbei C.

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(z(t))| \cdot |z'(t)|\ \mathrm{d}t \leq \sup_{z\in C} |f(z)| \cdot \ell(C),$$

pentru că

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b |z'(t)|\ \mathrm{d}t$$

reprezintă lungimea curbei C. □

7.31 Exemplu. Să se calculeze $\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z$, unde C este cercul cu centrul în a şi de rază r, parcurs în sens direct, iar n este un număr întreg.

O reprezentare în $\mathbb{C}$ a cercului $|z - a| = r$ este

$$z(t) = a + re^{it},\ \ t \in [0, 2\pi].$$

Avem $z'(t) = ire^{it}$ şi prin urmare

$$\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it}\,\mathrm{d}t = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Dacă $n = -1$ obţinem

$$\int_C \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = i \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi i,$$

iar pentru $n \neq -1$ avem

$$\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = ir^{n+1} \left.\frac{e^{it(n+1)}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

7.32 Teoremă (Teorema lui Cauchy)**.** *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi C o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni inclusă în D. Dacă f este olomorfă pe D şi integrabilă pe curba C atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Demonstraţie. Avem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y + i \int_C v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Folosind condiţiile Cauchy-Riemann, cele două integrale sunt independente de drum. Fiindcă C este închisă, rezultă

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

7.33 Observaţie. Fie D o mulţime deschisă simplu conexă şi C_1 şi C_2 două curbe închise situate în D, astfel încât C_2 se află în domeniul mărginit de C_1. Dacă f este o funcţie olomorfă în domeniul mărginit de cele două curbe atunci

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

curbele fiind parcurse în sens direct.

Fie $A \in C_1$ şi $B \in C_2$. Fie Γ curba închisă formată din arcul de curbă de pe C_1 parcurs de la A până la A în sens direct, la care adăugăm segmentul AB parcurs de la A la B, apoi arcul de pe C_2 parcurs în sens invers de la B până la B şi apoi segmentul BA parcurs de la B la A. Mulţimea delimitată de această curbă Γ este simplu conexă, iar f este olomorfă pe acestă mulţime. Conform Teoremei lui Cauchy, $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Pe de altă parte, folosind aditivitatea integralei

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{AB} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Cu aceasta, observaţia făcută este demonstrată.

7.34 Teoremă (Formula integrală a lui Cauchy)**.** *Fie f o funcţie olomorfă în domeniul simplu conex D şi fie C o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni din D, care înconjoară un punct de afix a. Atunci*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Demonstraţie. Punctul a este în interiorul domeniului mărginit de curba C deci există un disc $D(a,r)$ inclus în acest domeniu. Fie $\varepsilon < r$ un număr real pozitiv. Deoarece funcţia $z \longmapsto \frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă pe domeniul mărginit de curba C şi cercul $|z-a| = \varepsilon$, conform observaţiei precedente rezultă

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Pentru că

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a)\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = f(a)2\pi i,$$

rămâne de arătat că

$$\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dar

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})-f(a)}{\varepsilon e^{it}}\cdot \varepsilon i e^{it}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le 2\pi \cdot \sup_{t\in[0,2\pi)} \left|f(a+\varepsilon e^{it})-f(a)\right|.\end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$ şi ţinând cont de continuitatea funcţiei f rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[0,2\pi)} \left|f(a+\varepsilon e^{it})-f(a)\right| = 0,$$

ceea ce demonstrează formula lui Cauchy. □

7.35 Observaţie. Formula integrală a lui Cauchy ne arată că dacă f este o funcţie olomorfă pe un domeniu D atunci cunoaşterea valorilor funcţiei pe o curbă închisă este suficientă pentru a determina valoarea ei în orice punct din domeniul mărginit de această curbă.

7.36 Teoremă (Formula lui Cauchy pentru derivată)**.** *Fie f o funcţie olomorfă pe un domeniu simplu conex D şi fie C o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni inclusă în D. Atunci există derivata de orice ordin a funcţiei f într-un punct a interior domeniului mărginit de curba C şi*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie matematică. Pentru $n = 0$ formula este adevărată. Presupunem formula adevărată pentru n şi o demonstrăm pentru $n+1$. Punctul a fiind interior domeniului mărginit de curbă există un disc $D(a, r)$ inclus în acest domeniu. Fie $h \in \mathbb{C}$ astfel încât $|h| < r$. Avem

$$f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C f(z) \left[\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \right] \mathrm{d}z.$$

Demonstrăm că

$$F(h) = \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h} - \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}} \mathrm{d}z$$

tinde la zero atunci când h tinde la zero şi cu aceasta teorema este demonstrată. Funcţia $F(h)$ se poate scrie

$$F(h) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C f(z) \cdot \left[\frac{(z-a)^{n+1} - (z-a-h)^{n+1}}{h(z-a-h)^{n+1}(z-a)^{n+1}} - \frac{n+1}{(z-a)^{n+2}} \right] \mathrm{d}z.$$

Folosind faptul că

$$\begin{aligned}
&\frac{w^{n+1} - v^{n+1}}{(w-v)v^{n+1}w^{n+1}} - \frac{n+1}{w^{n+2}} \\
&= \frac{w^n + w^{n-1}v + \cdots + v^n}{v^{n+1}w^{n+1}} - \frac{n+1}{w^{n+2}} \\
&= \frac{w^{n+1} + w^n v + \cdots + wv^n - (n+1)v^{n+1}}{v^{n+1}w^{n+2}} \\
&= \frac{(w^{n+1} - v^{n+1}) + (w^n v - v^{n+1}) + \cdots + (wv^n - v^{n+1})}{v^{n+1}w^{n+2}} \\
&= (w-v) \cdot \frac{(w^n + w^{n-1}v + \cdots + v^n) + v(w^{n-1} + w^{n-2}v + \ldots v^{n-1}) + \cdots + v^n}{v^{n+1}w^{n+2}} \\
&= (w-v) \cdot \frac{w^n + 2w^{n-1}v + 3w^{n-2}v^2 + \cdots + (n+1)v^n}{v^{n+1}w^{n+2}}
\end{aligned}$$

şi considerând $\delta = \min_{z \in C}(|z-a-h|, |z-a|) > 0$ rezultă

$$|F(h)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C |f(z)| \cdot |h| \cdot \frac{1 + 2 + \cdots + (n+1)}{\delta^{n+3}} \mathrm{d}s \leq \frac{(n+2)!}{4\pi\delta^{n+3}} \ell_C \sup_{z \in C} |f(z)| \cdot |h|.$$

De aici rezultă $\lim_{h \to 0} F(h) = 0$. □

7.37 Observaţie. Formula lui Cauchy pentru derivate ne arată că o funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă are derivate de orice ordin pe acea mulţime.