Curs 8

Serii Laurent

8.1 Şiruri de numere complexe

8.1 Definiţie. *Se numeşte* **şir de numere complexe** *orice funcţie* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

8.2 Notaţie. Pentru $n \in \mathbb{N}$ numărul $z(n)$ se notează z_n. Acesta se numeşte termenul de rang n al şirului z. Pentru şirul z vom folosi notaţia $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau prescurtat (z_n). Uneori, pentru a descrie şirul z, vom enumera termenii săi: z_0, z_1, $z_2, \ldots$.

8.3 Exemplu. 1) şirul (z_n) format din $0, 0, 0, \ldots$ este şirul constant care are toţi termenii egali cu 0. Putem scrie $z_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2) şirul (z_n) definit prin relaţia $z_n = i^n$, $n \in \mathbb{N}$ este şirul puterilor lui i. Dacă enumerăm primii termeni, aceştia sunt: $1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots$.

8.4 Observaţie. Două şiruri $x, y : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ vor fi egale dacă $x_n = y_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Este posibil să avem şiruri definite prin relaţii diferite care sunt egale. De exemplu, şirurile $x_n = (-1)^n$ şi $y_n = (-1)^{n^2}$ sunt egale, pentru că $x_{2n} = y_{2n} = 1$ şi $x_{2n+1} = y_{2n+1} = -1$.

8.5 Definiţie. *Fie (z_n) un şir de numere complexe. Şirul se numeşte* **convergent** *dacă există $z \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $|z_n - z| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N$. Un şir se va numi* **divergent** *dacă nu este convergent.*

8.6 Notaţie. Dacă un şir (z_n) este convergent vom numi numărul $\ell \in \mathbb{C}$ limita şirului şi vom scrie $z_n \to \ell$ sau

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \ell.$$

8.7 Observaţie. Şirul (z_n) este convergent dacă există un număr complex ℓ cu proprietatea că în afara oricărui disc centrat în ℓ există doar un număr finit de termeni. Altfel spus orice disc centrat în ℓ conţine toţi termenii şirului, exceptând eventual un număr finit de termeni.

8.8 Exemplu. Să studiem convergenţa şirului (z_n) definit prin $z_n = z^n$, unde $z \in \mathbb{C}$.

Dacă $|z| > 1$, atunci inegalitatea

$$|z|^n = (1 + |z| - 1)^n \geq 1 + n(|z| - 1)$$

arată că (z_n) este nemărginit, ceea ce arată că (z_n) nu poate fi convergent.

Dacă $|z| = 0$ atunci $z = 0$ şi (z_n) este şirul constant $z_n = 0$, care este convergent. Considerăm acum cazul $0 < |z| < 1$. Atunci

$$\left(\frac{1}{|z|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|z|} - 1\right)^n \geq 1 + n\left(\frac{1}{|z|} - 1\right),$$

ceea ce este echivalent cu

$$|z|^n \leq \frac{1}{1 + n\left(\frac{1}{|z|} - 1\right)}, \qquad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Această inegalitate arată că (z_n) este convergent la 0.

Dacă $|z| = 1$, atunci avem două cazuri posibile: fie $z = 1$, fie $z \neq 1$. Dacă $z = 1$ atunci $z_n = 1$ este un şir convergent. Dacă $z \neq 1$ atunci demonstrăm că şirul (z_n) nu este convergent. Presupunem prin absurd că (z_n) converge la $a \in \mathbb{C}$. Atunci trecând la limită în egalitatea $z_{n+1} = z^{n+1} = z^n \cdot z = z_n \cdot z$, rezultă $a = a \cdot z$, adică $a(1 - z) = 0$. Pentru că $z \neq 1$, rezultă $a = 0$. Dar, pentru că $|z_n| = |z|^n = 1$ trebuie să avem $|a| = 1$, contradicţie.

8.9 Propoziţie. *Avem $z_n \to z$ dacă şi numai dacă $\operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z$ şi $\operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$.*

Demonstraţie. Fie $z_n = a_n + ib_n$ şi $z = a + ib$. Afirmaţia rezultă din relaţia

$$\max(|a_n - a|, |b_n - b|) \leq |z_n - z| = \sqrt{|a_n - a|^2 + |b_n - b|^2}.$$

□

8.10 Propoziţie. *Dacă $|z_n| \to r$ şi $\arg(z_n) \to t$, atunci $z_n \to r(\cos t + i \sin t)$.*

Demonstraţie. Fie $z_n = a_n + ib_n$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \cos(\arg z_n) = r \cos t \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} |z_n| \sin(\arg z_n) = r \sin t.$$

□

8.11 Exemplu. Să considerăm şirul $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, unde z este un număr complex. Să calculăm limita acestui şir.

Fie $z = a + bi$. Avem $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}$. Deoarece $1 + \frac{a}{n} \to 1$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 + \frac{a}{n} > 0$ pentru orice $n \geq n_0$. Forma trigonometrică a numărului complex $1 + z/n$ este

$$1 + \frac{z}{n} = r_n (\cos t_n + i \sin t_n)$$

unde $r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}$ şi $t_n = \operatorname{arctg} \frac{b}{a+n} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Folosind formula lui Moivre avem

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \left[\cos(nt_n) + i \sin(nt_n)\right].$$

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} r_n^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)} = e^a$$

$$\lim_{n\to\infty} \arg(z_n) = \lim_{n\to\infty} n \cdot t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nb}{a+n} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{b}{a+n}}{\frac{b}{a+n}}\right) = b$$

va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^a(\cos b + i \sin b) = e^z.$$

Acest lucru justifică formula pentru funcţia exponenţială complexă.

8.2 Serii de puteri

Seriile de numere complexe se definesc ca şi seriile de numere reale.

8.12 Definiţie. *Fie (z_n) un şir de numere complexe. Construim şirul sumelor parţiale*

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n.$$

Perechea de şiruri (z_n, s_n) se numeşte **serie** *cu termenul general z_n. Dacă şirul (s_n) este convergent atunci seria este* **convergentă** *şi limita*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

se va numi **suma seriei**. *Vom folosi aceeaşi notaţie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ şi pentru a desemna seria (z_n, s_n). Dacă seria de numere reale pozitive*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

este convergentă atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ se numeşte **absolut convergentă**.

8.13 Exemplu. Să considerăm seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Suma parţială

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

prin înmulţire cu z şi apoi scăzută din ea ne dă

$$s_n - zs_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n - (z + z^2 + \cdots + z^{n+1}) = 1 - z^{n+1}.$$

Pentru că $z^{n+1} \to 0$ când $|z| < 1$ rezultă $s_n(1-z) \to 1$, adică

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

8.14 Definiţie. *Fie (a_n) un şir de numere complexe şi a un număr complex. Se numeşte* **serie de puteri** *centrată în a seria*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

8.15 Observaţie. Notând $w = z - a$ seria devine centrată în origine. Pentru $z = a$ seria este convergentă.

8.16 Teoremă (Teorema lui Abel)**.** *Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ este convergentă într-un punct $z_0 \neq a$ atunci ea este absolut convergentă în discul $|z-a| < |z_0 - a|$ şi uniform convergentă în orice disc $|z-a| \leq r < |z_0 - a|$.*

Demonstraţie. Fiindcă z_0 este un punct de convergenţă al seriei rezultă că limita şirului $(a_n(z_0 - a)^n)$ este nulă, adică $\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-a)^n = 0$. De aici deducem că $(a_n(z_0-a)^n)$ este un şir mărginit: există $M > 0$ astfel încât $|a_n|\,|z_0-a|^n < M$. Fie z un punct oarecare din discul $|z-a| < |z_0-a|$. Atunci

$$|a_n|\,|z-a|^n \leq |a_n|\,|z_0-a|^n \cdot \left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n < M \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = Mq^n$$

unde $q = |z-a|/|z_0-a| < 1$. Seria cu termenul general Mq^n fiind convergentă, rezultă că seria cu termenul general $a_n(z-a)^n$ este absolut convergentă.

Dacă z aparţine discului $|z-a| \le r < |z_0-a|$ atunci $q \le r/|z_0-a|$. Fiindcă acest raport nu depinde de z şi fiindcă $r/|z_0-a| < 1$ atunci conform criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcţii, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ va fi uniform convergentă. □

8.17 Definiţie. *Fiind dată seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *se numeşte* **rază de convergenţă** *numărul* R *definit prin*

$$R = \sup\left\{ |z-a| \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z-a|^n \quad \textit{este convergentă} \right\}.$$

8.18 Observaţie. Raza de convergenţă ne arată că în interiorul cercului $|z-a| = R$ seria este absolut convergentă şi în exterior divergentă. În punctele de pe cerc seria poate fi convergentă sau divergentă. Dacă seria este convergentă doar în punctul $z = a$ atunci $R = 0$, dacă seria este convergentă în tot planul complex atunci $R = \infty$. Pentru calculul razei de convergenţă utilizăm formulele

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{sau} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

dacă limitele există.

8.19 Exemplu. Seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ are raza de convergenţă $R = 1$. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ are raza de convergenţă $R = \infty$.

8.20 Teoremă (Teorema lui Taylor)**.** *Dacă* f *este o funcţie olomorfă în discul* $D(a,r)$ *atunci există o unică serie de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *astfel încât*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \qquad \textit{pentru orice } z \textit{ din discul } |z-a| < r.$$

Fie C *este cercul* $|z-a| = \rho$ *şi* $0 < \rho < r$. *Atunci coeficienţii seriei sunt daţi de*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}u.$$

Demonstraţie. Fie z un punct din discul $D(a,r)$. Notăm $r_0 = |z-a|$ şi alegem un $\rho > 0$ cu proprietatea că $r_0 < \rho < r$. Conform formulei lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u-a|=\rho} \frac{f(u)}{u-z}\, \mathrm{d}u.$$

Pentru că $\frac{|z-a|}{|u-a|} = \frac{r_0}{\rho} < 1$ avem

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = \frac{1}{u-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{u-a} \right)^n.$$

Seria fiind uniform convergentă putem integra termen cu termen şi obţinem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{|u-a|=\rho} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}u.$$

Ţinând cont de formulele lui Cauchy pentru derivate avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

$\square$

8.21 Observaţie. Seriile Taylor în complex au aceeaşi formă ca şi în real. Astfel

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$$

dezvoltări valabile pentru orice $z \in \mathbb{C}$. De asemenea

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n$$

dezvoltări valabile pentru $|z| < 1$, pentru ramurile uniforme ale funcţiilor pentru care $\ln(1) = 0$ şi $1^\alpha = 1$.

8.22 Observaţie. Produsul a două serii se calculează prin

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Pentru a demonstra aceasta fie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{şi} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Folosind regula de derivare a lui Leibniz

$$(f(z)\cdot g(z))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(z) \cdot g^{(n-k)}(z) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z)}{(n-k)!}.$$

Pentru $z = 0$ obţinem

$$c_n = \frac{(fg)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

8.23 Exemplu. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctului 0 funcţia

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{1+z}.$$

Avem

$$e^{-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Folosind regula de înmulţire a seriilor $f(z) = \sum_{n=0} c_n z^{2n}$ unde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot (-1)^{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

8.3 Serii Laurent

8.24 Definiţie. *Se numeşte* **serie Laurent** *centrată în a o serie de forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

8.25 Observaţie. Pentru a determina domeniul de convergenţă scriem seria sub forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n},$$

prima serie din membrul drept numindu-se ***partea tayloriană*** iar cea de-a doua ***partea principală*** a seriei Laurent.

Partea tayloriană este convergentă în discul $|z-a| < R$, unde R este raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. Dacă notăm $1/(z-a)$ cu w atunci obţinem seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$ cu raza de convergenţă R_1. Ea va fi convergentă pe mulţimea $|w| < R_1$. Cu notaţia $r = 1/R_1$, partea principală a seriei Laurent este convergentă pentru $|z-a| > r$. Dacă $r < R$ atunci seria Laurent este convergentă în coroana circulară

$$D(a, r, R) = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, r < |z-a| < R \,\}.$$

8.26 Teoremă (Teorema lui Laurent)**.** *Fie f o funcţie olomorfă în $D(a, r, R)$. Atunci pentru orice z din coroana circulară avem*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

unde coeficienţii a_n se pot calcula cu formula

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}u,$$

C fiind un cerc $|z-a| = \rho$ cu $r < \rho < R$.

Demonstraţie. Fie z un punct de pe cercul $|z-a| = \rho$ cu $r < \rho < R$. Atunci există numerele R_1 şi R_2 cu proprietatea că $r < R_1 < \rho < R_2 < R$. Fie C_1 cercul $|z-a| = R_1$ şi C_2 cercul $|z-a| = R_2$. Atunci din formula integrală a lui Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,du - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du.$$

Dacă $u \in C_2$ avem $\frac{|z-a|}{|u-a|} = \frac{\rho}{R_2} < 1$ şi putem scrie

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = \frac{1}{u-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n.$$

Seria fiind uniform convergentă putem integra termen cu termen şi obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(u)}{u-z}\,du = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du.$$

Dacă $u \in C_1$ avem $\frac{|u-a|}{|z-a|} = \frac{R_1}{\rho} < 1$ şi

$$\begin{aligned}\frac{1}{u-z} &= \frac{-1}{z-u} = \frac{-1}{z-a-(u-a)} = \frac{-1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{u-a}{z-a}}\\ &= \frac{-1}{z-a}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{u-a}{z-a}\right)^m = -\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Prin integrare obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,du = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{-1}(z-a)^n\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du.$$

Pentru că funcţiile $\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}$ sunt olomorfe pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ pe coroana $D(a, r, R)$ putem scrie

$$\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du = \int_{C}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du = \int_{C_2}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du.$$

Din toate aceste relaţii obţinem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-a)^n\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du.$$

□

8.27 Observaţie. Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii olomorfe într-o coroană circulară este unică. Într-adevăr, să presupunem că

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n, \quad z \in D(a, r, R).$$

Atunci

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{(u-a)^{n+1}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(u-a)^k\,du\\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\int_C\frac{1}{(u-a)^{n-k+1}}\,du = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k\cdot\left\{\begin{array}{ll}0, & k\neq n\\ 2\pi i, & k=n\end{array}\right. = b_n.\end{aligned}$$

Această observaţie ne permite să dezvoltăm în serie Laurent funcţii complicate folosind dezvoltări în serii Taylor cunoscute.

8.28 Exemplu. Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 3\} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+3}$. Să se dezvolte în serie Laurent

a) în coroana $1 < |z| < 3$

b) pe mulţimea $|z| > 3$

c) în discul punctat $0 < |z-1| < 2$.

Funcţia f se poate scrie

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3},$$

cu $A = -1/2$ şi $B = 1/2$. Folosind formula seriei geometrice avem

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n, \quad |z| < 3$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z| > 1.$$

Atunci dezvoltarea de la a) este

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n, \quad 1 < |z| < 3.$$

Pentru punctul b) dezvoltarea lui $1/(z-1)$ rămâne valabilă, dar

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Atunci dezvoltarea pe mulţimea de la b) este

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

Scriem

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n,$$

şi obţinem

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} (z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 2.$$