Curs 9

Teorema reziduurilor

9.1 Puncte singulare

9.1 Definiţie. *Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte* **punct singular** *al funcţiei f dacă orice disc $D(a, r)$ conţine puncte în care funcţia f este olomorfă şi puncte în care funcţia f nu este olomorfă. Punctul a este* **punct singular izolat** *dacă f este olomorfă în cel puţin un disc punctat $D(a, r) \setminus \{ a \}$. Dacă f nu este olomorfă în nici un disc punctat cu centrul în a atunci a se numeşte* **punct singular neizolat**.

9.2 Observaţie. Conform Teoremei lui Laurent în jurul unui punct singular izolat funcţia f se poate dezvolta în serie Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

9.3 Definiţie. *Fie a un punct singular izolat al funcţiei f.*

a) dacă partea principală a seriei Laurent într-un disc punctat în a este nulă atunci a se numeşte **punct singular eliminabil***;*

b) dacă partea principală a seriei Laurent conţine un număr finit de termeni, adică f se scrie sub forma

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_{-m} \neq 0$$

atunci punctul a se numeşte **pol de ordinul** *m;*

c) dacă partea principală are o infinitate de termeni atunci a se numeşte **punct singular esenţial izolat**.

9.4 Exemplu. a) Punctul $z = 0$ este pentru funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ un punct singular eliminabil, pentru că dezvoltarea în serie Laurent este

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad |z| > 0,$$

partea principală fiind nulă. Observăm că $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. În general, dacă $z = a$ este punct singular eliminabil atunci există şi este finită limita $\lim_{z \to a} f(z)$.

b) Punctul $z=0$ este pentru funcţia $f(z)=\frac{e^z}{z^2\sin z}$ pol de ordin 3 pentru că

$$\begin{aligned}
f(z) &= e^z\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{\sin z}=\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots}\\
&=\frac{1}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots\right)}\\
&=\frac{1}{z^3}\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\left[1+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots\right)+\left(\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+\dots\right)^2+\dots\right]\\
&=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{3z}+\frac{1}{3}+\frac{13z}{90}+\dots
\end{aligned}$$

c) Punctul $z=0$ este punct singular esenţial izolat al funcţiei $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, pentru că partea principală a seriei Laurent

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}$$

are o infinitate de termeni.

d) Punctul $z=0$ este punct singular neizolat pentru funcţia $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$. Într-adevăr, punctele $z_k=\frac{1}{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}^*$ sunt poli simpli şi pentru că $z_k\to 0$ când $k\to\infty$ rezultă că în orice disc centrat în origine există o infinitate de puncte singulare ale funcţiei f.

9.2 Teorema reziduurilor

9.5 Definiţie. *Fie a un punct singular izolat al funcţiei f. Coeficientul a_{-1} din dezvoltarea în serie Laurent*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

se numeşte **reziduul funcţiei** *f relativ la punctul singular a şi se notează*

$$a_{-1}=Rez(f,a).$$

9.6 Observaţie. Coeficientul a_{-1} joacă un rol special între coeficienţii seriei Laurent, deoarece

$$\int_{|z-a|=r}(z-a)^n\,\mathrm{d}z=0,\quad n\neq -1\quad \text{şi}\quad \int_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z=2\pi i.$$

Atunci, integrând funcţia $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$ termen cu termen obţinem

$$\int_{|z-a|=r}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\cdot a_{-1}=2\pi i\cdot Rez(f,a).$$

Această formulă permite calculul unei integrale pe o curbă închisă (în particular un cerc) care conţine în domeniul mărginit de ea un singur punct singular izolat, prin cunoaşterea reziduului funcţiei f relativ la punctul singular.

9.7 Teoremă (Teorema reziduurilor a lui Cauchy)**.** *Fie f o funcţie olomorfă în interiorul domeniului mărginit de curba simplă, închisă, netedă pe porţiuni şi orientată pozitiv C, cu excepţia punctelor singulare $a_1,a_2,\dots a_m$. Atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{m}Rez(f,a_k).$$

Demonstraţie. Încercuim fiecare punct a_k cu câte un cerc C_k cu rază suficient de mică astfel încât domeniile mărginite de C_k să fie disjuncte şi conţinute în domeniul mărginit de C. Atunci din teorema lui Cauchy

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Rez(f, a_k).$$

□

9.8 Teoremă. *Dacă f este o funcţie olomorfă în interiorul domeniului mărginit de curba simplă, închisă, netedă pe porţiuni şi orientată pozitiv C, dar are un pol simplu în punctul z_0 care este un punct unghiular al curbei, unde semitangentele formează un unghi cu valoarea α măsurat în radiani în direcţia pozitivă a curbei. Atunci*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = (\pi - \alpha)i \cdot Rez(f, z_0).$$

Demonstraţie. Fie γ_ε arcul de cerc cu centrul în z_0 şi de rază $\varepsilon > 0$ care are extremităţile pe curba C şi este situat în interioul domeniului mărginit de curba C, iar sensul de parcurs este cel în care punctul z_0 este la dreapta. Fie z_1 originea şi z_2 extremitatea drumului γ_ε şi fie Γ_ε porţiunea din curba C aflată la stânga drumului γ_ε. Atunci $\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$ formează o curbă închisă, simplă, netedă pe porţiuni şi orientată pozitiv, care mărgineşte un domeniu unde f este olomorfă. Pe baza Teoremei lui Cauchy,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Să observăm că atunci când ε tinde la zero, curba Γ_ε tinde la C şi atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Fiindcă z_0 este un pol simplu al lui f, atunci

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z), \qquad \text{pentru } 0 < |z - z_0| < \varepsilon,$$

unde φ este o funcţie olomorfă în discul $|z - z_0| < \varepsilon$. Putem scrie

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1} \cdot \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_\varepsilon} \varphi(z)\,\mathrm{d}z.$$

Fie $z = z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [t_1(\varepsilon), t_2(\varepsilon)]$ o parametrizare a curbei γ_ε. Atunci

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} \varphi(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \max_{z \in \gamma_\varepsilon} |\varphi(z)| \cdot \varepsilon [t_2(\varepsilon) - t_1(\varepsilon)].$$

Funcţia φ fiind continuă pe mulţimea compactă γ_ε, va exista $M > 0$ cu proprietatea că $|\varphi(z)| < M$ pentru orice $z \in \gamma_\varepsilon$. În plus, $t_2(\varepsilon) - t_1(\varepsilon) < 2\pi$, ceea ce demonstrează că

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \varphi(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Cealaltă integrală va fi egală cu

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = \int_{t_1(\varepsilon)}^{t_2(\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it}\,\mathrm{d}t = i[t_2(\varepsilon) - t_1(\varepsilon)].$$

Pentru a vedea cât este limita din această expresie când ε tinde la zero, scriem

$$t_2(\varepsilon) - t_1(\varepsilon) = \arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0).$$

Dacă $z = z(u)$ este parametrizarea curbei C, iar $z_1 = z(u_1)$, $z_0 = z(u_0)$, $z_2 = z(u_2)$ cu $u_1 < u_0 < u_2$, atunci

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \arg(z_2 - z_0) = \lim_{u_2\to u_0} \arg[z(u_2) - z(u_0)] = \lim_{u_2\to u_0} \arg \frac{z(u_2) - z(u_0)}{u_2 - u_0} = \arg z'(u_0+)$$

şi

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \arg(z_1 - z_0) = \lim_{u_1\to u_0} \arg \frac{z(u_1) - z(u_0)}{u_0 - u_1} = \arg[-z'(u_0-)] = \pi + \arg z'(u_0-).$$

Ţinând cont că $\arg z'(u_0+) - \arg z'(u_0-) = \alpha$ obţinem că

$$\lim_{\varepsilon\to 0} [\arg(z_2 - z_0) - \arg(z_1 - z_0)] = \alpha - \pi.$$

Integrala pe γ_ε va tinde la

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = -i(\pi - \alpha)\cdot a_{-1} = -i(\pi - \alpha)\cdot \mathrm{Rez}(f, z_0),$$

ceea ce demonstrează că

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z - i(\pi - \alpha)\cdot \mathrm{Rez}(f, z_0) = 0.$$

□

9.9 Observaţie. Dacă a este pol de ordinul m pentru funcţia f atunci

$$Rez(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} [(z - a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

Acest lucru se poate demonstra plecând de la dezvoltarea

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Atunci $g(z) = (z - a)^m f(z)$ reprezintă o serie de puteri, iar a_{-1} reprezintă coeficientul lui $(z - a)^{m-1}$, care conform teoremei lui Taylor se poate calcula prin

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} [(z - a)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

9.10 Observaţie. 1. Dacă $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ cu g continuă în a şi $g(a) \neq 0$, iar h este olomorfă în jurul lui a şi $h(a) = 0$ şi $h'(a) \neq 0$, atunci reziduul funcţiei f se calculează prin

$$Rez(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Într-adevăr, din ipoteză rezultă că a este pol simplu şi atunci

$$Rez(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = \lim_{z\to a} g(z)\frac{z-a}{h(z)-h(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

2. Dacă $f(x) = \frac{g(x)}{h^2(x)}$ cu g continuă în a şi $g(a) \neq 0$, iar h este olomorfă în jurul lui a şi $h(a) = 0$ şi $h'(a) \neq 0$, atunci reziduul funcţiei f se calculează prin

$$Rez(f,a) = \frac{g'(a)}{[h'(a)]^2} - \frac{g(a)\cdot h''(a)}{[h'(a)]^3}.$$

În acest caz, a este pol dublu şi atunci

$$\begin{aligned}
Rez(f,a) &= \lim_{z\to a}[(z-a)^2 f(z)]' \\
&= \lim_{z\to a} \frac{[2(z-a)g(z) + (z-a)^2 g'(z)]\cdot h^2(z) - 2(z-a)^2 g(z)h(z)h'(z)}{[h(z)]^4} \\
&= \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^2 g'(z)}{h^2(z)} + \frac{2(z-a)g(z)}{h(z)} \cdot \frac{h(z)-(z-a)h'(z)}{[h(z)]^2} = \frac{g'(a)}{[h'(a)]^2} - \frac{g(a)\cdot h''(a)}{[h'(a)]^3}.
\end{aligned}$$

9.11 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{|z+i|=6} \frac{\mathrm{d}z}{z(e^z-1)}.$$

Punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}$ se obţin egalând numitorul cu 0. Ecuaţia $e^z - 1 = 0$ are soluţiile $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Aceasta înseamnă că $z = 0$ este pol de ordinul doi, iar $z_k = 2k\pi i$, $k \neq 0$ poli de ordinul 1. Dorim să vedem care din aceste puncte se găsesc în interiorul discului dat. Punem condiţia $|2k\pi i + i| < 6$. Aceasta este echivalent cu $|2k\pi + 1| < 6$, adică $-6 < 2k\pi + 1 < 6$. De aici $k \in \left(-\frac{7}{2\pi}, \frac{5}{2\pi}\right) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$.

Folosind Teorema reziduurilor avem

$$\int_{|z+i|=6} \frac{\mathrm{d}z}{z(e^z-1)} = 2\pi i\left(Rez(f,-2\pi i) + Rez(f,0)\right).$$

Punctul $z = -2\pi i$ este pol simplu şi se calculează prin

$$Rez(f,-2\pi i) = \lim_{z\to -2\pi i} \frac{1}{\left(z(e^z-1)\right)'} = \lim_{z\to -2\pi i} \frac{1}{e^z - 1 + ze^z} = -\frac{1}{2\pi i}.$$

Punctul $z = 0$ este pol dublu şi atunci se calculează cu formula

$$\begin{aligned}
Rez(f,0) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z-1}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1-ze^z}{(e^z-1)^2} \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{e^z - e^z - ze^z}{2(e^z-1)e^z} = \lim_{z\to 0}\frac{-z}{2(e^z-1)} = \lim_{z\to 0}\frac{-1}{2e^z} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Valoarea integralei va fi

$$\int_{|z+i|=6}\frac{\mathrm{d}z}{z(e^z-1)} = 2\pi i\left(-\frac{1}{2\pi i} - \frac{1}{2}\right) = -1 - \pi i.$$

9.12 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z.$$

Funcţia $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}$ are punctele singulare 0, -1, -2. Pentru că $|0+i| = 1 < 2$, $|-1+i| = \sqrt{2} < 2$ şi $|-2+i| = \sqrt{5} > 2$, doar 0 şi -1 se găsesc în interiorul cercului $|z+i| = 2$. Conform teoremei reziduurilor

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot [Rez(f,0) + Rez(f,-1)].$$

Punctul $z = -1$ este pol simplu şi $z = 0$ este punct singular esenţial izolat. Avem

$$Rez(f,-1) = \lim_{z\to -1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+2)} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Pentru a obţine reziduul funcţiei relativ la origine desfacem în fracţii simple

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2},$$

cu $A = 1$ şi $B = -1$ şi obţinem

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1} - \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+2}.$$

Acum dezvoltăm în serie Laurent fiecare din cele două fracţii. Ţinem cont de

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}, \quad |z| > 0 \\ \frac{1}{z+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1 \\ \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < 2 \end{aligned}$$

şi obţinem

$$\begin{aligned} f(z) = &\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)\cdot\left(1 - z + z^2 - z^3 + \dots\right) \\ &- \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} + \frac{z^2}{2^3} - \dots\right), \end{aligned}$$

dezvoltare valabilă în coroana circulară $0 < |z| < 1$. Coeficientul lui $1/z$ din această dezvoltare va fi

$$Rez(f,0) = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots\right) - \left(\frac{1}{1!\,2} - \frac{1}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} - \dots\right).$$

Ţinând cont de faptul că

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots = 1 - e^{-x}$$

rezultă

$$Rez(f,0) = 1 - e^{-1} - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e}.$$

Valoarea integralei este

$$\int_{|z+i|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)(z+2)}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{\sqrt{e}}.$$

9.13 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z,$$

unde C reprezintă curba simplă, închisă, parcursă în sens direct, formată din laturile triunghiului cu vârfurile -1, 1 şi $i\sqrt{3}$.

Triunghiul este echilateral, iar $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z-1)}$ are polii simpli $z = \pm i$ şi $z = 1$. Dintre aceste puncte singulare, $z = i$ se află în interiorul lui C, $z = -i$ se află în exterior, iar $z = 1$ este punct unghiular al curbei C, având unghiul dintre semitangente $\pi - \frac{\pi}{3}$. Atunci valoarea integralei este

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}(f,i) + \frac{\pi i}{3} \cdot \mathrm{Rez}(f,1) = \frac{\pi(1+i)}{2} + \pi i e^{\pi}.$$

9.3 Reziduul funcţiei la infinit

9.14 Definiţie. *Fie f o funcţie olomorfă în regiunea $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \,\}$ pentru un $R > 0$. Atunci, reziduul lui f la infinit se defineşte ca fiind*

$$\mathrm{Rez}(f,\infty) = -a_{-1},$$

unde a_{-1} este coeficientul lui $1/z$ din dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > R.$$

9.15 Propoziţie. *Fie f o funcţie olomorfă în regiunea $\{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \,\}$ pentru un $R > 0$. Atunci,*

$$\mathrm{Rez}(f,\infty) = -\,\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Demonstraţie. Fie h funcţia definită prin $h(z) = \frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right)$, care este olomorfă pe discul punctat $D(0,0,1/R) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1/R \,\}$. Atunci

$$h(z) = \frac{1}{z^2} \cdot f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_{-p} \cdot z^p, \quad 0 < |z| < \frac{1}{R}.$$

Se observă că a_{-1} este coeficientul lui $1/z$ din dezvoltarea lui h în serie Laurent, adică reziduul funcţiei h în 0. $\square$

9.16 Observaţie. Fie f o funcţie olomorfă în regiunea $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \}$ pentru un $R > 0$. Fie $0 < r < 1/R$ şi fie C cercul parametrizat prin $z = \frac{1}{r} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Atunci

$$\begin{aligned}
\operatorname{Rez}(f, \infty) &= -\operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 e^{2it}} \cdot f\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) rie^{it} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{r} e^{-it}\right) \frac{1}{r}(-i) e^{-it} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{-1}} f(z) \,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

9.17 Propoziţie. *Fie f o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C} \setminus \{ z_1, z_2, \ldots, z_n \}$. Atunci*

$$\operatorname{Rez}(f, z_1) + \operatorname{Rez}(f, z_2) + \cdots + \operatorname{Rez}(f, z_n) + \operatorname{Rez}(f, \infty) = 0.$$

Demonstraţie. Fie C cercul centrat în zero şi de rază $r > \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$. Atunci conform observaţiei anterioare,

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{-1}} f(z) \,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \,\mathrm{d}z.$$

Dar, conform teoremei reziduurilor,

$$\operatorname{Rez}(f, z_1) + \operatorname{Rez}(f, z_2) + \cdots + \operatorname{Rez}(f, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) \,\mathrm{d}z.$$

Prin adunarea relaţiilor, suma reziduurilor funcţiei adunată cu reziduul funcţiei la infinit are valoarea zero. □

9.18 Exemplu. Să se calculeze integrala

$$I = \int_{|z|=3} \frac{e^{\frac{3}{z}} z^{15}}{(z^2+4)^4 (z^3+4)^3 (z+5)} \,\mathrm{d}z.$$

Funcţia

$$f(z) = \frac{e^{\frac{3}{z}} z^{15}}{(z^2+4)^4 (z^3+4)^3 (z+5)}$$

are şase puncte singulare interioare cercului $|z| = 3$ şi punctul singular $z_7 = -5$ în exteriorul cercului $|z| = 3$. Atunci valoarea integralei este

$$I = \sum_{n=1}^{6} \operatorname{Rez}(f, z_n) = -\operatorname{Rez}(f, -5) - \operatorname{Rez}(f, \infty).$$

Dar $z = -5$ este pol simplu, deci

$$\operatorname{Rez}(f, -5) = \left. \frac{e^{\frac{3}{z}} z^{15}}{(z^2+4)^4 (z^3+4)^3} \right|_{z=-5} = \frac{e^{-\frac{3}{5}} \cdot 5^{15}}{29^4 \cdot 121^3}.$$

Reziduul funcţiei la infinit se calculează prin

$$\operatorname{Rez}(f, \infty) = -\operatorname{Rez}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = -\operatorname{Rez}\left(\frac{e^{3z} \cdot z^8 \cdot z^9 \cdot z}{z^{17}(1+4z^2)^4 (1+4z^3)^3 (1+5z)}, 0\right) = 0.$$

În concluzie,

$$I = -\frac{e^{-\frac{3}{5}} \cdot 5^{15}}{29^4 \cdot 121^3}.$$

9.4 Aplicaţii ale teoremei reziduurilor

9.4.1 Integrale din funcţii raţionale de funcţii trigonometrice

9.19 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(5+4\cos x)^2}.$$

Folosind paritatea funcţiei de sub integrală şi periodicitatea ei, se obţine

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(5+4\cos x)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(5+4\cos x)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(5+4\cos x)^2}$$

Cu notaţia $z = e^{ix}$, cosinusul se scrie $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$. Când x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, variabila z parcurge cercul $|z| = 1$. Fiindcă $\mathrm{d}z = ie^{ix}\,\mathrm{d}x = iz\,\mathrm{d}x$, integrala se transformă în

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(5+4\cos x)^2} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(5z+2z^2+2)^2}.$$

Ecuaţia $2z^2 + 5z + 2 = 0$ are rădăcinile $z_1 = -2$ şi $z_2 = -1/2$, dintre care doar cea de-a doua se găseşte în interiorul cercului $|z| = 1$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z\,\mathrm{d}z}{(5z+2z^2+2)^2} &= \frac{1}{2i}\cdot 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\left(f, -\frac{1}{2}\right)\\ &= \pi\left(\frac{z'}{[(2z^2+5z+2)']^2} - \frac{z(2z^2+5z+2)''}{[(2z^2+5z+2)']^3}\right)\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{5\pi}{27}.\end{aligned}$$

9.20 Exemplu. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x) = \frac{1}{3-\sin x}$.

Funcţia f este periodică de perioadă principală $T = 2\pi$. Atunci seria Fourier are forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)],$$

unde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru a calcula aceşti coeficienţi, notăm $e^{ix} = z$ şi avem

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}\,\mathrm{d}x}{3-\sin x} = \frac{2}{\pi}\int_{|z|=1} \frac{z^n}{6iz - z^2 + 1}\,\mathrm{d}z.$$

Rădăcinile ecuaţiei $z^2 - 6iz - 1 = 0$ sunt $z_1 = (3-2\sqrt{2})i$ şi $z_2 = (3+2\sqrt{2})i$, dintre care doar prima se află în interiorul cercului $|z| = 1$. Atunci

$$a_n + ib_n = \frac{2}{\pi}\cdot 2\pi i\cdot \frac{z^n}{6i-2z}\Bigg|_{z=(3-2\sqrt{2})i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n\cdot i^n.$$

Scriind $i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$ rezultă

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{2} \quad \text{şi} \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2})^n\sin\frac{n\pi}{2}.$$

9.4.2 Integrale din funcţii raţionale pe axa reală

9.21 Teoremă. *Fie* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ *cu* $a_n \neq 0$ *şi* $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$, *cu* $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ *şi* $b_m \neq 0$. *Presupunem că* $m \geq n+2$ *şi rădăcinile lui* Q, *notate* z_k $(1 \leq k \leq m)$, *nu se află pe axa reală. Atunci*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Rez}\left(\frac{P}{Q}, z_k\right).$$

Demonstraţie. Considerăm conturul format din semicercul C_R cu centrul în origine şi de rază R aflat în semiplanul superior şi segmentul $[-R, R]$ cu R suficient de mare încât toate rădăcinile lui Q se găsesc în interiorul cercului $|z| = R$. Conform Teoremei reziduurilor

$$\int_{C_R \cup [-R,R]} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Rez}(f, z_k).$$

Pe de altă parte,

$$\int_{C_R \cup [-R,R]} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Din condiţiile impuse asupra polinoamelor P şi Q, integrala pe axa reală a raportului P/Q este convergentă şi

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = ⨍_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Rămâne să demonstrăm că

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pentru aceasta, fie $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ o parametrizare a curbei C_R. Pentru R suficient de mare avem

$$\left|\int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{R\,|P(Re^{it})|}{|Q(Re^{it})|}\,\mathrm{d}t \leq \pi R \cdot \frac{|a_n|R^n + |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots |a_0|}{|b_m|R^m - |b_{m-1}|\,R^{m-1} - \cdots |b_0|}.$$

Fiindcă $m \geq n+2$, expresia din partea dreaptă tinde la zero când R tinde la infinit. □

9.22 Exemplu. Să se calculeze integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6 + x^3 + 1}.$$

Pentru că $x^9 - 1 = (x^3 - 1)(x^6 + x^3 + 1)$, rădăcinile ecuaţiei $x^6 + x^3 + 1 = 0$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^9 = 1$ din care se elimină rădăcinile ecuaţiei $x^3 = 1$. Cele şase rădăcini sunt $x_k = e^{\frac{2k\pi i}{9}}$, $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8$, dintre care primele trei au partea imaginară pozitivă. Rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6 + x^3 + 1} = 2\pi i \cdot \left[\mathrm{Rez}\,(f, x_1) + \mathrm{Rez}\,(f, x_2) + \mathrm{Rez}\,(f, x_4)\right].$$

Avem

$$\mathrm{Rez}\,(f, x_k) = \mathrm{Rez}\left(\frac{1}{x^6 + x^3 + 1}, x_k\right) = \mathrm{Rez}\left(\frac{x^3 - 1}{x^9 - 1}, x_k\right) = \frac{x_k^3 - 1}{9x_k^8} = \frac{x_k^4 - x_k}{9}.$$

Pentru că $x_k = x_1^k$ şi $x_1^9 = 1$ obţinem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^6 + x^3 + 1} &= \frac{2\pi i}{9} \cdot \left(x_1^4 - x_1 + x_1^8 - x_1^2 + x_1^{16} - x_1^4\right) = \frac{2\pi i}{9} \cdot \left(-x_1 + x_1^{-1} - x_1^2 + x_1^{-2}\right) \\ &= \frac{-2\pi i}{9}\left(e^{\frac{2\pi i}{9}} - e^{-\frac{2\pi i}{9}} + e^{\frac{4\pi i}{9}} - e^{-\frac{4\pi i}{9}}\right) = \frac{4\pi}{9}\left(\sin\frac{2\pi}{9} + \sin\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9} \cdot \cos\frac{\pi}{9}.\end{aligned}$$

9.4.3 Integrale din funcţii raţionale pe semiaxa reală pozitivă

9.23 Teoremă. *Fie $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$ cu $a_n \neq 0$ şi $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$, cu $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ şi $b_m \neq 0$. Presupunem că $m \geq n+2$ şi rădăcinile lui Q, notate z_k $(1 \leq k \leq m)$, nu se află pe semiaxa reală pozitivă. Atunci*

$$\int_0^\infty \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = -\sum_{k=1}^m \mathrm{Rez}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log z, z_k\right).$$

Demonstraţie. Vom face o tăietură de-a lungul părţii pozitive a axei reale şi considerăm conturul $C = C_R \cup C_- \cup C_\varepsilon \cup C_+$ format din

$C_R -$ cercul de rază suficient de mare $R > 0$ şi centru 0 parcurs trigonometric
$C_- -$ segmentul parcurs de la R la ε pe tăietura sudică a axei reale
$C_\varepsilon -$ cercul de rază suficient de mică $\varepsilon > 0$ şi centru 0 parcurs invers
$C_+ -$ segmentul parcurs de la ε la R pe tăietura nordică a axei reale.

Pe baza Teoremei reziduurilor,

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \log z\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^m \mathrm{Rez}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log z, z_k\right).$$

Pe de altă parte,

$$\int_C \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z - \int_\varepsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot (\ln x + 2\pi i)\,\mathrm{d}x - \int_{C_\varepsilon} \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \ln x\,\mathrm{d}x.$$

Trecem la limită cu $R \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$ şi rămâne să demonstrăm că

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Considerând $z = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrizarea cercului C_R, atunci $\log z = \ln R + it$ şi

$$\left|\int_{C_R} \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq 2\pi R \cdot \frac{|a_n|R^n + |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots |a_0|}{|b_m|R^m - |b_{m-1}|\,R^{m-1} - \cdots |b_0|} \cdot \sqrt{\ln^2 R + 4\pi^2}.$$

Condiţia $m \geq n+2$ asigură convergenţa integralei pe C_R la zero când R tinde la infinit.

Fie $z = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ o parametrizare a cercului C_ε. Fiindcă polinomul Q nu se anulează în origine, funcţia $f = P/Q$ este olomorfă în origine, deci mărginită într-o vecinătate a lui zero. Atunci există $M > 0$ astfel încât $|f(\varepsilon e^{it})| < M$, pentru orice $t \in [0, 2\pi]$. Atunci

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{P(z)\log z}{Q(z)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \varepsilon \cdot M \cdot \sqrt{\ln^2 \varepsilon + 4\pi^2}.$$

Termenul din partea dreaptă converge la zero când ε tinde la zero. □

9.24 Exemplu. Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6 + x^3 + 1}.$$

Pentru că $x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)$, rădăcinile ecuaţiei $x^6+x^3+1=0$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^9=1$ din care se elimină rădăcinile ecuaţiei $x^3=1$. Cele şase rădăcini sunt $x_k=e^{\frac{2k\pi i}{9}}$, $k=1,2,4,5,7,8$. Notând $f(z)=\frac{\log z}{z^6+z^3+1}$, avem

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+x^3+1}=-\operatorname{Rez}(f,x_1)-\operatorname{Rez}(f,x_2)-\operatorname{Rez}(f,x_4)-\operatorname{Rez}(f,x_5)-\operatorname{Rez}(f,x_7)-\operatorname{Rez}(f,x_8).$$

Calculăm reziduul lui f într-unul din polii simpli x_k.

$$\operatorname{Rez}(f,x_k)=\operatorname{Rez}\left(\frac{\log}{z^6+z^3+1},x_k\right)=\operatorname{Rez}\left(\frac{(z^3-1)\log z}{z^9-1},x_k\right)=\frac{(x_k^3-1)\log x_k}{9x_k^8}=\frac{x_k^4-x_k}{9}\cdot\frac{2k\pi i}{9}.$$

Pentru că

$$x_k^4-x_k=e^{\frac{5k\pi i}{9}}\left(e^{\frac{3k\pi i}{9}}-e^{-\frac{3k\pi i}{9}}\right)=2ie^{\frac{5k\pi i}{9}}\sin\frac{3k\pi}{9},$$

obţinem

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+x^3+1}&=\frac{4\pi}{81}\cdot\left(e^{\frac{5\pi i}{9}}\sin\frac{\pi}{3}+2e^{\frac{10\pi i}{9}}\sin\frac{2\pi}{3}+4e^{\frac{20\pi i}{9}}\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\&\quad+\frac{4\pi}{81}\cdot\left(5e^{\frac{25\pi i}{9}}\sin\frac{5\pi}{3}+7e^{\frac{35\pi i}{9}}\sin\frac{7\pi}{3}+8e^{\frac{40\pi i}{9}}\sin\frac{8\pi}{3}\right)\\&=\frac{2\pi\sqrt{3}}{81}\cdot\left(-e^{-\frac{4\pi i}{9}}-2e^{\frac{\pi i}{9}}-4e^{\frac{2\pi i}{9}}+5e^{-\frac{2\pi i}{9}}+7e^{-\frac{\pi i}{9}}+8e^{\frac{4\pi i}{9}}\right).\end{aligned}$$

Pentru că partea imaginară a expresiei din paranteză este

$$9\sin\frac{4\pi}{9}-9\sin\frac{2\pi}{9}-9\sin\frac{\pi}{9}=18\cos\frac{6\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}-9\sin\frac{\pi}{9}=0$$

şi partea reală este

$$7\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+5\cos\frac{\pi}{9}=6\cos\frac{4\pi}{9}+\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\right)+5\cos\frac{\pi}{9}=6\cos\frac{4\pi}{9}+6\cos\frac{\pi}{9}$$

obţinem

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^6+x^3+1}=\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}\left(\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{9}\right)=\frac{4\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}=\frac{4\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}.$$

9.4.4 Integrale din funcţii raţionale multiplicate cu sinus sau cosinus

9.25 Teoremă. *Fie $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ cu $a_n\neq 0$ şi $Q(z)=b_mz^m+\cdots+b_0$, cu $b_1,b_2,\ldots,b_m\in\mathbb{R}$ şi $b_m\neq 0$. Presupunem că $m\geq n+1$ şi notăm cu z_k rădăcinile lui Q $(1\leq k\leq m)$. Atunci, pentru $\omega>0$ are loc*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(z)}{Q(z)}\cdot\cos(\omega z)\,\mathrm{d}z=\operatorname{Re}\left[2\pi i\cdot\sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0}\operatorname{Rez}\left(\frac{P}{Q}e^{i\omega z},z_k\right)+\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z_k)=0}\operatorname{Rez}\left(\frac{P}{Q}e^{i\omega z},z_k\right)\right].$$

şi

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(z)}{Q(z)}\cdot\sin(\omega z)\,\mathrm{d}z=\operatorname{Im}\left[2\pi i\cdot\sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0}\operatorname{Rez}\left(\frac{P}{Q}e^{i\omega z},z_k\right)+\pi i\sum_{\operatorname{Im}(z_k)=0}\operatorname{Rez}\left(\frac{P}{Q}e^{i\omega z},z_k\right)\right].$$

Integralele se presupun convergente.

Demonstraţie. Este asemănătoare cazului când integrăm o funcţie raţională. Rămâne să arătăm că

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\omega z}\,\mathrm{d}z=0.$$

Avem

$$\left|\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\omega z}\,\mathrm{d}z\right|\le\int_0^\pi\frac{R\,|P(Re^{it})|}{|Q(Re^{it})|}e^{-R\omega\sin t}\,\mathrm{d}t\le R\cdot\frac{|a_n|R^n+|a_{n-1}|R^{n-1}+\cdots|a_0|}{|b_m|R^m-|b_{m-1}|\,R^{m-1}-\cdots|b_0|}\cdot\int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Pentru că $m\ge n+1$, este suficient să arătăm că

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t=0.$$

Dar,

$$\int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Notând $\pi-t=u$ în cea de-a doua integrală, obţinem

$$\int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

Folosind inegalitatea $\sin t\ge\frac{2t}{\pi}$, adevărată pentru orice $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, rezultă

$$\int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t\le2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2\omega Rt/\pi}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{\omega R}\left(1-e^{-\omega R}\right),$$

ceea ce demonstrează că

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi e^{-\omega R\sin t}\,\mathrm{d}t=0.$$

□

9.26 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Folosim conturul format din segmentul $[-R,R]$ şi semicercul Re^{it}, $t\in[0,\pi]$ şi rezultatul anterior. Integrala $\int_{-\infty}^\infty\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă în 0 şi la infinit în sensul valorii principale.

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\pi i\cdot\mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z},0\right)\right]=\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left[\pi i\cdot1\right]=\frac{\pi}{2}.$$

9.4.5 Integrale din funcţii raţionale multiplicate cu funcţia putere

9.27 Teoremă. *Fie $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, $a_k\in\mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$ cu $a_n\ne0$ şi $Q(z)=b_mz^m+\cdots+b_0$, cu $b_1,b_2,\ldots,b_m\in\mathbb{R}$ şi $b_m\ne0$. Presupunem că $m\ge n+1$ şi Q nu se anulează în zero. Notăm cu z_k rădăcinile lui Q. Atunci, pentru $a\in\mathbb{C}$ cu $\mathrm{Re}[a]\in(-1,m-1-n)$ are loc*

$$\int_0^\infty\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot x^a\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{1-e^{2a\pi i}}\cdot\sum_{k=1}^m\mathrm{Rez}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}z^a,z_k\right).$$

Demonstraţie. Vom face o tăietură de-a lungul părţii pozitive a axei reale şi considerăm conturul $C = C_R \cup C_- \cup C_\varepsilon \cup C_+$ format din

$C_R -$ cercul de rază suficient de mare $R > 0$ şi centru 0 parcurs trigonometric
$C_- -$ segmentul parcurs de la R la ε pe tăietura sudică a axei reale
$C_\varepsilon -$ cercul de rază suficient de mică $\varepsilon > 0$ şi centru 0 parcurs invers
$C_+ -$ segmentul parcurs de la ε la R pe tăietura nordică a axei reale.

Pe baza Teoremei reziduurilor,

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot z^a \,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Rez}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} z^a, z_k\right).$$

Pe de altă parte,

$$\int_C \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z = \int_{C_R} \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z - \int_\varepsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot e^{a \ln x + 2a\pi i} \,\mathrm{d}x - \int_{C_\varepsilon} \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z + \int_\varepsilon^R \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot e^{a \ln x} \,\mathrm{d}x.$$

Trecem la limită cu $R \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$ şi rămâne să demonstrăm că

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z = 0.$$

Considerând $z = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrizarea cercului C_R şi $a = \alpha + i\beta$, obţinem

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z \right| \le R^{\alpha+1} \cdot \frac{|a_n|R^n + |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots |a_0|}{|b_m|R^m - |b_{m-1}|\, R^{m-1} - \cdots |b_0|} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-\beta t} \,\mathrm{d}t.$$

Condiţia $m - 1 - n > \alpha$ asigură convergenţa integralei pe C_R la zero când R tinde la infinit.

Fie $z = \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ o parametrizare a cercului C_ε şi $a = \alpha + i\beta$. Fiindcă polinomul Q nu se anulează în origine, funcţia $f = P/Q$ este olomorfă în origine, deci mărginită într-o vecinătate a lui zero. Atunci există $M > 0$ astfel încât $|f(\varepsilon e^{it})| < M$, pentru orice $t \in [0, 2\pi]$. Atunci

$$\left| \int_{C_\varepsilon} \frac{P(z)z^a}{Q(z)} \,\mathrm{d}z \right| \le \varepsilon^{\alpha+1} \cdot M \int_0^{2\pi} e^{-\beta t} \,\mathrm{d}t.$$

Condiţia $\alpha + 1 > 0$ asigură convergenţa integralei pe C_ε la zero când ε tinde la zero. □

9.28 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x} \,\mathrm{d}x, \qquad \text{unde } a = \alpha + i\beta,\ \alpha \in (-1, 0), \beta \in \mathbb{R}.$$

Se aplică rezultatul anterior.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x} \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1 - e^{2a\pi i}} \cdot (-1)^a = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{-\pi}{\sin(\pi a)}.$$

9.29 Exemplu. Să se calculeze integralele

$$\int_0^\infty \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4 + x^2 + 1} \,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \frac{x^2\sqrt{x}\ln x}{x^4 + x^2 + 1} \,\mathrm{d}x.$$

Considerăm integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x^3 \cdot x^a}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x, \quad a \in (-1, 0) \quad \text{şi} \quad f(x) = \frac{x^3 \cdot x^a}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Funcţia $I(a)$ este corect definită pe $(-1, 0)$, continuă şi derivabilă pe tot intervalul de definiţie. Să observăm că

$$\int_0^\infty \frac{x^2\sqrt{x}}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = I\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \frac{x^2\sqrt{x}\ln x}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = I'\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Rădăcinile ecuaţiei $x^4 + x^2 + 1 = 0$ sunt rădăcinile ecuaţiei $x^6 - 1 = 0$ fără rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 1 = 0$, adică $x_k = e^{\frac{2k\pi i}{6}}$, pentru $k = 1, 2, 4, 5$. Conform rezultatului general

$$I(a) = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi a i}}\left[\mathrm{Rez}(f, x_1) + \mathrm{Rez}(f, x_2) + \mathrm{Rez}(f, x_4) + \mathrm{Rez}(f, x_5)\right].$$

Avem

$$\mathrm{Rez}(f, x_k) = \mathrm{Rez}\left(\frac{x^{3+a}(x^2 - 1)}{x^6 - 1}, x_k\right) = \frac{x_k^{3+a}(x_k^2 - 1)}{6x_k^5} = \frac{x_k^{4+a}(x_k^2 - 1)}{6} = \frac{i x_k^{5+a}\sin\frac{k\pi}{3}}{3}.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
I(a) &= \frac{2\pi i^2}{3(1 - e^{2\pi a i})}\left(x_1^{5+a}\sin\frac{\pi}{3} + x_2^{5+a}\sin\frac{2\pi}{3} + x_4^{5+a}\sin\frac{4\pi}{3} + x_5^{5+a}\sin\frac{5\pi}{3}\right) \\
&= \frac{-\pi}{\sqrt{3}(1 - e^{2\pi a i})}\left[e^{\frac{(a+5)\pi i}{3}} + e^{\frac{(a+5)2\pi i}{3}} - e^{\frac{(a+5)4\pi i}{3}} - e^{\frac{(a+5)5\pi i}{3}}\right] \\
&= \frac{-\pi}{\sqrt{3}(1 - e^{2\pi a i})}\left[2e^{\frac{3(a+5)\pi i}{6}}\cos\frac{(a+5)\pi}{6} - 2e^{\frac{9(a+5)\pi i}{6}}\cos\frac{(a+5)\pi}{6}\right] \\
&= \frac{-2\pi\cos\frac{(a+5)\pi}{6}}{\sqrt{3}(1 - e^{2\pi a i})} \cdot e^{(a+5)\pi i} \cdot (-2i)\sin\frac{(a+5)\pi}{2} = -\frac{\pi\cos\frac{\pi(1-a)}{6}}{\sqrt{3}\sin\frac{a\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Atunci $I(-1/2) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Pentru derivată, avem expresia

$$I'(a) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi(1-a)}{6}\sin\frac{a\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi(1-a)}{6}\cos\frac{a\pi}{2}}{\sin^2\frac{a\pi}{2}}$$

şi valoarea particulară $I'(-1/2) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}}$.

9.4.6 Alte integrale

9.30 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Folosim conturul format din segmentul $[0, R]$, sfertul de cerc Re^{it}, $t \in [0, \pi/2]$ şi segmentul $[iR, 0]$ pentru funcţia $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ cu punctul singular 0 care este un punct unghiular al conturului ales cu unghiul dintre semitangente de $\frac{3\pi}{2}$. Astfel

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{2} \cdot \mathrm{Rez}\,(f, 0) = \frac{\pi i}{2}.$$

Pe de altă parte,

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z - \int_0^{iR} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Integrala pe semicercul C_R tinde la zero când R tinde la infinit. Pe segmentul $[0,R]$ luăm $z=x$, iar pe segmentul $[0,iR]$ luăm $z=ix$, $x\in[0,R]$ şi obţinem

$$\int_0^\infty \left(\frac{\cos x + i\sin x}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi i}{2},$$

ceea ce implică

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

9.31 Exemplu. Să se calculeze

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Metoda I. Cu notaţia $e^{2x}=t$ obţinem

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}\cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{ai}{2}}}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Am obţinut o funcţie raţională înmulţită cu o funcţie putere. Folosind rezultatul corespunzător avem

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{ai}{2}}}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi a}}\cdot \operatorname{Rez}\left(\frac{t^{\frac{ai}{2}}}{(t+1)^2}, -1\right) = \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi a}}\cdot\frac{ai}{2}\cdot(-1)^{\frac{ai}{2}-1} = \frac{\pi a e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-a\pi}} = \frac{\frac{\pi a}{2}}{\operatorname{sh}\frac{a\pi}{2}}.$$

Metoda II. Scriem

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Considerăm conturul dreptunghiular format din segmentele $[-R,R]$, $[R,R+i\pi]$, $[R+i\pi,-R+i\pi]$ şi $[-R+i\pi,-R]$ pe care îl parcurgem în sens direct. Punctele singulare se obţin rezolvând ecuaţia $\operatorname{ch} z = 0$ sau $\cos(-iz)=0$. Singurul punct singular al funcţiei $f(z) = \frac{e^{iaz}}{2\operatorname{ch}^2 z}$ situat în interiorul conturului dreptunghiular C este $z_0 = \frac{i\pi}{2}$. Obţinem

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\operatorname{Rez}\left(f, \frac{\pi i}{2}\right) = 2\pi i\cdot\left.\left(\frac{iae^{iaz}}{2\operatorname{sh}^2 z} - \frac{e^{iaz}\operatorname{ch} z}{2\operatorname{sh}^3 z}\right)\right|_{z=\frac{i\pi}{2}} = \pi i\cdot\frac{iae^{-\frac{a\pi}{2}}}{i^2\sin^2\frac{\pi}{2}} = \pi a e^{-\frac{a\pi}{2}}.$$

Pe de altă parte, calculând integrala pe segmentele orizontale, obţinem

$$\int_{[-R,R]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{[R+i\pi,-R+i\pi]} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{-R}^R f(x+i\pi)\,\mathrm{d}x = -\int_{-R}^R \frac{e^{ia(x+i\pi)}}{2\operatorname{ch}^2(x+i\pi)}\,\mathrm{d}x = -e^{-a\pi}\int_{-R}^R f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pe segmentul vertical $[R,R+i\pi]$ avem $z=R+ix$, $x\in[0,\pi]$ şi

$$\left|\int_{[R,R+i\pi]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^\pi \frac{\left|e^{iaR-ax}\right|}{2|\operatorname{ch}^2(R+ix)|}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{|e^R-e^{-R}|^2}\int_0^\pi e^{-ax}\,\mathrm{d}x$$

ce ne arată că integrala converge la zero când R tinde la infinit. Pe segmentul vertical $[-R+i\pi,-R]$ avem $z=-R+ix$, $x\in[0,\pi]$ şi

$$\left|\int_{[-R+i\pi,-R]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_0^\pi \frac{\left|e^{-iaR-ax}\right|}{2|\operatorname{ch}^2(-R+ix)|}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{|e^R-e^{-R}|^2}\int_0^\pi e^{-ax}\,\mathrm{d}x.$$

În final, prin trecere la limită cu R tinzând la infinit, obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi a e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1-e^{-\pi a}} = \frac{\frac{\pi a}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\pi a}{2}}.$$

9.32 Exemplu. Să se calculeze integralele lui Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Considerăm conturul C format din segmentul $[0,R]$ reunit cu arcul de cerc $z=Re^{it}$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ şi segmentul $[Re^{\frac{i\pi}{4}},0]$, parcurs în sens direct. Pentru că e^{iz^2} este olomorfă pe $\mathbb{C}$, avem

$$\int_C e^{iz^2}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pe de altă parte,

$$\int_C e^{iz^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R e^{ix^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2it}} iRe^{it}\,\mathrm{d}t - e^{\frac{i\pi}{4}}\int_0^R e^{it^2e^{\frac{i\pi}{2}}}\,\mathrm{d}t.$$

Folosind faptul că

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2it}} iRe^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2t} R\,\mathrm{d}t \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4t}{\pi}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Trecând la limită cu $R\to\infty$ obţinem

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = e^{\frac{i\pi}{4}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{\frac{i\pi}{4}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ceea ce este echivalent cu

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

9.33 Exemplu. Pentru $a,b>0$, să se calculeze

$$I_1=\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x,\quad I_3=\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x,\quad I_4=\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x.$$

Calculăm integralele funcţiilor $f(z)=\frac{e^{iaz}}{z-bi}$ şi $g(z)=\frac{e^{iaz}}{z+bi}$ pe conturul C format din segmentul $[0,R]$, arcul de cerc $|z|=R$ din primul cadran şi segmentul $[iR,0]$. Conform Teoremei reziduurilor

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \pi i\operatorname{Rez}(f,bi) = \pi i e^{-ab} \quad \text{şi} \quad \int_C g(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pe de altă parte,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{e^{iax}}{x-bi}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}-bi}\cdot Rie^{it}\,\mathrm{d}t - ⨍_0^R \frac{e^{-ax}}{ix-bi}\cdot i\,\mathrm{d}x$$
$$\int_C g(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^R \frac{e^{iax}}{x+bi}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}+bi}\cdot Rie^{it}\,\mathrm{d}t - \int_0^R \frac{e^{-ax}}{ix+bi}\cdot i\,\mathrm{d}x.$$

Trecând la limită cu $R\to\infty$ şi ţinând cont că

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}\pm bi}\cdot Rie^{it}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-aR\sin t}}{R-b}\cdot R\,\mathrm{d}t \le \frac{R}{R-b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\frac{2t}{\pi}}\,\mathrm{d}t = \frac{R}{R-b}\cdot\frac{\pi}{2aR}\left(1-e^{-R}\right),$$

rezultă

$$\pi i e^{-ab} = \int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x-bi}\,\mathrm{d}x - ⨍_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x-b}\,\mathrm{d}x$$
$$0 = \int_0^\infty \frac{e^{iax}}{x+bi}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x+b}\,\mathrm{d}x.$$

Adunând cele două egalităţi obţinem

$$\pi i e^{-ab} = \int_0^\infty \frac{2xe^{iax}}{x^2+b^2} - ⨍_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x-b}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x+b}\,\mathrm{d}x,$$

de unde, separând partea reală şi partea imaginară se obţine

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}e^{-ab}$$
$$\int_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}⨍_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x-b}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x+b}\,\mathrm{d}x.$$

Scăzând cele două egalităţi în locul unde am făcut adunare, obţinem

$$\pi i e^{-ab} = \int_0^\infty \frac{2bie^{iax}}{x^2+b^2} - ⨍_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x-b}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x+b}\,\mathrm{d}x,$$

de unde, separând partea reală şi partea imaginară se obţine

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2b}⨍_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x-b}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2b}\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x+b}\,\mathrm{d}x.$$

Folosind exponenţiala integrală

$$\mathrm{Ei}(x) = ⨍_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}^* \quad \text{unde} \quad ⨍_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_\varepsilon^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{pentru } x>0,$$

putem rescrie

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-ab}}{2b}\cdot\mathrm{Ei}(ab) - \frac{e^{ab}}{2b}\cdot\mathrm{Ei}(-ab)$$
$$\int_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-ab}}{2}\cdot\mathrm{Ei}(ab) - \frac{e^{ab}}{2}\cdot\mathrm{Ei}(-ab).$$

9.4.7 Calculul unor serii folosind reziduuri

9.34 Teoremă. *Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ cu excepţia unui număr finit de poli $a_1, \ldots, a_m$, care nu sunt numere întregi de pe axa reală. Presupunem că există $K, M > 0$ şi $\alpha > 1$ astfel încât $|z|^\alpha \cdot |f(z)| \le K$ pentru orice $|z| > M$. Atunci, pentru $\beta \in [0, \pi]$, are loc*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot e^{\beta n i} = -\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Rez}\left(\frac{\pi f(z) e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}, a_k\right)$$

Demonstraţie. Seria $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{\beta n i}$ este absolut convergentă, fiindcă

$$\left|f(n)e^{\beta n i}\right| = |f(n)| \le \frac{K}{n^\alpha}, \qquad \text{pentru } |n| > R.$$

Definim funcţia

$$g(z) = \frac{\pi f(z) e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}.$$

Ea are ca poli numerele $\{ a_1, a_2, \ldots, a_m \} \cup \mathbb{Z}$. În plus, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem

$$\operatorname{Rez}(g, n) = \lim_{z\to n} \pi f(z) \cdot \frac{e^{iz(\beta-\pi)}}{(\sin \pi z)'} = f(n)e^{\beta n i}.$$

Pentru $N \ge 1$, fie C_N conturul format din laturile pătratului cu vârfurile $\left(N + \frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$ parcurs în sens direct. Pentru un N suficient de mare, conform Teoremei reziduurilor, avem

$$\int_{C_N} g(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=-N}^{N} f(n)e^{\beta n i} + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Rez}(g, a_k).$$

E suficient să demonstrăm că integrala pe C_N din g tinde la zero când N tinde la infinit.

Vom arăta mai întâi că $\left|\frac{e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}\right| \le 3$, pentru orice $z \in C_N$. Pe laturile orizontale, folosim parametrizarea $z = x \pm \left(N + \frac{1}{2}\right) i$ şi inegalitatea $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$ şi avem

$$\left|\frac{e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}\right| = \left|\frac{2e^{i(\beta-\pi)\left[x\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)i\right]}}{e^{i\pi\left[x\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)i\right]} - e^{-i\pi\left[x\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)i\right]}}\right| \le \frac{2e^{(\pi-\beta)\left(N+\frac{1}{2}\right)}}{e^{\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)} - e^{-\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)}} \le 3.$$

Pe laturile verticale, folosim parametrizarea $z = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right) + ix$ şi obţinem

$$\left|\frac{e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}\right| = \frac{\left|e^{\pm i(\beta-\pi)\left(N+\frac{1}{2}\right)+(\pi-\beta)x}\right|}{\left|\sin i\pi x \cos\left[\pm\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\right] + \cos i\pi x \sin\left[\pm\pi\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]\right|} = \frac{e^{(\pi-\beta)x}}{\operatorname{ch} \pi x} = \frac{2e^{(\pi-\beta)x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}} \le 2.$$

Acum, pentru $z \in C_N$ avem $|z| \ge N + \frac{1}{2}$. Atunci, pentru N suficient de mare, va rezulta că

$$\left|\int_{C_N} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \left|\int_{C_N} \mathrm{d}z\right| \cdot \sup_{z\in C_N} |g(z)| \le 4(2N+1) \cdot \sup_{z\in C_N} \left|\pi f(z) \cdot \frac{e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}\right| \le 4(2N+1)\frac{3K\pi 2^\alpha}{(2N+1)^\alpha},$$

ceea ce demonstrează că integrala pe C_N din g tinde la zero când $N \to \infty$. $\square$

9.35 Observaţie. Rezultatul se poate extinde puţin. Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$ cu excepţia unui număr finit de poli $a_1, \ldots, a_m$, care nu sunt numere întregi de pe axa reală. Presupunem că există $K, M > 0$ şi $\alpha > 0$ astfel încât $|z|^\alpha \cdot |f(z)| \leq K$ pentru orice $|z| > M$. Atunci, pentru $\beta \in (0, 2\pi)$, are loc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \cdot e^{\beta n i} = -\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Rez}\left(\frac{\pi f(z) e^{iz(\beta-\pi)}}{\sin \pi z}, a_k\right)$$

pentru toate seriile convergente.

Arătăm că integrala $\int_{C_N} g(z)\,\mathrm{d}z$ converge la zero când $N \to \infty$, unde C_N este cercul centrat în origine şi de rază $R = N + \frac{1}{2}$. Folosim parametrizarea $z = (N + \frac{1}{2})e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\left|\int_{C_N} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi R \int_0^{2\pi} \frac{|f(Re^{it})| \cdot \left|e^{iR(\beta-\pi)e^{it}}\right|}{|\sin(\pi R e^{it})|}\,\mathrm{d}t \leq \pi K R^{1-\alpha} \int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

unde

$$h(t) = \frac{e^{-R(\beta-\pi)\sin t}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\pi R \sin t) + \sin^2(\pi R \cos t)}} = \frac{\sqrt{2} e^{R(\pi-\beta)\sin t}}{\sqrt{\operatorname{ch}(2\pi R \sin t) - \cos(2\pi R \cos t)}}.$$

Pentru că $h(\pi - t) = h(t)$ şi $h(t - \pi) = h(-t)$, avem

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{şi} \quad \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(-t)\,\mathrm{d}t.$$

Vom demonstra că, pentru orice $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ au loc inegalităţile

$$h(t) \leq 4e^{-\beta R \sin t} \quad \text{şi} \quad h(-t) \leq 4e^{(\beta-2\pi)R\sin t}.$$

Pentru aceasta este suficient să arătăm că

$$2e^{2\pi R \sin t} \leq 16[\operatorname{ch}(2\pi R \sin t) - \cos(2\pi R \cos t)],$$

adică

$$3e^{2\pi R \sin t} + 4e^{-2\pi R \sin t} \geq 8\cos(2\pi R \cos t), \qquad \text{pentru orice } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Vom folosi inegalităţile $\frac{2t}{\pi} \leq \sin t \leq t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pentru $t \in \left[\frac{1}{4R}, \frac{\pi}{2}\right]$ avem

$$3e^{2\pi R \sin t} + 4e^{-2\pi R \sin t} \geq 3e^{2\pi R \sin t} \geq 3e^{2\pi R \frac{2t}{\pi}} \geq 3e \geq 8 \geq 8\cos(2\pi R \cos t).$$

Pentru $t \in \left[0, \frac{1}{4R}\right]$ avem

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi R \cos t) &= \cos(2\pi R(\cos t - 1) + 2\pi R) \\
&= \cos(2\pi R(\cos t - 1))\cos((2N+1)\pi) - \sin(2\pi R(\cos t - 1))\sin((2N+1)\pi) \\
&= -\cos(2\pi R(1 - \cos t)) = -\cos\left(4\pi R \sin^2 \frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Fiindcă

$$0 \leq 4\pi R \sin^2 \frac{t}{2} \leq 4\pi R \cdot \frac{t^2}{4} \leq \frac{\pi}{16R} = \frac{\pi}{8(2N+1)} \leq \frac{\pi}{2}$$

atunci

$$3e^{2\pi R\sin t}+4e^{-2\pi R\sin t}\geq 0\geq 8\cos(2\pi R\cos t),\qquad \text{pentru } t\in\left[0,\frac{1}{4R}\right].$$

Atunci

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_N} g(z)\,\mathrm{d}z\right| &\leq 2\pi K R^{1-\alpha}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(-t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leq 2\pi K R^{1-\alpha}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4e^{-\beta R\cdot\frac{2t}{\pi}}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4e^{(\beta-2\pi)R\cdot\frac{2t}{\pi}}\,\mathrm{d}t\right)\\ &\leq 2\pi K R^{1-\alpha}\left(\frac{2\pi}{\beta R}+\frac{2\pi}{(2\pi-\beta)R}\right)\leq\frac{8\pi^3K}{R^\alpha\beta(2\pi-\beta)},\end{aligned}$$

care arată convergenţa integralei $\int_{C_N} g(z)\,\mathrm{d}z$ la zero când $R\to\infty$.

9.36 Exemplu. Pentru numerele reale a şi b cu proprietatea că $(a,b)\notin\mathbb{Z}\times\{0\}$ şi pentru $\beta\in[0,\pi]$ să se calculeze

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\beta n)}{(n+a)^2+b^2}\qquad\text{şi}\qquad\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\beta n)}{(n+a)^2+b^2}.$$

Fie $f(z)=\frac{1}{(n+a)^2+b^2}$. Funcţia f are polii simpli $z_{1,2}=-a\pm ib$. Deducem că

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\beta n}}{(n+a)^2+b^2}=-\operatorname{Rez}(g,z_1)-\operatorname{Rez}(g,z_2)=\frac{\pi i}{2b}\left[\frac{e^{b(\pi-\beta)+a(\pi-\beta)i}}{\sin(-\pi a+i\pi b)}+\frac{e^{-b(\pi-\beta)+a(\pi-\beta)i}}{\sin(\pi a+i\pi b)}\right].$$

De aici, rezultă

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\beta n)}{(n+a)^2+b^2}&=\frac{2\pi[\sin a(\pi-\beta)\sin a\pi\operatorname{ch}b\pi\operatorname{sh}b(\pi-\beta)+\cos a(\pi-\beta)\cos a\pi\operatorname{sh}b\pi\operatorname{ch}b(\pi-\beta)]}{b(\operatorname{ch}2\pi b-\cos 2\pi a)}\\ &=\frac{\pi[\cos(2\pi-\beta)a\cdot\operatorname{sh}b\beta+\cos a\beta\cdot\operatorname{sh}(2\pi-\beta)b]}{b(\operatorname{ch}2\pi b-\cos 2\pi a)}\end{aligned}$$

şi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\beta n)}{(n+a)^2+b^2}=\frac{\pi[\sin(2\pi-\beta)a\cdot\operatorname{sh}b\beta-\sin a\beta\cdot\operatorname{sh}(2\pi-\beta)b]}{b(\operatorname{ch}2\pi b-\cos 2\pi a)}.$$

În particular, pentru $\beta=0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^2+b^2}=\frac{\pi\operatorname{sh}2\pi b}{b(\operatorname{ch}2\pi b-\cos 2\pi a)}.$$

Dacă $a=-n_0\in\mathbb{Z}$ şi $b=0$ atunci

$$\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq n_0}\frac{1}{(n+a)^2+b^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{b\to 0}\left(\frac{\pi\operatorname{sh}2\pi b}{b(\operatorname{ch}2\pi b-1)}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{\pi^2}{3}.$$

Pentru $\beta=\pi$, avem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2+b^2}=\frac{2\pi\operatorname{sh}\pi b\cos\pi a}{b(\operatorname{ch}2\pi b-\cos 2\pi a)}.$$

9.37 Exemplu. Pentru $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ şi $\beta \in (0, 2\pi)$ să se calculeze

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta n i}}{n+\alpha}.$$

Seria este convergentă datorită Criteriului lui Abel-Dirichlet. Şirul (z_n) definit prin $z_n = \frac{1}{n+\alpha}$ converge la zero pentru $n \to \infty$ şi seria

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |z_{n+1} - z_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha|}{|n+1+\alpha| \cdot |n+\alpha|}$$

este convergentă.

Avem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta n i}}{n+\alpha} = -\operatorname{Rez}(g, -\alpha) = \frac{\pi e^{i\alpha(\pi-\beta)}}{\sin(\pi\alpha)}.$$

De aici deducem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta n)}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\sin(\beta n)}{n} = \lim_{\alpha \to 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{\sin(\beta n)}{n+\alpha} = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \to 0} \pi \frac{\sin \alpha(\pi - \beta)}{\sin \alpha\pi} = \frac{\pi - \beta}{2}.$$