Seminar 10

Teorema reziduurilor

10.1. Să se precizeze punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{\sin(\pi z)}{z^3(z-1)(2z+1)}$ şi tipul lor.

10.2. Să se precizeze punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{\mathrm{tg}(\pi z)}{1+e^{2z}} \cdot e^{\frac{1}{z}}$ şi tipul lor. Care dintre ele se găsesc în interiorul cercului $|z-1| = 2$?

10.3. Să se calculeze reziduul funcţiei $f(z) = \mathrm{ctg}\,\pi z \cdot \frac{e^{-z}}{z^2+1}$ în punctul $z = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

10.4. Să se calculeze $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

10.5. Să se calculeze $\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z$, unde C este curba simplă, închisă, parcursă în sens direct, formată din laturile triunghiului cu vârfurile -1, 1 şi $i\sqrt{3}$.

Indicaţii

10.1. Punctul $z = 0$ este rădăcină de ordinul 3 a numitorului şi de ordinul 1 a numărătorului, deci este un pol de ordinul 2. Punctul $z = 1$ este rădăcină de ordinul 1 a numitorului şi de ordinul 1 a numărătorului, deci este punct eliminabil. Punctul $z = -\frac{1}{2}$ este pol de ordinul 1.
10.2. Punctele unde se anulează $1 + e^{2z}$ sunt $z_k = \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(-1) = \frac{i\pi(2k+1)}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Punctele unde $\cos \pi w = 0$ sunt $w_k = \frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Toate aceste puncte sunt poli de ordinul 1. Punctul $z = 0$ este un punct singular esenţial izolat. Inegalitatea $|z_k - 1| < 2$ este echivalentă cu $\sqrt{\pi^2(2k+1)^2 + 4} < 4$, adică $(2k+1)^2 < \frac{12}{\pi^2}$, care este adevărată doar pentru $k = 0$ şi $k = -1$. Inegalitatea $|w_k - 1| < 2$ este echivalentă cu $|2k - 1| < 4$ şi este verificată de $k = -1, 0, 1, 2$. Punctul $z = 0$ se află în interiorul discului $|z - 1| < 2$. În concluzie, singurele puncte singulare aflate în interiorul cercului $|z-1| = 2$ sunt $z_0 = \frac{\pi i}{2}$, $z_{-1} = -\frac{\pi i}{2}$, $w_{-1} = -\frac{1}{2}$, $w_0 = \frac{1}{2}$, $w_1 = \frac{3}{2}$, $w_2 = \frac{5}{2}$ şi $z = 0$.
10.3. Punctul $z = n$ este pol simplu, deci $\mathrm{Rez}(f, n) = \lim\limits_{z\to n} \dfrac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'} \cdot \dfrac{e^{-z}}{z^2+1} = \dfrac{e^{-n}}{\pi(n^2+1)}$.
10.4. Punctele singulare ale funcţiei $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}$ sunt polii $z_{1,2} = \pm i$ de ordinul 1 şi $z_3 = -1$, pol de ordinul 2. Toate se găsesc în interiorul cercului $|z| = 2$ (pentru că $|z_k| = 1 < 2$). Conform Teoremei reziduurilor,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Rez}(f, i) + 2\pi i\,\mathrm{Rez}(f, -i) + 2\pi i\,\mathrm{Rez}(f, -1).$$

Avem

$$\operatorname{Rez}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{2z} = \frac{1}{2i(i+1)^2} = -\frac{1}{4}$$
$$\operatorname{Rez}(f,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{2z} = \frac{1}{-2i(-i+1)^2} = -\frac{1}{4}$$
$$\operatorname{Rez}(f,-1) = \lim_{z\to -1} \left(\frac{1}{z^2+1}\right)' = \lim_{z\to -1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Integrala are valoarea 0.

10.5. Triunghiul este echilateral, iar $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z-1)}$ are polii simpli $z = \pm i$ şi $z = 1$. Dintre aceste puncte singulare, $z = i$ se află în interiorul lui C, $z = -i$ se află în exterior, iar $z = 1$ este punct unghiular al curbei C, având unghiul dintre semitangente $\pi - \frac{\pi}{3}$. Atunci valoarea integralei este

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}(f,i) + \frac{\pi i}{3} \cdot \operatorname{Rez}(f,1) = \frac{\pi(1+i)}{2} + \frac{\pi i e^{\pi}}{6}.$$