Seminar 11

Aplicaţii ale teoremei reziduurilor

11.1. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin x}\,\mathrm{d}x$, unde $a>1$.

11.2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x$.

11.3. Să se determine seria Fourier a funcţiei $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$.

11.4. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+4}\,\mathrm{d}x$.

Indicaţii

11.1.

Scriind $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ şi notând $z=e^{ix}$, obţinem

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}\,\mathrm{d}x=\int_{|z|=1}\frac{2iz}{2aiz+z^2-1}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

Soluţiile ecuaţiei $2aiz+z^2-1=0$ sunt $z_1=\frac{-2ai+\sqrt{4-4a^2}}{2}=i\left(\sqrt{a^2-1}-a\right)$ şi $z_2=-i\left(\sqrt{a^2-1}+a\right)$. Deoarece $|z_2|>1$ şi $|z_1|=a-\sqrt{a^2-1}=\frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}<1$ rezultă, pe baza teoremei reziduurilor, că

$$I=4\pi i\,\mathrm{Rez}\left(\frac{1}{2aiz+z^2-1},z_1\right)=4\pi i\cdot\frac{1}{2ai+2z_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

11.2. Folosind paritatea funcţiei de sub integrală şi periodicitatea ei, obţinem

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 nx}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 nx}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2nx}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Cu schimbarea de variabilă $z=e^{ix}$, rezultă

$$I=\frac{1}{4}\cdot\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1-e^{2nxi}}{5+4\cos x}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1-z^{2n}}{5z+2z^2+2}\,\mathrm{d}z\right).$$

Soluţiile ecuaţiei $5z+2z^2+2=0$ sunt $z_1=-\frac{1}{2}$ şi $z_2=-2$. Cum $|z_1|<1$ şi $|z_2|>1$, obţinem

$$I=\frac{\pi}{2}\cdot\mathrm{Rez}\left(\frac{1-z^{2n}}{5z+2z^2+2},z_1\right)=\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

11.3. Fiindcă f este pară şi are perioada principală $T = 2\pi$, seria Fourier este de formă

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

unde a_n se calculează cu formula

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}x.$$

Notând $z = e^{ix}$, avem

$$a_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{4z + z^2 + 1} \,\mathrm{d}z\right).$$

Punctele singulare sunt $z_1 = -2 + \sqrt{3}$ şi $z_2 = -2 - \sqrt{3}$. Fiindcă $|z_1| < 1$ şi $|z_2| > 1$, rezultă

$$a_n = 4 \operatorname{Rez}\left(\frac{z^n}{4z + z^2 + 1}, z_1\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-2 + \sqrt{3}\right)^n.$$

Seria Fourier este

$$\frac{1}{2 + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} (-2 + \sqrt{3})^n \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11.4. Folosind paritatea funcţiei de sub integrală, obţinem

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 4} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 4} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{xi}}{x^4 + 4} \,\mathrm{d}x\right).$$

Soluţiile ecuaţiei $x^4 + 4 = 0$ sunt $x_k = (-4)^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}[\ln 4 + i(\pi + 2k\pi)]} = \sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)}$. Sunt 4 soluţii diferite

$$x_0 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}} = 1 + i, \qquad x_1 = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}} = -1 + i,$$
$$x_2 = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi i}{4}} = -1 - i, \qquad x_3 = \sqrt{2} e^{\frac{7\pi i}{4}} = 1 - i.$$

Calculând reziduul într-un punct singular x_k

$$\operatorname{Rez}\left(\frac{e^{zi}}{z^4 + 4}, x_k\right) = \frac{e^{x_k i}}{4x_k^3} = -\frac{x_k e^{x_k i}}{16}.$$

Valoarea integralei este

$$I = \operatorname{Re}\left[\pi i \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{zi}}{z^4 + 4}, x_0\right) + \pi i \operatorname{Rez}\left(\frac{e^{zi}}{z^4 + 4}, x_1\right)\right] = -\frac{\pi}{16} \cdot \operatorname{Re}\left(i x_0 e^{i x_0} + i x_1 e^{i x_1}\right)$$
$$= -\frac{\pi}{16} \cdot \operatorname{Re}\left[(-1 + i) e^{-1+i} + (-1 - i) e^{-1-i}\right] = \frac{\pi}{8e} \cdot (\cos 1 + \sin 1).$$