Seminar 14

Integrale de suprafaţă

14.1. Aria torului $\vec{r} = (R + r\cos v)\cos u\vec{\imath} + (R + r\cos v)\sin u\vec{\jmath} + r\sin v\vec{\kappa}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$, $0 < r < R$.

14.2. Să se calculeze forţa de atracţie gravitaţională a sferei goale omogene de rază $R > 0$ exercitată asupra unui punct material de masă m aflat la distanţa $a \neq R$ faţă de centrul sferei. Discuţie după a.

14.3. $\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

14.4. $\displaystyle\iint_S \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x, y, z \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq Rx$.

14.5. Să se calculeze fluxul lui $\vec{v} = 2\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + x\vec{\kappa}$ prin faţa exterioară a prismei cu vârfurile de coordonate $(0, 0, 0)$, $(a, b, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$, (a, b, c) şi $(0, b, c)$.

14.6. Să se calculeze fluxul lui $\vec{v} = y^2\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + x^2\vec{\kappa}$ prin faţa exterioară a paraboloidului $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

Temă

14.7. Să se calculeze aria suprafeţei $\vec{r} = u\cos v\vec{\imath} + u\sin v\vec{\jmath} + u^2\vec{\kappa}$, $u \in [0, 3]$, $v \in [0, \pi]$.

14.8. Să se calculeze $\displaystyle\iint_S x^2\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este $\vec{r} = u\cos v\vec{\imath} + u\sin v\vec{\jmath} + u\vec{\kappa}$, $u \in [0, 3]$, $v \in [0, \pi]$.

14.9. Să se calculeze $\displaystyle\iint_S (z + 1)\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S:\ x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 4$.

14.10. Să se calculeze fluxul lui $\vec{v} = (2xy + z)\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} - (x + 3y)\vec{\kappa}$ prin faţa exterioară a tetraedrului cu vârfurile de coordonate $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 6)$.

14.11. Să se calculeze $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$, unde $\vec{v} = y\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + x\vec{\kappa}$ iar S este suprafaţa exterioară a paraboloidului $z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

Indicaţii

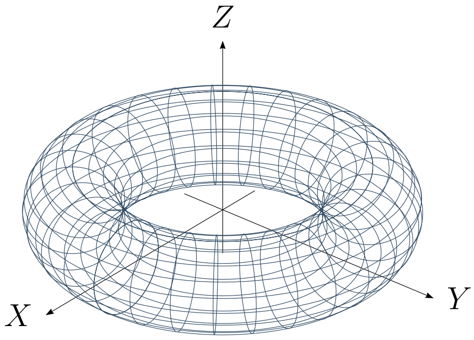


Figura 14.1: Torul

14.1. Torul este suprafaţa obţinută prin rotaţia în spaţiu a unui cerc în jurul unei axe coplanare dar care nu atinge cercul. Dacă r este raza cercului şi R este distanţa de la centrul cercului la axa de rotaţie OZ atunci parametrizarea acestei suprafeţe este

$$\begin{cases} x = (R + r\cos v)\cos u \\ y = (R + r\cos v)\sin u \qquad u, v \in [0, 2\pi]. \\ z = r\sin v \end{cases}$$

Calculăm coeficienţii suprafeţei cu formulele

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 \\ F &= x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v. \end{aligned}$$

În cazul nostru $E = (R + r\cos v)^2$, $G = r^2$, $F = 0$. Calculăm elementul de arie cu formula $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, iar aria cu formula $Aria = \iint_S \mathrm{d}\sigma$. Avem

$$\mathrm{d}\sigma = r(R + r\cos v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

şi

$$Aria = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 2\pi\int_0^{2\pi}(rR + r^2\cos v)\,\mathrm{d}v = 4\pi^2 rR.$$

14.2. Conform lui Newton, forţa de atracţie gravitaţională a unui punct P de masă M exercitat asupra unui punct A de masă m este de dată de

$$\vec{F} = GmM \cdot \frac{\overrightarrow{AP}}{AP^3}.$$

Un ansamblu format din punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de mase M_1, $M_2, \ldots$, M_n exercită asupra unui punct material A, forţa

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = GmM_1\frac{\overrightarrow{AP_1}}{AP_1^3} + GmM_2\frac{\overrightarrow{AP_2}}{AP_2^3} + \cdots + GmM_n\frac{\overrightarrow{AP_n}}{AP_n^3}.$$

Fie $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ecuaţia sferei şi fie $A(0, 0, a)$ poziţia punctului material de masă m. Datorită simetriei, componentele forţei în direcţia lui OX şi OY sunt zero. Rămâne să calculăm componenta verticală a forţei.

Pentru a calcula forţa de atracţie exercitată de întreaga sferă asupra punctului A, impărţim sfera în mai multe părţi mici S_k, $k = 1, \ldots, N$ de arii σ_k care conţin punctele $P_k(x_k, y_k, z_k)$. Presupunem sfera omogenă cu densitatea constantă ρ. Fiecare parte S_k exercită o forţă egală cu $Gm\rho\sigma_k\frac{\overrightarrow{AP_k}}{AP_k^3}$. Atunci forţa totală este aproximată prin

$$F_z \approx \sum_{k=1}^{N} Gm\rho\sigma_k \cdot \frac{z_k - a}{[x_k^2 + y_k^2 + (z_k - a)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Când $N \to \infty$ şi diametrul părţilor S_k tinde la zero, limita acestei sume devine egală cu forţa:

$$F_z = Gm\rho \iint_S \frac{z - a}{[x^2 + y^2 + (z - a)^2]^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}\sigma.$$

Folosind parametrizarea sferei $x = R\cos\varphi\sin\theta$, $y = R\sin\varphi\sin\theta$, $z = R\cos\theta$, unde $\varphi \in [0, 2\pi]$ şi $\theta \in [0, \pi]$ şi $E = R^2\sin^2\theta$, $G = R^2$ şi $F = 0$ se obţine

$$F_z = 2\pi Gm\rho \int_0^{\pi} \frac{(R\cos\theta - a)R^2\sin\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}\theta.$$

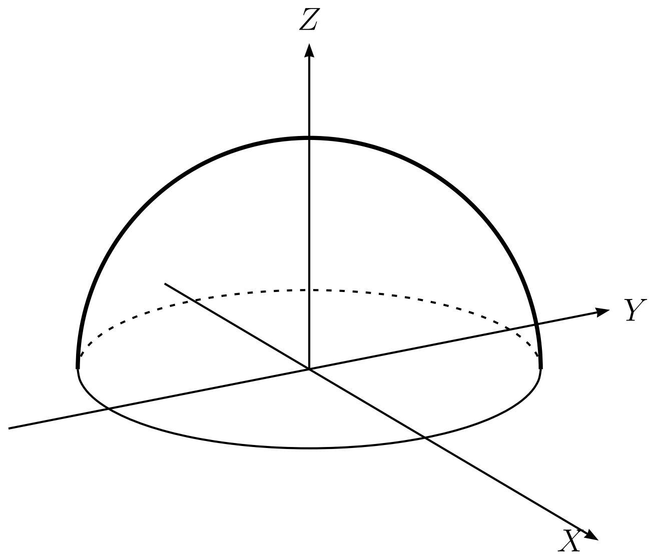
Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta} = u$ se obţine

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{\pi Gm\rho R}{a^2} \int_{|a-R|}^{a+R} \frac{R^2 - a^2 - u^2}{u^2}\, \mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi Gm\rho R}{a^2}(a + R - |a - R|)\left(\frac{R^2 - a^2}{|a^2 - R^2|} - 1\right). \end{aligned}$$

Dacă $a < R$ atunci $F_z = 0$, iar dacă $a > R$ atunci

$$F_z = -\frac{4\pi Gm\rho R^2}{a^2} = -\frac{GmM}{a^2}.$$

Concluzia este că într-un punct situat în interiorul unei sfere goale nu există forţă de atracţie gravitaţională, iar în exterior, forţa de atracţie are aceeaşi valoare ca atunci când întreaga masă a sferei ar fi concentrată în centrul ei.



14.3. Metoda I. Folosim coordonate sferice şi parametrizăm jumătatea de sferă prin

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \qquad \varphi\in[0,2\pi],\ \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

Dacă $u = \theta$ şi $v = \varphi$ atunci coeficienţii suprafeţei sunt $E = R^2$, $G = R^2\sin^2\theta$ şi $F = 0$. Valoarea integralei este

$$I = \iint_S z\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\theta\cdot R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^3\cdot\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^3.$$

Metoda II. Scriem ecuaţia sferei în forma explicită $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D$, unde D este discul de rază a din planul bazei obţinut prin proiecţia tuturor punctelor de pe suprafaţă pe planul XOY. Calculăm derivatele parţiale

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{şi} \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Elementul de suprafaţă se calculează cu formula

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pentru problema aceasta

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Valoarea integralei este

$$\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = R\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = R\cdot Aria = R\cdot\pi R^2 = \pi R^3.$$

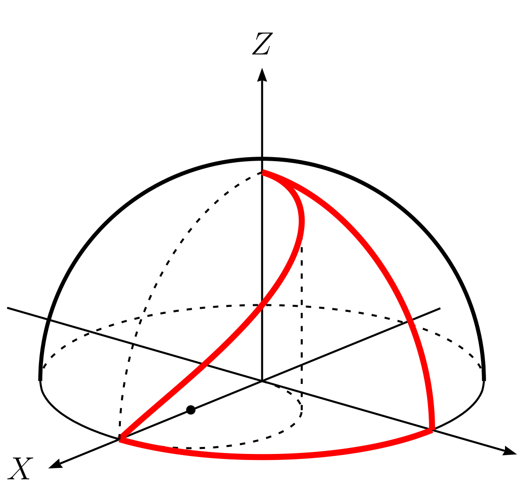


Figura 14.2: Suprafaţa de pe sferă

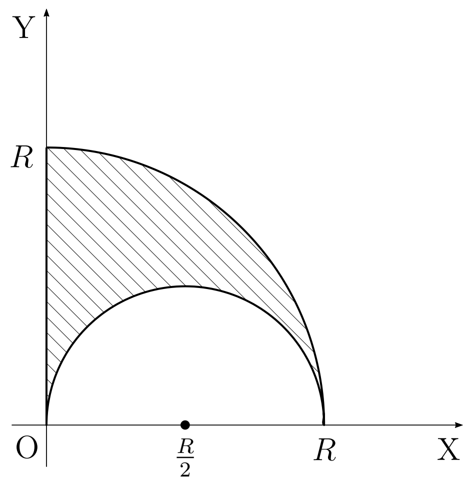


Figura 14.3: Domeniul D

14.4. Ecuaţia $x^2+y^2+z^2=R^2$ reprezintă o sferă centrată în origine şi de rază R. Ecuaţia $x^2+y^2=Rx$ poate fi rescrisă $x^2-Rx+y^2=0$ sau

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

şi reprezintă în spaţiu un cilindru circular cu axa $x=\frac{R}{2}$, $y=0$ şi rază $\frac{R}{2}$.

Scriem ecuaţia explicită a suprafeţei $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D$. Elementul de arie este $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Integrala de suprafaţă se reduce la integrala dublă

$$\iint_S \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D \frac{R^2-x^2-y^2}{R^2}\cdot\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{R}\iint_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calculăm integrala dublă folosind coordonate polare. Avem $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Unghiul φ variază între 0 şi $\pi/2$ pentru că $x,y\geq 0$ (suntem în primul cadran). Condiţiile asupra lui ρ le deducem din condiţiile $x^2+y^2\leq R^2$ şi $x^2+y^2\geq Rx$. Avem $\rho^2\leq R^2$ şi $\rho^2\geq R\rho\cos\varphi$. Atunci $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ şi $\rho\in[R\cos\varphi,R]$. Atunci

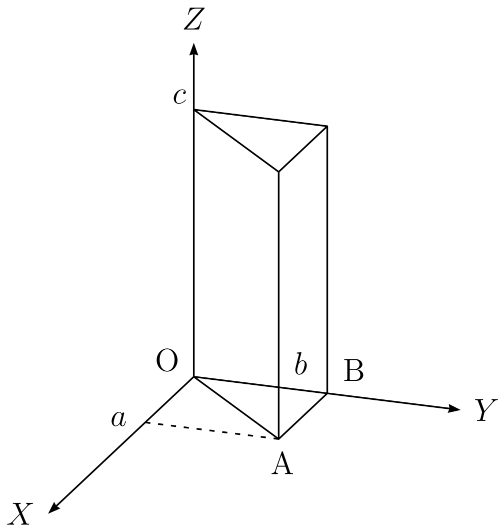
$$I=\frac{1}{R}\iint_D\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{R\cos\varphi}^{R}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}\varphi$$

Notând $t=\sqrt{R^2-\rho^2}$ atunci $t^2=R^2-\rho^2$ şi $t\,\mathrm{d}t=-\rho\,\mathrm{d}\rho$. În plus pentru $\rho=R$ avem $t=0$ şi pentru $\rho=R\cos\varphi$ obţinem $t=\sqrt{R^2-R^2\cos^2\varphi}=\sqrt{R^2(1-\cos^2\varphi)}=R|\sin\varphi|$. Atunci

$$I=\frac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{R\sin\varphi}t^2\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{R^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{R^2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Cu schimbarea de variabilă $\cos\varphi=u$ obţinem

$$I=\frac{R^2}{3}\int_0^1(1-u^2)\,\mathrm{d}u=\frac{R^2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2R^2}{9}.$$



14.5. Pentru a calcula fluxul, aplicăm formula lui Gauss-Ostrogradski

$$\iint_{\mathrm{fr}(V)} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

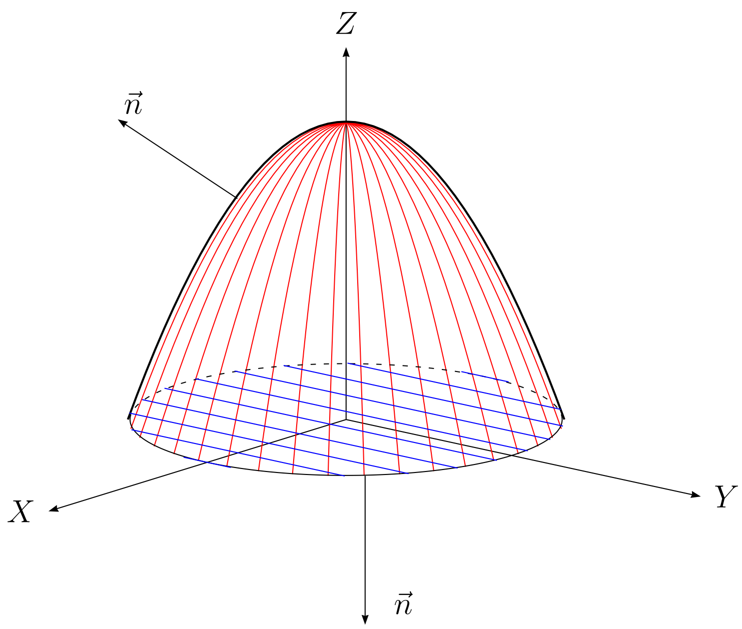
Pentru $\vec{v} = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ putem calcula divergenţa câmpului vectorial $\vec{v}$ prin

$$\mathrm{div}\ \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

În cazul acesta $\vec{v} = 2\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} + x\vec{\kappa}$ şi div $\vec{v} = z$.

$$\begin{aligned} Fluxul &= \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \mathrm{div}\ \vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{OAB} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^c z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{c^2}{2}\iint_{OAB} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

14.6. Suprafaţa cercului din planul bazei S_c împreună cu suprafaţa paraboloidului S de ecuaţie $z = 1 - x^2 - y^2$ mărginesc corpul V. Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradski se obţine



$$\iint_{S \cup S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = 0.$$

Dar

$$\iint_{S \cup S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}\sigma = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}\sigma.$$

De aici obţinem că

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_c} \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}\sigma.$$

Pentru suprafaţa S_c versorul normalei este $\vec{n} = -\vec{k}$. Astfel

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{v}) &= -\iint_{S_c} \left(y^2 \,\vec{\imath} + z^2 \,\vec{\jmath} + x^2 \,\vec{k}\right) \cdot \left(-\vec{k}\right) \,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint_{S_c} x^2 \,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_c} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$