Seminar 3

Integrale improprii

Să se studieze convergenţa integralelor şi în caz de convergenţă să se determine valoarea lor

3.1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

3.2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x}{x^2+1}.$

3.3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

3.4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}.$

3.5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x.$

3.6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3.7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

3.8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$

Indicaţii la problemele propuse

3.1. $\alpha = 1$ DIV
3.2. $\alpha = 2-\sqrt{2} < 1$ DIV
3.3. $\alpha = 2 > 1$ CONV. Pentru calcul se descompune în fracţii simple

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

cu $A=-1,\ B=1,\ C=2.$ Avem

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{-1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{2}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{t\to\infty}\ln\frac{t+2}{t+1} - \ln 2 - \frac{2}{t+2} + 1 = 1-\ln 2.\end{aligned}$$

3.4. $\alpha = 6$ CONV Pentru a descompune cât mai uşor în fractii simple expresia de sub integrală, notăm $x^2 = t$. Avem

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t+3}.$$

Eliminând numitorul se obţine

$$1 = A(t+2)(t+3) + B(t+1)(t+3) + C(t+1)(t+2).$$

Pentru $t = -1$, rezultă $1 = 2A$, adică $A = \frac{1}{2}$. Pentru $t = -2$, se va obţine $B = -1$, iar pentru $t = -3$, va rezulta $C = \frac{1}{2}$. Revenind la integrală, putem scrie

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(\frac{\frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+3}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3.5. În punctul $x = 2$, funcţia de sub integrală este nemărginită. Descompunem în două integrale

$$\int_0^4 \frac{1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \frac{1}{(x^2+1)(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru $\alpha = 1$, aplicând criteriul de comparaţie cu limită, ambele integrale sunt divergente.
3.6. $\alpha = \frac{1}{2}$ CONV. Pentru calcul facem substutuţia $x = \sin t$. Se obţine prin integrare prin părţi

$$\int_0^1 \frac{x(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\,\mathrm{d}t = \pi - 2.$$

3.7. Descompunem în două integrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru prima integrală, luăm $\alpha = 1/2$ şi obţinem $L = 0$, ce arată că integrala este convergentă. Pentru a doua integrală, alegem $\alpha = 3/2$ şi rezultă $L = 0$, ceea ce arată convergenţa ei. Cu substituţia $x = 1/t$ obţinem $I = -I$, adică $I = 0$.
3.8. $\alpha = 2$ CONV Cu substituţia $x = 1/t$ rezultă

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{t}}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Folosind faptul că $\operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg}\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, pentru orice $t > 0$,

$$2I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{t}}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$

Rezultă $I = \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}$.

Probleme suplimentare

Să se studieze convergenţa integralelor:

3.9. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$

3.10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

3.11. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{(x-2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

3.12. $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{(x+1)\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x.$

3.13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,\mathrm{d}x.$

3.14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

3.15. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{(\ln x)^4}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x.$

3.16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

3.17. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\cos x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x.$

3.18. $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x-a}}\cdot\sin\frac{1}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x.$

3.19. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^3}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x.$

Să se calculeze integralele:

3.20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x$

3.21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^n}.$

3.22. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x.$

3.23. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{(x+2)^2(x+3)}\,\mathrm{d}x.$

3.24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x.$

3.25. $\displaystyle\int_a^b \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}\,\mathrm{d}x.$

3.26. $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x.$

3.27. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x.$

3.28. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3.29. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3.30. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$

3.31. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{2x^2+x+3}\,\mathrm{d}x.$

3.32. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$

3.33. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2+x+2}\,\mathrm{d}x.$

3.34. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^3}\,\mathrm{d}x.$

3.35. $\displaystyle\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

3.36. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3.37. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

3.38. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

3.39. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$