

Seminar 4

Integrale cu parametri

4.1. Să se calculeze $F'(y)$, unde $F(y) = \int_1^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx$, $y > 1$.

4.2. Se dă $g(x, y) = \int_{x^2+y^2}^{x^3+y^3} f(x^2+y^2+t) dt$. Se cere $\frac{\partial g}{\partial x}$.

4.3. Se dă $g(t) = \int_0^{t^2} \left(\int_{2x-t}^{2x+t} \sin(x^2+y^2-t^2) dy \right) dx$. Să se determine $g'(t)$.

4.4. Să se determine valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{\sin \pi x - \sin x}{x} dx$.

4.5. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \cdot \sin^2 x) dx$, $m \geq 0$ și să se deducă valoarea integralelor $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$ și $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

Indicații la problemele propuse

4.1.

$$F'(y) = \frac{2}{y} \ln(1+y^2) - \frac{1}{y} \ln(1+y).$$

4.2.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (3x^2 + 2x)f(x^2 + y^2 + x^3 + y^3) - 4xf(2x^2 + 2y^2).$$

4.3. Notăm

$$f(x, t) = \int_{2x-t}^{2x+t} \sin(x^2 + y^2 - t^2) dy.$$

Folosim formula de derivare a integralelor cu parametru.

$$g'(t) = 2tf(t^2, t) + \int_0^{t^2} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Se obține

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2t \int_{2t^2-t}^{2t^2+t} \sin(t^4 - t^2 + y^2) dy + \int_0^{t^2} \sin(x^2 + (2x+t)^2 - t^2) dx \\ &\quad + \int_0^{t^2} \sin(x^2 + (2x-t)^2 - t^2) dx - 2t \int_0^{t^2} \left(\int_{2x-t}^{2x+t} \cos(x^2 + y^2 - t^2) dy \right) dx. \end{aligned}$$

4.4. Putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{\sin \pi x - \sin x}{x} dx = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \left(\int_1^\pi \cos tx dt \right) dx = \int_1^\pi \left(\int_0^\infty e^{-x} \cos tx dx \right) dt.$$

Prin integrare prin părți $\int_0^\infty e^{-x} \cos tx dx = \frac{1}{t^2+1}$. Atunci $I = \arctg \pi - \frac{\pi}{4}$.

4.5. Avem o integrală cu parametrul m .

$$\begin{aligned} I'(m) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2m \sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x} dx = 2m \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 x} dx}_{\operatorname{tg} x=t, dx=\frac{dt}{1+t^2}} \\ &= 2m \int_0^\infty \frac{t^2}{1 + m^2 t^2} \cdot \frac{dt}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Pentru $m \neq 1$, descompunem fracția în fracții simple

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+m^2 t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{1+m^2 t^2}.$$

Obținem $A=C=0$, $B=\frac{1}{m^2-1}$, $D=\frac{-1}{m^2-1}$. Rezultă

$$\begin{aligned} I'(m) &= \frac{2m}{m^2-1} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} - \frac{2m}{m^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{1+m^2 t^2} dt \\ &= \frac{2m}{m^2-1} \operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty - \frac{2m}{m^2-1} \cdot \frac{1}{m^2} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + \frac{1}{m^2}} dt \\ &= \frac{m}{m^2-1} \pi - \frac{2 \operatorname{arctg}(mt)}{m^2-1} \Big|_0^\infty = \frac{m}{m^2-1} \cdot \pi - \frac{2}{m^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{m+1}. \end{aligned}$$

Pentru cazul $m=1$, avem

$$I'(1) = \int_0^\infty t \cdot \frac{2t dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{t}{t^2+1} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă

$$I(m) = \pi \int \frac{dm}{m+1} = \pi \ln(m+1) + C.$$

Pentru calculul constantei, facem $m=1$. Din enunț, avem $I(1)=0$, iar din rezultatul obținut avem

$$I(1) = \pi \ln 2 + C \Rightarrow \pi \ln 2 + C = 0 \Rightarrow C = -\pi \ln 2.$$

Rezultă că $I(m) = \pi \ln \frac{m+1}{2}$. Pentru $m=0$ rezultă $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Considerând $m = \frac{1}{a}$ și înlocuind în integrala cu parametru se obține

$$I\left(\frac{1}{a}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos^2 x + \frac{1}{a^2} \sin^2 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2) dx.$$

Pe de altă parte, $I\left(\frac{1}{a}\right) = \pi \ln \frac{a+1}{2a}$. De aici rezultă,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x) dx = \pi \ln \frac{a+1}{2a} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2) dx = \pi \ln \frac{a+1}{2}.$$

Trecând la limită cu $a \rightarrow 0$, obținem $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Probleme suplimentare

4.6. Se dă $f(t) = \int_{a+t}^{b+t} \frac{\sin^2 tx}{x} dx$. Să se calculeze $f'(t)$.

4.7. Se dă $F(t) = \int_0^t f(x) \cdot (t-x)^{n-1} dx$. Să se calculeze $F^{(n)}(t)$.

4.8. Să se calculeze $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)} dx$.

4.9. Să se calculeze $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{\sin 6x \cdot \sin 4x}{x} dx$.

4.10. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \ln \left(\frac{1+a \sin x}{1-a \sin x} \right) dx$, $a \in (-1, 1)$.

4.11. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}(a \sin x) dx$, $a \geq 0$.

4.12. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.

4.13. Să se calculeze $\int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx$, $a \geq 0$.

4.14. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 - \sin^2 x) dx$, $a > 1$.