Seminar 5

Funcţia β şi Γ

Să se calculeze integralele:

5.1.

a) $\displaystyle\int_0^\infty (x^3-2x^2+3)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^\infty x^{10}e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^\infty x^4 e^{-3x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

5.2.

a) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^n(b-x)^m\,\mathrm{d}x,\ m,n\in\mathbb{N}, b>a$

b) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x,\ b>a$

c) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,\mathrm{d}x,\ b>a$

d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,\mathrm{d}x$

5.3.

a) $\displaystyle\int_0^a x^m(a^n-x^n)^p\,\mathrm{d}x, m,p>-1, n>0$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^m}}\,\mathrm{d}x,\ m,n\in\mathbb{N}$

c) $\displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^2 x^4\sqrt[3]{8-x^3}\,\mathrm{d}x$

5.4.

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\cos^b x\,\mathrm{d}x,\ a,b>-1$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,\mathrm{d}x,\ n\in N$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\cos^{12} x\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2t-1} 2x\,\mathrm{d}x,\ t>0$

5.5.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x,\ 0<m<n$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,\ p\in(-1,1)$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^3)^3}\,\mathrm{d}x$

Indicaţii şi răspunsuri

5.1. a) Se face substituţia $x^2 = t$ şi se desface în trei integrale. Se obţine

$$I = \frac{1}{2}\Gamma(2) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\pi}.$$

b) Se notează $2x = t$. Obţinem $I = \frac{\Gamma(11)}{2^{11}} = 10!/2^{11}$.
c) Notăm $3x^2 = t$. Obţinem $I = \frac{1}{18\sqrt{3}}\Gamma(5/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{24\sqrt{3}}$.
d) Folosim paritatea funcţiei de sub integrală şi apoi facem schimbarea de variabilă $x^2 = t$.

$$I = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

5.2. a) Se face schimbarea de variabilă $x = a + t(b-a)$. Se obţine

$$I = (b-a)^{n+m+1}\beta(n+1, m+1) = \frac{(b-a)^{n+m+1}n!m!}{(n+m+1)!}.$$

Formula a fost demonstrată la curs pentru orice $m, n > -1$.
b) Se foloseşte rezultatul precedent pentru $n = -1/2$ şi $m = -1/2$. Obţinem $I = \pi$.
c) Folosim rezultatul de la a) pentru $n = 1/2$ şi $m = -1/2$. Rezultă $I = (b-a)\pi/2$.
d) Despărţim în două integrale care sunt de tipul de la b) şi c).

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,\mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}\,\mathrm{d}x = \pi + \pi = 2\pi.$$

5.3. a) Se face succesiv schimbarea de variabile $x^n = u$ şi $u = a^n t$. Va rezulta

$$I = \int_0^a x^m(a^n - x^n)^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{a^n} u^{\frac{m+1}{n}-1}(a^n - u)^p\,\mathrm{d}u = \frac{a^{m+1+np}}{n}\beta\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right).$$

b) Se foloseşte rezultatul de la a) şi se obţine $I = \frac{1}{m}\beta(1/m, 1 - 1/n)$.
c) Se foloseşte rezultatul de la a) pentru $a = 3$, $n = 2$, $m = 2$, $p = 1/2$. Rezultă $I = \frac{81\pi}{16}$.
d) Se foloseşte rezultatul de la a) pentru $a = 2$, $n = 3$, $m = 4$, $p = 1/3$. Rezultă $I = \frac{128\pi}{27\sqrt{3}}$.
5.4. a) Se folosesc succesiv schimbările de variabile $\sin x = u$ şi $u^2 = t$. Obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right).$$

Formula a fost demonstrată la curs.
b) Folosim formula pentru $a = 1/2$ şi $b = -1/2$. $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
c) $I = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!}$.
d) $I = \frac{1}{2}\beta\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.
e) $I = \frac{63\pi}{2^{20}}$.
f) $I = 2^{2t-2}\beta(t,t)$.
5.5. a) Se foloseşte reprezentarea

$$\beta(a,b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}\,\mathrm{d}t}{(1+t)^{a+b}}.$$

Notăm $x^n = t$. Avem $I = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi m}{n}}$.
b) Notăm $x^2 = t$. Obţinem $I = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right)$.
c) Notăm $x^2 = t$. Se obţine $I = \frac{\pi}{2\cos\frac{p\pi}{2}}$.
d) Notăm $x^3 = t$. Rezultă $I = \frac{2\pi}{27\sqrt{3}}$.