Seminar 6

Integrale curbilinii de speţa I

Să se calculeze

6.1. $\int_C ye^{-x}\,\mathrm{d}s$, unde C este $x = \ln(t^2+1)$, $y = 1 - t + 2\operatorname{arctg} t$, $t \in [0,1]$.

6.2. $\int_C (x+y+z)\,\mathrm{d}s$, C este segmentul AB, cu $A(-1,2,1)$ şi $B(2,3,1)$.

6.3. lungimea curbei $x = 3t^2+1$, $y = 2t^3-1$, $t \in [0,3]$.

6.4. $\int_C (x^2-2y+z)\,\mathrm{d}s$, C este cercul aflat la intersecţia cilindrului $x^2+y^2=9$ şi planul $z=2$.

6.5. masa firului material $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $z = t$, $t \in [0, \ln 2]$ cu densitatea $\rho = x$.

Exerciţii suplimentare

6.6. $\int_C (x^2+y^2)\ln z\,\mathrm{d}s$, C are reprezentarea $x = e^t\cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in [0,1]$.

6.7. $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$, C este triunghiul ABC, $A(0,0)$, $B(1,1)$ şi $C(2,3)$.

6.8. $\int_C (x^2+y^2+zy)\,\mathrm{d}s$, C este $\vec{r} = a\cos t\vec{\imath} + a\sin t\vec{\jmath} + a\vec{\kappa}$, $t \in [0,\pi]$.

6.9. lungimea curbei $y = x^2$, $x \in [0,1]$.

6.10. lungimea curbei $x = \frac{1}{3}\cos^3 t$, $y = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

6.11. masa firului material $x = t$, $y = t^2/2$, $t \in [0,1]$, cu densitatea $\rho = x$.

Indicaţii

6.1. Pentru o curbă C parametrizată prin

$$C : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in [a,b]. \\ z = z(t). \end{cases}$$

scriem formula pentru calculul integralei curbilinii de speţa întâi

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\cdot\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\ \mathrm{d}t.$$

Calculăm derivatele lui x şi y în funcţie de parametrul t

$$x'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$y'(t) = \frac{2}{1+t^2} - 1.$$

Cu formula $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$ se obţine elementul de arc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s &= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+\left(\frac{2}{1+t^2}-1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{\frac{4t^2+1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}} = \sqrt{\frac{1+2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}} = \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Atunci,

$$\begin{aligned}\int_C ye^{-x}\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 (1-t+2\operatorname{arctg} t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \operatorname{arctg}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1 + \left(\operatorname{arctg} t\right)^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi^2}{16}.\end{aligned}$$

6.2. Trebuie să obţinem mai întâi o parametrizare a segmentului AB. Pentru aceasta scriem ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte $A(x_A,y_A,z_A)$ şi $B(x_B,y_B,z_B)$:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A} = t.$$

Se obţine

$$AB:\ \begin{cases} x = (x_B-x_A)t+x_A,\\ y=(y_B-y_A)t+y_A, \qquad t\in[0,1].\\ z=(z_B-z_A)t+z_A.\end{cases}$$

În cazul nostru, $A(-1,2,1)$ şi $B(2,3,1)$, deci parametrizarea segmentului AB este

$$AB:\ \begin{cases} x=3t-1,\\ y=t+2, \qquad t\in[0,1].\\ z=1.\end{cases}$$

Derivatele vor fi $x'=3$, $y'=1$ şi $z'=0$. Elementul de arc va avea expresia

$$\mathrm{d}s = \sqrt{3^2+1^2+0^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{10}\,\mathrm{d}t.$$

Integrala va fi

$$\begin{aligned}\int_C (x+y+z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 (3t-1+t+2+1)\sqrt{10}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{10}\int_0^1(4t+2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{10}\ \left(2t^2+2t\right)\Big|_0^1 = 4\sqrt{10}.\end{aligned}$$

6.3. Lungimea unei curbe se poate calcula cu formula

$$\ell = \int_C \mathrm{d}s.$$

Avem $x' = 6t$, $y' = 6t^2$. Elementul de arc este $\mathrm{d}s = 6t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Cu schimbarea de variabilă $u = 1 + t^2$, lungimea este

$$\ell = \int_0^3 6t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 3\int_1^{10} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{u^3}\Big|_1^{10} = 20\sqrt{10} - 2.$$

6.4. Parametrizăm curba prin $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2$, $t \in [0, 2\pi]$. Atunci $\mathrm{d}s = 3\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - 2y + z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} (9\cos^2 t - 6\sin t + 2)3\,\mathrm{d}t \\ &= 27\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t + 18\cos t\Big|_0^{2\pi} + 12\pi = 39\pi.\end{aligned}$$

6.5. Masa curbei C cu densitatea ρ se calculează cu $M = \int_C \rho\,\mathrm{d}s$. Pentru problema noastră $x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ şi $y = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$, de unde $x' = \operatorname{sh} t$ şi $y' = \operatorname{ch} t$ şi $z' = 1$. Atunci $\mathrm{d}s = \frac{e^t+e^{-t}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$. Pentru $\rho = x = \operatorname{ch} t$ avem

$$M = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{\ln 2} (e^{2t} + e^{-2t} + 2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{e^{2\ln 2} - 1}{2} - \frac{e^{-2\ln 2} - 1}{2} + 2\ln 2\right) = \frac{15}{16\sqrt{2}} + \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}.$$