Seminar 7

Integrale curbilinii de speţa a II-a

7.1. Să se calculeze $\int_C y\,\mathrm{d}x + x^2 dy$, unde C este cercul $x^2 + y^2 = 4$ parcurs în sens trigonometric.

7.2. $\int_C (yz + 2x)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + (xy + 2z)\,\mathrm{d}z$, unde C este curba aflată la intersecţia suprafeţelor $x^2 + y^2 = 1$ şi $z = 1$, parcursă de la punctul $(1, 0, 1)$ la $(0, 1, 1)$ pe drumul cel mai scurt.

7.3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F} = x\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + xz\vec{\kappa}$ ce acţionează asupra unui punct ce se mişcă pe segmentul AB de la $A(1, -1, 3)$ la $B(2, 1, 0)$.

7.4. Să se calculeze $\int_C (x + y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y$, unde C este curba închisă obţinută prin intersecţia curbelor

$$C : \begin{cases} xy = 2 \\ y = 2x \qquad x \geq 0, \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

iar sensul de parcurgere al curbei C este cel trigonometric.

7.5. Să se calculeze

$$\int_{(0,0,1)}^{\left(1,\pi,\frac{\pi}{2}\right)} (e^x \cos y + yz)\,\mathrm{d}x + (xz - e^x \sin y)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z.$$

7.6. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât integrala

$$I = \int_{\widehat{AB}} 2x \ln z\,\mathrm{d}x + \frac{1}{z} e^y\,\mathrm{d}y + \frac{1}{z^2}(ax^2 z + be^y)\,\mathrm{d}z,$$

să nu depindă de drum. Arcul $\widehat{AB}$ este o curbă din semispaţiul $z > 0$ cu extremităţile $A(1, 0, 1)$ şi $B(-1, 1, e)$. Determinaţi valoarea lui I.

Exerciţii suplimentare

7.7. Să se calculeze $\int_C \frac{\mathrm{d}x}{y} - \sqrt{2x}\,\mathrm{d}y$, unde C este curba de ecuaţie

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y \geq 0, \end{cases}$$

parcursă de la $A(2,0)$ la $B(0,0)$.

7.8. Să se calculeze $\int_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, unde $\vec{v} = (x+y)\vec{\imath} + (x-y)\vec{\jmath}$ iar C este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parcursă în sens trigonometric.

7.9. Să se calculeze

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,5)} yz(2x+y+z)\,\mathrm{d}x + zx(x+2y+z)\,\mathrm{d}y + xy(x+y+2z)\,\mathrm{d}z.$$

Indicaţii

7.1. Formula generală de calcul pentru integrală curbilinie de speţa a doua pe o curbă C parametrizată prin

$$C : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad t \in [a,b]$$

este

$$\int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \{P(x(t),y(t),z(t)) \cdot x'(t) + \\ + Q(x(t),y(t),z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t)) \cdot z'(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

Ecuaţia unui cerc cu centrul de coordonate (x_0, y_0) şi rază r este

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2.$$

Se parametrizează prin

$$C : \begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

În cazul acestei probleme, ecuaţia $x^2 + y^2 = 4$ reprezintă un cerc cu centrul în origine şi raza $r = 2$. Parametrizarea va fi

$$C : \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Valoarea integralei va fi

$$\begin{aligned} \int_C y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} [2\sin t \cdot (2\cos t)' + (2\cos t)^2 \cdot (2\sin t)']\,\mathrm{d}t \\ &= -4\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t + 8\int_0^{2\pi} \cos^3 t\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t + 8\int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

În cea de-a doua integrală facem schimbarea de variabile $u = \sin t$ şi integrala devine 0 datorită capetelor de integrare. Prima integrală se desface în două. Primitiva va fi $t - \frac{\sin 2t}{2}$. Valoarea integralei este -4π.

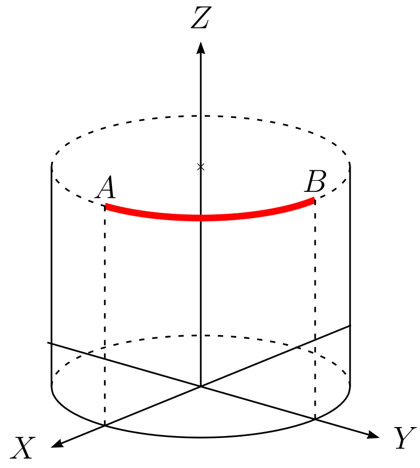


Figura 7.1: Drumul C este arcul AB

7.2. Intersecţia cilindrului $x^2+y^2=1$ cu planul $z=\ 1$ este un cerc. Curba C este porţiunea de pe cerc cuprinsă între punctele $A(1,0,1)$ şi $B(0,1,1)$ pe drumul cel mai scurt.
Vom obţine o parametrizare a curbei C folosind parametrizarea unui cerc plan. Ecuaţia unui cerc cu centrul de coordonate (x_0,y_0) şi rază r este

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,$$

şi se parametrizează prin

$$C:\ \begin{cases} x=x_0+r\cos t, \\ y=y_0+r\sin t. \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi).$$

În cazul nostru plecând de la ecuaţia $x^2+y^2=1$ avem $x=\cos t$ şi $y=\sin t$. Parametrul t variază în cazul nostru doar de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, pentru că se parcurge un sfert de cerc. Parametrizarea curbei C este

$$C\colon \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=1 \end{cases} \quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Cu această parametrizare, integrala dată se calculează astfel

$$\begin{aligned}\int_{AB}(yz+2x)\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+(xy+2z)\,\mathrm{d}z \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-(\sin t+2\cos t)\sin t+\cos^2 t+0\right]\,\mathrm{d}t \\ &=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t-\sin 2t)\,\mathrm{d}t=\left.\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{\cos 2t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-1.\end{aligned}$$

7.3. Trebuie să obţinem mai întâi o parametrizare a segmentului AB. Pentru aceasta scriem ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte $A(x_A,y_A,z_A)$ şi $B(x_B,y_B,z_B)$:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}=t.$$

Se obţine

$$AB: \begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A, \\ y = (y_B - y_A)t + y_A, \\ z = (z_B - z_A)t + z_A. \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

În cazul nostru, $A(-1,2,1)$ şi $B(2,3,1)$, deci parametrizarea segmentului AB este

$$AB: \begin{cases} x = t+1, \\ y = 2t-1, \\ z = -3t+3. \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

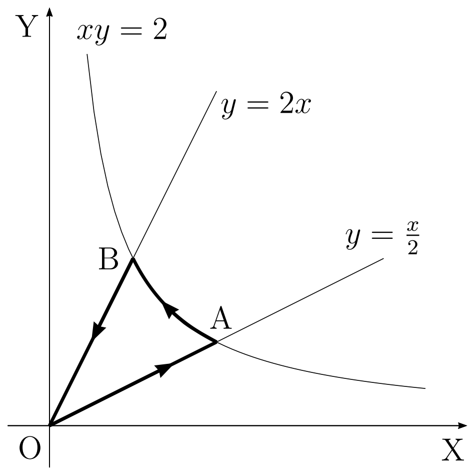
Lucru mecanic va fi

$$\begin{aligned} L &= \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[t+1-2(2t-1)^2 - 3(t+1)(-3t+3)\right]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^2+9t-10)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} + \frac{9}{2} - 10 = -\frac{31}{6}. \end{aligned}$$

7.4. Notăm cu A punctul din primul cadran aflat la intersecţia hiperbolei $xy = 2$ cu dreapta $y = x/2$ şi cu B punctul de intersecţie al hiperbolei $xy = 2$ cu dreapta $y = 2x$. Pentru a obţine coordonatele lui A rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} xy = 2 \\ y = x/2. \end{cases}$$

Obţinem $x^2 = 4$, $x = 2$ şi $y = 1$. Pentru a obţine coordonatele lui B rezolvăm sistemul format din ecuaţiile hiperbolei $xy = 2$ şi a celeilalte drepte $y = 2x$. Cele două puncte din primul cadran au coordonatele $A(2,1)$ şi $B(1,2)$. Pentru drumuri, avem ecuaţiile explicite:



$$\begin{aligned} OA&: \quad y = \frac{x}{2},\ x \in [0,2], \\ BA&: \quad y = \frac{2}{x},\ x \in [1,2], \\ OB&: \quad y = 2x,\ x \in [0,1]. \end{aligned}$$

Integrala curbilinie se calculează astfel

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = \int_{OA} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + \int_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + \int_{BO} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_{OA} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}. \\ \int_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y &= \int_2^1 \left(x + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x = -3 - 2\ln 2. \\ \int_{BO} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y &= \int_1^0 (3x - 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

având ca sumă $-2\ln 2$.

7.5. Arătăm că $\omega = (e^x \cos y + yz)\,\mathrm{d}x + (xz - e^x \sin y)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ este formă diferenţială exactă. Fie

$$P(x,y,z) = e^x \cos y + yz, \quad Q(x,y,z) = xz - e^x \sin y, \quad R(x,y,z) = xy.$$

Aplicăm rezultatul

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi simplu conexă. Dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, $P, Q, R \in C^1(D)$ este o formă diferenţială cu proprietatea că $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ atunci ω este o formă diferenţială exactă.

Calculăm derivatele parţiale

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = x = \frac{\partial R}{\partial y}$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = y = \frac{\partial P}{\partial z},$$

şi egalitatea lor arată că ω este formă diferenţială exactă pe $\mathbb{R}^2$ şi integrala dată nu depinde de drum. Calculăm primitiva formei diferenţiale exacte ω, aplicând formula

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,\mathrm{d}t.$$

pentru $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,1)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,1)\,\mathrm{d}t + \int_1^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^y (x - e^x \sin t)\,\mathrm{d}t + \int_1^z xy\,\mathrm{d}t \\ &= e^x - 1 + xy + e^x(\cos y - 1) + xy(z-1) = xyz + e^x \cos y - 1.\end{aligned}$$

Valoarea integralei va fi

$$\int_{(0,0,1)}^{\left(1,\pi,\frac{\pi}{2}\right)} \omega = \phi\left(1, \pi, \frac{\pi}{2}\right) - \phi(0,0,1) = \frac{\pi^2}{2} - e - 1.$$

7.6. Fie $P = 2x \ln z$, $Q = \frac{1}{z}e^y$ şi $R = \frac{1}{z^2}(ax^2 z + be^y)$. Integrala nu depinde de drum dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este o diferenţială exactă. Pentru că semispaţiul $z > 0$ este o mulţime deschisă şi simplu conexă, impunem condiţiile ca derivatele partiale să fie egale. Avem $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{be^y}{z^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{e^y}{z^2}$, de unde $b = -1$. Avem $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2x}{z}$ şi $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2axz}{z^2}$, de unde $a = 1$. Funcţia ϕ se calculează prin

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \int_1^x P(t,0,1)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,1)\,\mathrm{d}t + \int_1^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^y - 1 + x^2 \ln z + \frac{e^y}{z} - e^y = x^2 \ln z + \frac{e^y}{z} - 1.\end{aligned}$$

Valoarea integralei date este $I = \phi(-1, 1, e) - \phi(1, 0, 1) = 1$.

7.7. $-\pi - 4/3$.

7.8. 0.

7.9. 80.