Seminar 9

Funcţii complexe

9.1. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $z^3 = i$.

9.2. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $e^z + 1 = 0$.

9.3. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ ecuaţia $\sqrt{3} \cdot \sin z + i \cos z = 1$.

9.4. Să se determine funcţia olomorfă f pentru care $\mathrm{Re}(f) = x^2 - y^2 + 2x$, unde $z = x + iy$ şi $f(i) = 2i - 1$.

9.5. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$ pe mulţimea $|z| > 0$.

9.6. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z) = \frac{1}{z^2+z-6}$ pe mulţimea $0 < |z-2| < 5$.

9.7. Să se dezvolte în serie Laurent funcţia $f(z) = \frac{1}{z^2+z-6}$ pe mulţimea $|z-2| > 5$.

Indicaţii

9.1. $z = i^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\mathrm{Log}(i)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$. Dacă $k = 0$ atunci $z = \frac{\sqrt{3}}{3} + i\frac{1}{2}$. Dacă $k = 1$, atunci $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. Dacă $k = 2$ atunci $z = -i$. În concluzie $z \in \left\{ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, -i \right\}$.
9.2. $z = \mathrm{Log}(-1) = i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
9.3. Se notează $e^{iz} = w$ şi se ajunge la ecuaţia $(\sqrt{3} - 1)w^2 - 2iw - 1 - \sqrt{3} = 0$. În final

$$z \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \right\}.$$

9.4. $f(z) = z^2 + 2z$
9.5. $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots$
9.6. $f(z) = -\frac{1}{25} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n (z-2)^n = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{z-2} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125}(z-2) - \dots$
9.7. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{5}{(z-2)^3} + \frac{5^2}{(z-2)^4} - \frac{5^3}{(z-2)^5} + \dots$