Tema 1

Să se rezolve minim trei din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 1.1. $\displaystyle\iint_D (y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este interiorul triunghiului ABC cu $A(2,2)$, $B(4,0)$ şi $C(4,4)$.

Problema 1.2. $\displaystyle\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este interiorul triunghiului ABC cu $A(-4,2)$, $B(-2,0)$ şi $C(-2,2)$.

Problema 1.3. $\displaystyle\iint_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul plan care verifică inegalităţile $x^2+y^2 \leq 4$, $x+y \geq 0$, $y \geq 0$.

Problema 1.4. $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$, unde D este definit de $x^2+y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

Problema 1.5. $\displaystyle\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este definit de $x^2+y^2 \leq 4$.

Răspunsuri: 1.1 $-\frac{16}{3}$
1.2 $-\frac{8}{3}$
1.3 $\frac{3\pi}{2}+\frac{5+4\sqrt{2}}{3}$
1.4 $\pi(\sqrt{2}-1)$
1.5 $\frac{16\pi}{3}$

Tema 2

Să se rezolve minim trei din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 2.1. $\displaystyle\iiint_V \frac{z^3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}{\sqrt{5 - x^2 - y^2 - z^2}}$, unde V este corpul definit de inegalităţile $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ şi $y, z \geq 0$.

Problema 2.2. $\displaystyle\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, unde V este corpul definit de inegalităţile $x^2 + y^2 \leq z^2$ şi $0 \leq z \leq 3$.

Problema 2.3. $\displaystyle\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, unde V este corpul definit de $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ şi $z \geq 0$.

Problema 2.4. $\displaystyle\iiint_V z\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, unde V este corpul definit de inegalităţile $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ şi $z \geq 0$.

Problema 2.5. Volumul corpului delimitat de suprafeţele $x^2 + y^2 = 4 - z$ şi $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Răspunsuri: 2.1 $\pi \cdot \frac{50\sqrt{5}-41}{15}$
2.2 $\frac{81\pi}{4}$
2.3 $\frac{\pi}{4}$
2.4 $\frac{64\pi}{15}$
2.5 $\frac{\pi}{12}(121 - 17\sqrt{17})$

Tema 3

Să se rezolve minim trei din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 3.1. Aria suprafeţei $x = (5+2\cos v)\cos u$, $y = (5+2\cos v)\sin u$, $z = 2\sin v$, $u, v \in [0, 2\pi]$.

Problema 3.2. $\displaystyle\iint_S z \,\mathrm{d}\sigma$, unde S este porţiunea din suprafaţa $x^2+y^2 = 2z$ care verifică inegalităţile $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$.

Problema 3.3. $\displaystyle\iint_S z^3 \,\mathrm{d}\sigma$, unde S este porţiunea din suprafaţa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, care verifică inegalităţile $z \geq 0$.

Problema 3.4. Fluxul câmpului $\vec{v} = (y^3 + z)\vec{\imath} + (x^2 + y^2)\vec{\jmath} + xy\vec{\kappa}$ pe faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Problema 3.5. Aria suprafeţei $z = x^2 + y^2$, $z \leq 4$.

Problema 3.6. $\displaystyle\int_C y \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}y + x \,\mathrm{d}z$, unde C este curba aflată la intersecţia suprafeţelor $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ şi $x + y + z = 0$ care este parcursă în sens trigonometric, dacă este privită dinspre partea pozitivă a axei OZ.

Răspunsuri: 3.1 $40\pi^2$
3.2 $\pi \cdot \frac{25\sqrt{5}+1}{15}$
3.3 $\frac{\pi}{2}$
3.4 0
3.5 $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17-1})$
3.6 $-\frac{27\pi}{\sqrt{3}}$

Tema 4

Să se rezolve minim patru din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 4.1. Să se integreze ecuaţia $x' = x(2 - x)$.

Problema 4.2. $[x^2 y e^{x-y}(3 + x)]\,\mathrm{d}x + [1 + x^3 e^{x-y}(1 - y)]\,\mathrm{d}y = 0$.

Problema 4.3. $(t + x)x' = 2$.

Problema 4.4. Să se rezolve problema Cauchy $txx' - 1 = 0$, $x(1) = 4$.

Problema 4.5. $(x - y - 2)\,\mathrm{d}y + (x + y)\,\mathrm{d}x = 0$.

Problema 4.6. $t^2 x' = (2 + x)x$.

Problema 4.7. Să se determine soluţia ecuaţiei $t^3 x' = 2x + 1$ care verifică condiţia $\lim_{t\to\infty} x(t) = 1$.

Problema 4.8. Să se rezolve problema Cauchy $x' = \sqrt{1 + x^2}$, $x(0) = \operatorname{sh} 2$.

Problema 4.9. Să se integreze $(t - x)x' = x + t$.

Răspunsuri: 4.1 ec. cu var. sep., $x = 0$ şi $x = 2$ sol. sing. şi $x = \frac{2Ce^{2t}}{1+ce^{2t}}$ sol. generală
4.2 ec. cu dif. totală exactă cu sol. gen. $y + yx^3 e^{x-y} = C$
4.3 ec. reduc. la ec. omogenă cu sol gen. $x - 2\ln(t + x + 2) = C$
4.4 ec. cu var. sep. cu sol. particulară $x(t) = \sqrt{2\ln x + 16}$
4.5 ec. cu dif. totala exactă cu sol. $x^2 - y^2 + 2xy - 4y = C$
4.6 ec. cu var. sep. sau Bernoulli cu sol $x = \frac{2C}{e^{2/t} - C}$
4.7 ec. cu var. sep. sau liniară cu sol. partic. $x(t) = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{2}$
4.8 ec. cu var. sep. cu sol. part. $x(t) = \operatorname{sh}(2 + t)$
4.9 ec. omogenă cu sol. generală în formă implicită $\ln\sqrt{x^2 + t^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{t} = C$.

Tema 5

Să se rezolve minim patru din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 5.1. $tx' + 3x = 2t^5$, $x(2) = 1$.

Problema 5.2. $x' = 5 - \dfrac{3x}{100 + 2t}$, $x(0) = 50$.

Problema 5.3. $2x = 3tx' - 2\sin x'$.

Problema 5.4. $xx' + t = \sqrt{t^2 + x^2}$.

Problema 5.5. $3x^2x' + x^3 = e^{-t}$.

Problema 5.6. $x' - x\cos t = x^2 \cos t$.

Problema 5.7. $2t^2x' = t^2x^2 + 1$ şi $x^* = \frac{a}{t}$.

Răspunsuri: 5.1 ec. liniară cu sol. part. $x(t) = \frac{t^5}{4} - \frac{56}{t^3}$
5.2 ec. liniară cu sol. part. $x(t) = 2(t + 50) - 50\left(\frac{50}{t+50}\right)^{\frac{3}{2}}$
5.3 ec. Lagrange cu sol. gen. în formă parametrică $t = \frac{2\sin p}{p} + \frac{4\cos p}{p^2} - \frac{4\sin p}{p^3} + \frac{C}{p^3}$ şi $x = 2\sin p + \frac{6\cos p}{p} - \frac{6\sin p}{p^2} + \frac{3C}{2p^2}$
5.4 ec. omogenă cu sol. gen. $x(t) = \pm\sqrt{2Ct + C^2}$
5.5 ec. Bernoulli cu sol. gen. $x(t) = e^{-\frac{t}{3}}\sqrt[3]{t + C}$
5.6 ec. Bernoulli cu sol. gen. $x(t) = \frac{1}{Ce^{-\sin t} - 1}$
5.7 ec. Riccati cu $a = -1$ şi sol. gen. $x(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t\left(c - \frac{\ln t}{2}\right)}$

Tema 6

Să se rezolve minim trei din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 6.1. $x'' - 7x' + 6x = \sin t + 3e^t$.

Problema 6.2. $x''' + 4x'' + 13x' = e^{-2t}$.

Problema 6.3. $x^{(4)} + 2x^{(3)} + 5x'' + 8x' + 4x = 40e^{-t} + 2$.

Problema 6.4. $x'' + 4x' + 4x = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -4$.

Problema 6.5. $x^{(4)} - x'' - 6x = 6e^t$.

Problema 6.6. $x'' + 2x' - 8x = 18e^{-t}$.

Răspunsuri: 6.1 $x(t) = C_1e^{6t} + C_2e^t + \frac{7}{74}\cos t + \frac{5}{74}\sin t - \frac{3}{5}te^t$.
6.2 $x(t) = C_1 + e^{-2t}(C_2\cos 3t + C_3\sin 3t) - \frac{1}{18}e^{-2t}$.
6.3 $x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3\cos 2t + C_4\sin 2t + 4t^2e^{-t} + \frac{1}{2}$.
6.4 $x(t) = 1 - 4te^{-2t}$.
6.5 $x(t) = C_1e^{t\sqrt{3}} + C_2e^{-t\sqrt{3}} + C_3\cos(t\sqrt{2}) + C_4\sin(t\sqrt{2}) - e^t$.
6.6 $x(t) = C_1e^{-4t} + C_2e^{2t} - 2e^{-t}$.

Tema 7

Să se rezolve minim trei din următoarele sisteme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 7.1.

$$\begin{cases} x' + y' + 5x + 3y = e^t \\ 2x' + y' + x + y = 2. \end{cases}$$

Problema 7.2.

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = 2y - z \\ z' = x + 2y. \end{cases}$$

Problema 7.3.

$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -y + 2z. \end{cases}$$

Problema 7.4.

$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = -x + y + 2z. \end{cases}$$

Răspunsuri:
7.1 $x = C_1e^t + C_2e^{-2t} - 3 - \frac{2}{3}te^t$ şi $y = -\frac{3}{2}C_1e^t - 3C_2e^{-2t} + \frac{1}{6}e^t + 5 + te^t$
7.2 $r_{1,2,3} = 1$ şi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + C_3e^t \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

7.3 $r_{1,2} = 1$ şi $r_3 = 2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7.4 $r_{1,2,3} = 1$ şi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tema 8

Să se rezolve minim trei din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 8.1.
$$\frac{\mathrm{d}x}{x-y+z}=\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Problema 8.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$xy\cdot u'_x-y^2\cdot u'_y+z^2\cdot u'_z=0$$

şi apoi soluţia care verifică $u(2,y,z)=y+z$.

Problema 8.3. Să scrie soluţia generală a ecuaţiei

$$(y-z)\cdot z'_x+(z-x)\cdot z'_y=x-y$$

şi apoi, să se determine suprafaţa integrală care conţine dreapta $x=y=z$.

Problema 8.4.
$$\frac{\mathrm{d}x}{5z-3y}=\frac{\mathrm{d}y}{3x-4z}=\frac{\mathrm{d}z}{4y-5x}.$$

Problema 8.5. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$xz\cdot u'_x-yz\cdot u'_y+xy\cdot u'_z=0$$

Problema 8.6. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x\cdot u'_x+y\cdot u'_y+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\cdot u'_z=0.$$

Să se determine apoi soluţia care verifică ecuaţia $u(x,y,0)=x^2-y^2$.

Problema 8.7. Să se determine soluţia ecuaţiei $3\cdot u'_x-2\cdot u'_y+u=x$ care verifică condiţia $u(x,0)=3x-3$.

Răspunsuri: 8.1 $C_1=\frac{y}{z}$ şi $C_2=\frac{x-(z-y)\ln z}{z}$.
8.2 $u=F(xy,\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$ şi $u=\frac{xy}{2}+\frac{xyz}{xy+z(x-2)}$.
8.3 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ sol. generală şi $(x+y+z)^2=3(x^2+y^2+z^2)$ sol. part.
8.4 $4x+5y+3z=C_1$ şi $x^2+y^2+z^2=C_2$.
8.5 $u=F(xy,\ln x-\frac{z^2}{2xy})$.
8.6 $u=F(\frac{x}{y},2\sqrt{x^2+y^2}-z^2)$ şi $u(x,y,z)=\frac{(2\sqrt{x^2+y^2}-z^2)^2\cdot(x^2-y^2)}{4(x^2+y^2)}$.
8.7 $u(x,y)=x-3+e^{\frac{y}{2}}(2x+3y)$.

Tema 9

Să se rezolve minim trei din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate:

Problema 9.1. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei coardei vibrante, aducând, în prealabil, ecuaţia la forma canonică, $z''_{t^2} = \nu^2 \cdot z''_{x^2}$.

Problema 9.2. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $z''_{x^2} + z''_{y^2} + 2z''_{xy} = 0$.

Problema 9.3. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $z''_{x^2}+4z''_{xy}+3z''_{y^2}+z'_x+3z'_y = 0$.

Problema 9.4. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $z''_{x^2} + z''_{xy} - 2z''_{y^2} + z'_x - z'_y = 0$.

Răspunsuri:
9.1 $z(x, t) = F(x - \nu t) + G(x + \nu t)$.
9.2 $z(x, t) = xF(y - x) + G(y - x)$.
9.3 $z(x, t) = e^{-x}F(y - x) + G(y - 3x)$.
9.4 $z(x, t) = e^{-x}F(y - 2x) + G(y + x)$.

Tema 10

Să se rezolve minim cinci din următoarele probleme, justificând răspunsul prin metode învăţate.

Să se determine transformata Laplace

Problema 10.1. $\mathcal{L}\left\{(t^2+3t-2)e^{-t}\right\}(s)$.

Problema 10.2. $\mathcal{L}\left\{t\,\mathrm{sh}\,2t\cos 3t\right\}(s)$.

Problema 10.3. $\mathcal{L}\left\{t\cos^3 3t\right\}(s)$.

Problema 10.4. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{e^u-1}{u}\,\mathrm{d}u\right\}(s)$.

Să se calculeze integralele

Problema 10.5. $\int_0^\infty \frac{\sin 4t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Problema 10.6. $\int_0^\infty \frac{e^{-a^2t}-e^{-b^2t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Să se determine funcţia $f(t)$ care are transformata Laplace

Problema 10.7. $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2(s^2+4)}$.

Problema 10.8. $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\frac{se^{-3s}}{(s-1)(s^2+2s+10)}$.

Problema 10.9. $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\ln\frac{s+2}{s+3}$.

Problema 10.10. $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(4s)$.

Răspunsuri:
10.1 $\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{3}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}$
10.2 $\frac{(s-2)^2-9}{2[(s-2)^2+9]^2}-\frac{(s+2)^2-9}{2[(s+2)^2+9]^2}$
10.3 $\frac{s^2-81}{4(s^2+81)^2}+\frac{3(s^2-9)}{4(s^2+9)^2}$
10.4 $\frac{1}{s}\ln\frac{s}{s-1}$
10.5 $\frac{\pi}{2}$
10.6 $2\ln\frac{b}{a}$
10.7 $f(t)=\frac{7}{25}e^{-t}+\frac{1}{5}te^{-t}-\frac{7}{25}\cos 2t+\frac{1}{25}\sin 2t$
10.8 $f(t)=\frac{1}{13}e^{t-3}-\frac{1}{13}e^{3-t}\cos(3t-9)+\frac{11}{39}e^{3-t}\sin(3t-9)$, $t\geq 3$ şi $f(t)=0$, $t<3$.
10.9 $f(t)=\frac{e^{-3t}-e^{-2t}}{t}$, $t>0$
10.10 $f(t)=\frac{\sin\frac{t}{4}}{t}$, $t>0$.