Seminar 1

Primitivele funcțiilor raționale

Toate integralele sunt de forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$, unde P, Q sunt polinoame cu coeficienți reali.

Să se calculeze integralele:

Problema 1.1.

a) $\displaystyle\int (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x - 2)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$

c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^5}$

d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}$

e) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+6}$

f) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{2x^2+x+1}$

Problema 1.2.

a) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x,$ *b)* $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}\,\mathrm{d}x.$

Problema 1.3.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x-2)}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)^3}.$

Problema 1.4.

a) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(x^2+1)}.$

Problema 1.5.

a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}$ *b)* $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x.$

Indicaţii şi răspunsuri

1.1. a) Se integrează cu formula $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $a \neq -1$. Obţinem

$$I = \frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - \frac{5x^2}{2} - 2x + C.$$

b) Se foloseşte formula $\int \frac{1}{x+a}\,\mathrm{d}x = \ln|x+a| + C$. Rezultă $I = \ln|x+2| + C$.

c) Avem

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^5} = \int (x-3)^{-5}\,\mathrm{d}x = \frac{(x-3)^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{(x-3)^4} + C.$$

d) Folosim formula $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, $a \neq 0$. Obţinem $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.
e) Fiindcă $(x^2+6)' = 2x$ putem scrie

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+6} = \int \frac{(x^2+6)'\,\mathrm{d}x}{x^2+6} = \int \frac{\mathrm{d}(x^2+6)}{x^2+6} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C = \ln(x^2+6) + C.$$

f) Fiindcă $(2x^2+x+1)' = 4x+1$, desfacem integrala în două

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{4x\,\mathrm{d}x}{2x^2+x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+1\,\mathrm{d}x}{2x^2+x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+x+1}.$$

Pentru a doua integrală folosim forma canonică $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Obţinem

$$I = \frac{1}{4}\ln(2x^2+x+1) - \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{4}\ln(2x^2+x+1) - \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

1.2. a) Fiindcă polinomul de la numărător are gradul mai mare decât cel de la numitor, facem împărţirea de polinoame. Se obţine câtul x^2+x+4 şi restul $4x^2+16x-8$. Cu teorema împărţirii cu rest $D = \hat{I}\cdot C + R$, rezultă

$$x^5 + x^4 - 8 = (x^3-4x)(x^2+x+4) + 4x^2 + 16x - 8.$$

Aşadar,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^3-4x)(x^2+x+4)+4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (x^2+x+4)\,\mathrm{d}x + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pentru că $x^3-4x = x(x^2-4) = x(x-2)(x+2)$ putem face descompunerea în fracţii simple

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} = \frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Înmulţind cu numitorul comun $x(x-2)(x+2)$, rezultă

$$4x^2+16x-8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

Dând valoarea lui $x=0$, obţinem $A=2$. Pentru $x=2$, avem $B=5$, iar pentru $x=-2$ se obţine $C=-3$. Deci

$$\int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{5}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-3}{x+2}\,\mathrm{d}x.$$

În final,

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C.$$

b) $I = -\frac{3}{4}\ln|x-1| + \ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$.
1.3. a) Se descompune în fracţii simple sub forma

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2},$$

cu $A=-1$, $B=-1$ şi $C=1$. Obţinem $I=-\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+\ln|x-2|$.
b) Are loc descompunerea $\frac{(3x+2)\,\mathrm{d}x}{x(x+1)^3}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}$. Atunci
$I=2\ln|x|-2\ln|x+1|+\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+C$.
1.4. a) Are loc descompunerea

$$\frac{x^3-3x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4},$$

cu $A=-4/3$, $B=1/3$, $C=7/3$, $D=-1/3$. Integrala va fi

$$I=-\frac{2}{3}\ln(x^2+1)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x+\frac{7}{6}\ln(x^2+4)-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

b) Expresia de sub integrală se descompune

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1},$$

cu $A=1/2$, $B=1/2$, $C=-1/2$, $D=0$. Integrala va fi

$$I=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

1.5. a) Scriem

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}&=\frac{1}{4}\int\frac{4\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Folosim integrarea prin părţi. Avem

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{2x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\cdot\left(\frac{-1}{x^2+4}\right)'\mathrm{d}x\\&=-\frac{x}{2(x^2+4)}-\frac{1}{2}\int x'\cdot\frac{-1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x=-\frac{x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

Atunci

$$I=\frac{x}{8(x^2+2)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

b) Are loc descompunerea

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2)^2},$$

cu $A=1$, $B=0$, $C=-1$, $D=-1$. Integrala va fi

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{-x+2}{4(x^2+2)}-\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$