Seminar 4

Integrale cu parametri

4.1. Să se calculeze $F'(y)$, unde $F(y) = \int_1^y \frac{\ln(1+xy)}{x}\,\mathrm{d}x$, $y > 1$.

4.2. Se dă $g(x,y) = \int_{x^2+y^2}^{x^3+y^3} f(x^2+y^2+t)\,\mathrm{d}t$. Se cere $\frac{\partial g}{\partial x}$.

4.3. Se dă $g(t) = \int_0^{t^2} \left(\int_{2x-t}^{2x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$. Să se determine $g'(t)$.

4.4. Să se determine valoarea integralei $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{\sin \pi x - \sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

4.5. Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2 x + m^2 \cdot \sin^2 x)\,\mathrm{d}x,\ m \geq 0$.

Temă:

4.6. Se dă $f(t) = \int_{a+t}^{b+t} \frac{\sin^2 tx}{x}\,\mathrm{d}x$. Să se calculeze $f'(t)$.

4.7. Se dă $F(t) = \int_0^t f(x) \cdot (t-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Să se calculeze $F^{(n)}(t)$.

4.8. Să se calculeze $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

4.9. Să se calculeze $\int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{\sin 6x \cdot \sin 4x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Indicaţii la problemele propuse

4.1.

$$F'(y) = \frac{2}{y}\ln(1+y^2) - \frac{1}{y}\ln(1+y).$$

4.2.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (3x^2+2x) f(x^2+y^2+x^3+y^3) - 4x f(2x^2+2y^2).$$

4.3. Notăm

$$f(x,t) = \int_{2x-t}^{2x+t} \sin(x^2+y^2-t^2)\,\mathrm{d}y.$$

Folosim formula de derivare a integralelor cu parametru.

$$g'(t) = 2tf(t^2,t) + \int_0^{t^2} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Se obţine

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2t \int_{2t^2-t}^{2t^2+t} \sin(t^4 - t^2 + y^2)\,\mathrm{d}y + \int_0^{t^2} \sin(x^2 + (2x+t)^2 - t^2)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_0^{t^2} \sin(x^2 + (2x-t)^2 - t^2)\,\mathrm{d}x - 2t \int_0^{t^2} \left(\int_{2x-t}^{2x+t} \cos(x^2 + y^2 - t^2)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

4.4. Putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-x} \cdot \frac{\sin \pi x - \sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x} \cdot \left(\int_1^\pi \cos tx\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_1^\pi \left(\int_0^\infty e^{-x} \cos tx\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Prin integrare prin părţi $\int_0^\infty e^{-x} \cos tx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2+1}$. Atunci $I = \operatorname{arctg} \pi - \frac{\pi}{4}$.
4.5. Avem o integrală cu parametrul m.

$$\begin{aligned} I'(m) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2m \sin^2 x}{\cos^2 x + m^2 \sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2m \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + m^2 \operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x}_{\operatorname{tg} x = t,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}} \\ &= 2m \int_0^\infty \frac{t^2}{1 + m^2 t^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Pentru $m \neq 1$, descompunem fracţia în fracţii simple

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(1+m^2 t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{1+m^2 t^2}.$$

Obţinem $A = C = 0,\ B = \frac{1}{m^2-1},\ D = \frac{-1}{m^2-1}$. Rezultă

$$\begin{aligned} I'(m) &= \frac{2m}{m^2-1} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{2m}{m^2-1} \int_0^\infty \frac{1}{1+m^2 t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2m}{m^2-1} \operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty - \frac{2m}{m^2-1} \cdot \frac{1}{m^2} \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + \frac{1}{m^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{m}{m^2-1}\pi - \frac{2 \operatorname{arctg}(mt)}{m^2-1} \Big|_0^\infty = \frac{m}{m^2-1} \cdot \pi - \frac{2}{m^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{m+1}. \end{aligned}$$

Pentru cazul $m = 1$, avem

$$I'(1) = \int_0^\infty t \cdot \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -\frac{t}{t^2+1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă

$$I(m) = \pi \int \frac{\mathrm{d}m}{m+1} = \pi\, \ln(m+1) + C.$$

Pentru calculul constantei, facem $m = 1$. Din enunţ, avem $I(1) = 0$, iar din rezultatul obţinut avem

$$I(1) = \pi \ln 2 + C \ \Rightarrow \pi \ln 2 + C = 0 \ \Rightarrow C = -\pi \ln 2.$$

Rezultă că $I(m) = \pi\, \ln \frac{m+1}{2}$.