Curs 1

Integrale triple

1.1 Integrala triplă pe paralelipiped

Definiţie 1.1. Fie $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Funcţia $F : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V dacă există numărul real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune a intervalului $[a, b]$: $\quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
orice diviziune a intervalului $[c, d]$: $\quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$
şi orice diviziune a intervalului $[e, f]$: $\quad e = z_0 < z_1 < \cdots < z_p = f$
aşa încât $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} < \delta$, şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, m$ şi $\chi_i \in [z_{i-1}, z_i]$, $i = 1, \ldots, p$ să avem

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} F(\xi_k, \eta_j, \chi_i) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})(z_i - z_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Notaţie 1.2. Dacă numărul I există, atunci el este unic şi se notează

$$\iiint_V F(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$$

Interpretare 1.3. Să considerăm un exemplu practic care ne conduce la noţiunea de integrală triplă. Avem un corp neomogen de forma unui paralelipiped dreptunghic V. Ne propunem să calculăm masa acestui corp dacă densitatea în fiecare punct este dată de funcţia $\rho : V \to \mathbb{R}$.

Împărţim paralelipipedul dreptunghic $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ în paralelipipede mai mici $V_{kji} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{i-1}, z_i]$, unde punctele x_k, $k = 1, \ldots, n$ reprezintă o diviziune a intervalului $[a, b]$, punctele y_j, $j = 1, \ldots, m$ reprezintă o diviziune a intervalului $[c, d]$, iar z_i, $i = 1, \ldots, p$ reprezintă o diviziune a intervalului $[e, f]$. Dacă în fiecare paralelipiped mic considerăm că densitatea este constantă, atunci masa unui paralelipiped mic este produsul dintre volum lui şi densitate. Dacă $(\xi_k, \eta_j, \chi_i) \in V_{kji}$ este un punct oarecare, atunci masa paralelipipedului V_{kji} este $\rho(\xi_k, \eta_j, \chi_i) \times (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})(z_i - z_{i-1})$. Rezultă

$$\begin{aligned} masa(V) &\approx \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_k, \eta_j, \chi_i) \cdot Volum(V_{kji}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} \rho(\xi_k, \eta_j, \chi_i) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})(z_i - z_{i-1}). \end{aligned}$$

La limită se obţine masa lui V.

Observaţie 1.4. Masa paralelipipedului $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ cu densitatea dată de funcţia $\rho : V \to \mathbb{R}$, se calculează cu formula

$$masa(V) = \iiint_V \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Propoziţie 1.5. Dacă F este integrabilă pe V atunci F este mărginită pe V.

Propoziţie 1.6. Dacă F, G sunt două funcţii integrabile pe V şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci funcţia $\alpha F + \beta G$ este integrabilă pe V şi

$$\iiint_V (\alpha F+\beta G)(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \alpha \iiint_V F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\beta \iiint_V G(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Propoziţie 1.7. Dacă F este o funcţie integrabilă şi pozitivă pe V, atunci

$$\iiint_V F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \geq 0.$$

Teoremă 1.8 (Formula de calcul)**.** Dacă $F : V \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe paralelipipedul $V = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Atunci

$$\iiint_V F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f F(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Exemplu 1.9. Să se calculeze masa corpului

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c \right\}$$

având densitatea $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

$$\begin{aligned}
masa(V) &= \iiint_V \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c (x + y + z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left(\int_0^b \left(c(x + y) + \frac{c^2}{2} \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \left(bcx + \frac{cb^2}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{abc(a + b + c)}{2}.
\end{aligned}$$

Definiţie 1.10. Mulţimea $V \subset \mathbb{R}^3$ are ***volum nul*** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există paralelipipedele V_i, $i = 1, 2, \ldots$ astfel încât

$$V \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{\infty} Volum(V_i) < \varepsilon.$$

Exemplu 1.11. Suportul unei suprafeţe netede pe porţiuni este o mulţime de volum nul. Există suprafeţe a căror suport nu este o mulţime de volum nul.

Propoziţie 1.12. Fie $F : V \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi $A \subset V$ o mulţime de volum nul. Dacă F este continuă pe $V \setminus A$ atunci F este integrabilă pe paralelipipedul V.

1.2 Integrale triple pe domenii simple

Definiţie 1.13. Fie V o mulţime mărginită şi fie un paralelipiped astfel încât $V \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. Spunem că $F : V \to \mathbb{R}$ este ***integrabilă pe*** V dacă funcţia

$$G(x,y,z) = \begin{cases} F(x,y,z), & (x,y,z) \in V \\ 0, & (x,y,z) \in [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \setminus V \end{cases}$$

este integrabilă pe $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. În acest caz scriem,

$$\iiint_V F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Observaţie 1.14. Se poate demonstra că valoarea integralei nu depinde de paralelipipedul $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ şi nici de funcţia G, care prelungeşte funcţia F pe paralelipiped.

Definiţie 1.15. Fie D o mulţime plană şi fie $h_1, h_2 : D \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1 pe D, cu proprietatea că $h_1(x,y) \leq h_2(x,y)$ pentru orice $(x,y) \in D$. Mulţimea

$$V = \{(x,y,z) |\, (x,y) \in D,\ h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$$

se numeşte ***simplă faţă de axa*** OZ. Mulţimea D reprezintă proiecţia lui V în planul XOY.

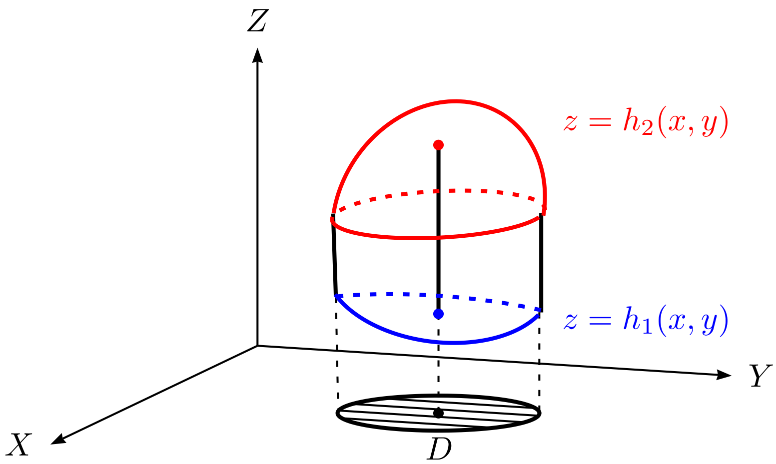
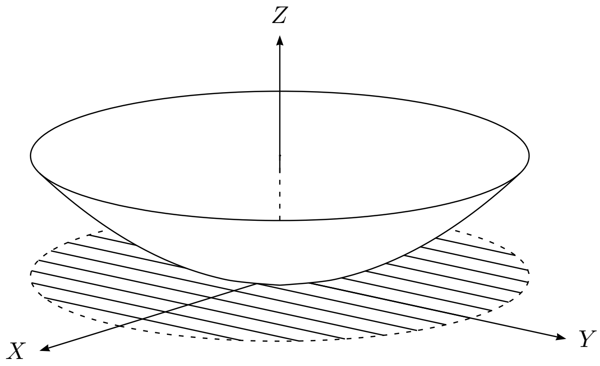


Figura 1.1: O mulţime simplă în raport cu axa OZ este o reuniune de segmente verticale cu extremităţile aflate pe două suprafeţe

Teoremă 1.16. Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime simplă în raport cu axa OZ şi $F : V \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe V. Atunci

$$\iiint_V F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} F(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Observaţie 1.17. Dacă mulţimea V nu este simplă faţă de niciuna dintre axele de coordonate, atunci împărţim corpul V în domenii mai mici care sunt simple faţă de cel puţin una dintre axe şi apoi aplică proprietatea de aditivitate a integralei triple faţă de domeniul de integrare.



Exemplu 1.18. Să se calculeze $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, unde V este corpul delimitat de paraboloidul $x^2+y^2=4z$ şi planul $z=1$.

Corpul V se poate scrie

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, (x,y)\in D,\ \frac{x^2+y^2}{4}\le z\le 1\right\},$$

unde D este interiorul cercului $x^2+y^2=4$.

Avem

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{4}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabile la coordonate polare rezultă

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^2\left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{20}\right)\Big|_0^2=\frac{32\pi}{15}.$$

Aplicaţii ale integralei triple

Definiţie 1.19. Spunem că o mulţimea $V\subset\mathbb{R}^3$ are volum dacă funcţia caracteristică a mulţimii

$$\chi_V(x)=\begin{cases}1, & x\in V\\ 0, & x\in\mathbb{R}^2\setminus V.\end{cases}$$

este o funcţie integrabilă pe $\mathbb{R}^2$. În acest caz, volumul corpului V se calculează cu formula

$$Volum(V)=\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Exemplu 1.20. Masa unui corp $V\subset\mathbb{R}^3$ cu densitatea punctuală dată de funcţia $\rho : V\to\mathbb{R}$ se calculează cu formula

$$masa(V)=\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Centrul de greutate al corpului V are coordonatele

$$x_G = \frac{\displaystyle\iiint_V x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}, \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iiint_V y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_G = \frac{\displaystyle\iiint_V z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}.$$

1.3 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Teoremă 1.21. Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^3$ şi $T : \Omega \to \mathbb{R}^3$ o aplicaţie injectivă de clasă C^1 astfel încât jacobianul transformării J să fie diferit de zero în orice punct din Ω. Fie $V = T(\Omega)$. Dacă $F : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă atunci

$$\iiint_V F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega (F \circ T)(u,v,w)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

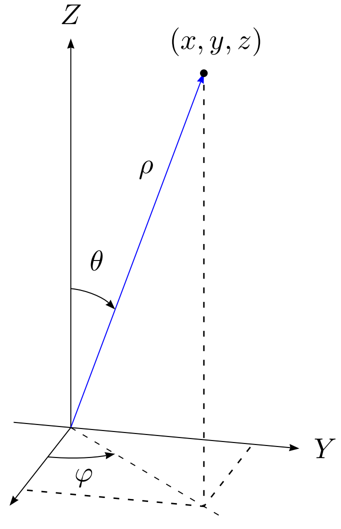
Observaţie 1.22. Când se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}, \quad (u,v,w) \in \Omega$$

jacobianul se calculează cu formula determinantului matricii lui Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$.

Noul corp Ω se obţine determinând frontiera acestuia din ecuaţiile frontierei vechiului corp V prin înlocuirea lui x cu $x(u,v,w)$, y cu $y(u,v,w)$ şi z cu $z(u,v,w)$.

În cazul în care frontiera domeniului V este sferă sau o porţiune de sferă, este utilă folosirea coordonatelor sferice ρ, φ şi θ. Se face schimbarea de variabile



$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, & \varphi \in [0, 2\pi) \\ z = \rho\cos\theta, & \theta \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$|J| = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_\theta \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 \sin\theta.$$

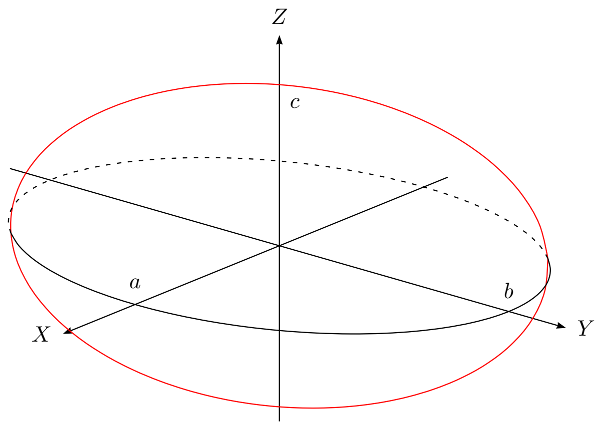
Exemplu 1.23. Să se calculeze volumul elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Trecem la coordonate sferice generalizate date de relaţiile

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = c\rho \cos\theta. \end{cases}$$

cu jacobianul $J = abc\rho^2 \sin\theta$. Noul domeniu este

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$



Avem

$$Volum(V) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 abc\rho^2 \sin\theta \, d\rho = 2\pi abc \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho\right) \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta\right)$$
$$= \frac{4\pi abc}{3}.$$

În particular, obţinem volumul sferei de rază R

$$Volum(\text{sferă}) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

1.4 Formula lui Gauss-Ostrogradski

Teoremă 1.24. Fie un corp $V \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, învelit de o suprafaţă S netedă pe porţiuni. Dacă $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{\kappa}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe V atunci

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z) \, dx \, dy \, dz,$$

sau

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei îndreptat înspre exteriorul corpului V.

Exemplu 1.25. Să se calculeze fluxul câmpului $\vec{v} = (x - z)\vec{\imath} - (3x + y)\vec{\jmath} + (z - xy^2)\vec{\kappa}$ pe faţa exterioară a suprafeţei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Aplicăm formula lui Gauss-Ostrogradski pentru bila mărginită de sfera centrată în origine de rază a. Divergenţa câmpului $\vec{v}$ este $\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 - 1 + 1 = 1$. Fluxul lui $\vec{v}$ este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V dx \, dy \, dz = Volumul(V) = \frac{4\pi a^3}{3}.$$