# Curs 13

# Transformata Fourier

## 13.1 Transformata Fourier integrală (TF)

**13.1 Definiţie.** *Funcţia* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definită prin*

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{13.1}$$

*se numeşte* **transformata Fourier integrală** *a funcţiei* $f$.

**13.2 Notaţie.** Transformata Fourier integrală sau simplu transformata Fourier a funcţiei $f$ se mai notează şi

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{ f(t) \}(\omega).$$

În domeniul ingineriei electrice, o altă formă întâlnită a transformatei Fourier este

$$\mathcal{F}\{ f(t) \}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

În acest caz, $\nu$ reprezintă frecvenţa de oscilaţie a semnalului măsurată în Hertz (sau oscilaţii pe secundă) şi este legată de frecvenţa unghiulară $\omega$ prin relaţia $\omega = 2\pi\nu$.

Unii definesc tranformata Fourier prin

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t,$$

pentru a avea o formă asemănătoare şi pentru transformata Fourier inversă.

**13.3 Observaţie.** Integrala din (13.1) este o integrală improprie în sensul valorii principale, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to \infty} \int_{-x}^{x} e^{-i\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Ea se poate scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega t) \operatorname{Re} f(t) + \sin \omega t \operatorname{Im} f(t)] \, \mathrm{d}t + i \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega t \operatorname{Im} f(t) - \sin(\omega t) \operatorname{Re} f(t)] \, \mathrm{d}t$$

şi este convergentă, dacă cele două integrale care o compun sunt convergente.

**13.4 Definiţie.** *O funcţie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *se numeşte absolut integrabilă pe* $\mathbb{R}$ *dacă integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

*este convergentă. Notăm cu* $\|f\|_1$, *valoarea ei, iar prin* $L_1(\mathbb{R})$ *vom desemna spaţiul funcţiilor complexe absolut integrabile pe* $\mathbb{R}$.

**13.5 Teoremă.** *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie din $L_1(\mathbb{R})$. Atunci $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcţie mărginită.*

*Demonstraţie.* Pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ avem

$$\left|\hat{f}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-i\omega t}\right| \cdot |f(t)|\;\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\;\mathrm{d}t = \|f\|_1 .$$

Aceasta demonstrează, pe de o parte, absolut convergenţa integralei $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$ şi deci, şi convergenţa ei, iar pe de altă parte mărginirea lui $\hat{f}$. □

**13.6 Teoremă.** *Fie $f \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci $\hat{f}$ este o funcţie uniformă continuă pe $\mathbb{R}$.*

*Demonstraţie.* Pentru orice $\omega$ şi $h$ numere reale şi orice $x > 0$ avem

$$\begin{aligned}\left|\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)\right| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}(e^{-iht} - 1)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]} |f(t)| \cdot \left|e^{-iht} - 1\right|\;\mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} |f(t)| \cdot \left|e^{-iht} - 1\right|\;\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Folosind inegalităţile

$$\begin{aligned}&\left|e^{-iht} - 1\right| \le \left|e^{-iht}\right| + 1 = 2 \\ &\left|e^{-iht} - 1\right| = \left|-i\int_0^{ht} e^{-iu}\,\mathrm{d}u\right| \le \left|\int_0^{ht} \left|e^{-iu}\right|\;\mathrm{d}u\right| = |ht|,\end{aligned}$$

deducem

$$\left|\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)\right| \le 2\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]} |f(t)|\;\mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} |f(t)|\,|ht|\;\mathrm{d}t \le 2\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]} |f(t)|\;\mathrm{d}t + x\,|h|\,\|f\|_1 .$$

Pentru că $f$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, rezultă că

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]} |f(t)|\;\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\;\mathrm{d}t - \int_{-x}^{x} |f(t)|\;\mathrm{d}t$$

tinde la zero când $x$ tinde la infinit. Pe de altă parte, putem alege $h$ care să tindă la zero astfel încât $x|h|$ să tindă la zero.

Am demonstrat că diferenţa $\hat{f}(\omega+h) - \hat{f}(\omega)$ tinde la zero atunci când $h$ tinde la zero, indiferent de $\omega$. Acest lucru demonstrează continuitatea uniformă a transformatei Fourier. □

**13.7 Exemplu.** Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funcţia $\chi_{[a,b]}$ definită prin

$$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [a,b] \end{cases}$$

este absolut integrabilă şi are transformata Fourier

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{(b-a)\omega}{2}\right) e^{-i\omega\frac{a+b}{2}}, & \omega \ne 0, \\ b-a, & \omega = 0. \end{cases}$$

Într-adevăr, $\hat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$. Dacă $\omega = 0$ atunci $\int_a^b e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = b-a$. Dacă $\omega \ne 0$, atunci

$$\int_a^b e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right|_a^b = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega} = \frac{2}{\omega} \cdot e^{-i\omega\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{e^{-i\omega\frac{b-a}{2}} - e^{i\omega\frac{b-a}{2}}}{-2i} = \frac{2}{\omega} e^{-i\omega\frac{a+b}{2}} \sin\frac{(b-a)\omega}{2}.$$

Observăm că această funcţie $\hat{\chi}_{[a,b]}$ are proprietăţile de a fi mărginită, continuă pe $\mathbb{R}$, cu limita la $\pm\infty$ egală cu zero.

**13.8 Teoremă.** *Fie $f \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci*

$$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

*Demonstraţie.* Din exemplul anterior am observat că $\chi_{(a,b)}(t)$ are proprietatea de a avea limita la infinit egală cu zero.

Orice funcţie în scară de forma

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{(a_k,b_k)}(t), \quad c_k \in \mathbb{C},\ a_k < b_k$$

are proprietatea de a avea limita la infinit egală cu zero.

Orice funcţie $f \in L_1(\mathbb{R})$ poate fi aproximată oricât de bine prin funcţii în scară, iar acest lucru demonstrează că $f$ are limita la infinit egală cu zero. $\square$

**13.9 Exemplu.** Vom arăta printr-un exemplu că ultimile două proprietăţi ale transformatei Fourier nu rămân adevărate dacă funcţia nu este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$.

Fie funcţia continuă sinc definită pentru orice $t \neq 0$ prin $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$. Conform Criteriului lui Dirichlet, această funcţie este integrabilă pe $\mathbb{R}$, fără să fie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Datorită parităţii, avem

$$\widehat{\operatorname{sinc}}(\omega) = 2\int_0^\infty \cos\omega t \cdot \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Folosind proprietăţile transformatei Laplace, avem

$$\begin{aligned}\widehat{\operatorname{sinc}}(\omega) &= 2\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\omega t\cdot\sin t}{t}\right\}(0) = \int_0^\infty \left[\mathcal{L}\left\{\sin t(\omega+1)\right\}(u) - \mathcal{L}\left\{\sin t(\omega-1)\right\}\right]\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{\omega+1}{u^2+(\omega+1)^2} - \frac{\omega-1}{u^2+(\omega-1)^2}\right]\mathrm{d}u = \operatorname{arctg}\frac{u}{\omega+1} - \operatorname{arctg}\frac{u}{\omega-1}\bigg|_0^\infty.\end{aligned}$$

Obţinem

$$\widehat{\operatorname{sinc}}(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > 1 \\ \pi, & |\omega| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & |\omega| = 1. \end{cases}$$

**13.10 Observaţie.** Dacă avem o funcţie pară $f$ pentru care transformata Fourier există, atunci aceasta se poate calcula cu formula

$$\hat{f}(\omega) = 2\int_0^\infty \cos\omega t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

iar dacă $f$ este o funcţie impară, atunci

$$\hat{f}(\omega) = -2i\int_0^\infty \sin\omega t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**13.11 Definiţie.** *Funcţia*

$$\hat{f}_c(\omega) = \int_0^\infty \cos\omega t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

*se numeşte* **transformata Fourier cosinus**, *iar funcţia*

$$\hat{f}_s(\omega) = \int_0^\infty \sin\omega t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$$

*se numeşte* **transformata Fourier sinus**.

### 13.1.1 Proprietăţile transformatei Fourier

**13.12 Teoremă.** *Transformata Fourier este liniară, adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ şi orice $f, g$ pentru care există tranformata Fourier, funcţia $\alpha f + \beta g$ admite transformată Fourier şi*

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \cdot \hat{f} + \beta \cdot \hat{g}.$$

*Demonstraţie.* Proprietatea rezultă din liniaritatea integralei. □

**13.13 Teoremă.** *Dacă funcţia $|f(t)|(1 + |t|)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$ atunci*

$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega) = -i\mathcal{F}\left\{tf(t)\right\}(\omega).$$

*Demonstraţie.* Condiţia ca $|f(t)|(1 + |t|)$ să fie integrabilă pe $\mathbb{R}$, asigură atât absolut integrabilitatea pe $\mathbb{R}$ a lui $f$ cât şi a funcţiei $tf(t)$. Folosind definiţia derivatei, avem

$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega) = \lim_{h\to 0}\frac{\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)}{h} = \lim_{h\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\cdot\frac{e^{-iht} - 1}{h}\,\mathrm{d}t.$$

Pentru orice $h \neq 0$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\cdot\frac{e^{-iht}-1}{h}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty}(-it)f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\left|\frac{e^{-iht}-1+iht}{h}\right|\mathrm{d}t.$$

Rămâne să demonstrăm că integrala din partea dreaptă a inegalităţii de mai sus poate fi făcută oricât de mică atunci când $h$ tinde la zero. Folosind inegalitatea

$$\left|e^{-iht} - 1 + iht\right| = \left|-i\int_0^{ht}(e^{-iu}-1)\,\mathrm{d}u\right| \le \left|\int_0^{ht}\min(2,|u|)\,\mathrm{d}u\right| \le \min\left(2|ht|, \frac{|h|^2|t|^2}{2}\right)$$

putem scrie, pentru orice $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\left|\frac{e^{-iht}-1+iht}{h}\right|\mathrm{d}t \le 2\int_{\mathbb{R}\setminus[-x,x]}|tf(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{x|h|}{2}\left\|tf(t)\right\|_1.$$

Alegând $x$ să tindă la infinit şi $h$ să tindă la zero astfel încât $xh$ tinde la zero, teorema este demonstrată. □

**13.14 Corolar.** *Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă funcţia $|f(t)|(1 + |t|^n)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$ atunci*

$$\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{(-it)^n f(t)\right\}(\omega).$$

*Demonstraţie.* Se face prin inducţie, aplicând teorema precedentă. □

**13.15 Teoremă.** *Fie funcţia derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cu proprietatea că $f' \in L_1(\mathbb{R})$ şi $f(\pm\infty) = 0$. Atunci*

$$\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\}(\omega) = i\omega\cdot\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega).$$

*Demonstraţie.* Folosim formula de integrare prin părţi.

$$\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\}(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t = e^{-i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)\,\mathrm{d}t = i\omega\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega).$$

□

**13.16 Corolar.** *Fie $n \in \mathbb{N}$. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie de $n$ ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f, f', \ldots, f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R})$ şi $f^{(k)}(\pm\infty) = 0$, pentru orice $0 \le k \le n-1$. Atunci*

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(\omega) = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}\left\{f(t)\right\}(\omega).$$

*Demonstraţie.* Se face prin inducţie, aplicând teorema precedentă. □

**13.17 Exemplu.** Vom calcula transformata Fourier a funcţiei $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.

Avem

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\left\{-ite^{-at^2}\right\}(\omega) = \frac{i}{2a}\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\}(\omega) = -\frac{\omega}{2a} \cdot \hat{f}(\omega).$$

Rezolvând această ecuaţie diferenţială liniară, obţinem soluţia $\hat{f}(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}$, unde

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} e^{-at^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} e^{-u}\frac{1}{2\sqrt{a}}u^{\frac{1}{2}-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{a}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Am demonstrat formula

$$\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad a > 0.$$

**13.18 Teoremă.** *Fie $f \in L_1(\mathbb{R})$ astfel încât $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

*În particular, în orice punct $t \in \mathbb{R}$ în care funcţia $f$ este continuă, avem*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

*Demonstraţie.* Fie $a > 0$. Notăm

$$I(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-a\omega^2 + i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Prin trecere la limită, avem

$$\lim_{a \searrow 0} I(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Pe de altă parte,

$$I(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega^2 + i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega^2} \cdot e^{-i\omega(u-t)}\,\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}u.$$

Aplicând exemplul anterior şi apoi făcând schimbarea de variabilă $u = t + 2\sqrt{a}v$ se obţine:

$$I(a,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{(u-t)^2}{4a}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t + 2\sqrt{a}v)e^{-v^2}\,\mathrm{d}v.$$

Cu schimbarea de variabilă $v = -w$ obţinem

$$I(a,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t - 2\sqrt{a}w)e^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t + 2\sqrt{a}v) + f(t - 2\sqrt{a}v)}{2}e^{-v^2}\,\mathrm{d}v.$$

Ştiind că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$, prin trecere la limită, se obţine

$$\lim_{a \searrow 0} I(a,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+) + f(t-)}{2}e^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

□

**13.19 Observaţie.** Dacă $f$ este continuă şi absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, cu transformata Fourier o funcţie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}(\omega)\right\}(t) = 2\pi \cdot f(-t).$$

**13.20 Definiţie.** *Fie $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Produsul de convoluţie al funcţiilor $f$ şi $g$ este funcţia*

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

**13.21 Teoremă.** *Fie $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ are loc*

$$\widehat{(f \star g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

*Demonstraţie.* Dacă $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ atunci $f \star g \in L_1(\mathbb{R})$. Acest lucru rezultă din

$$\begin{aligned}
\|f \star g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |(f \star g)(t)|\,\mathrm{d}t &\le \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \cdot |g(t-u)|\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t-u)|\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(v)|\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 .
\end{aligned}$$

Calculăm transformata Fourier a produsului de convoluţie.

$$\begin{aligned}
\widehat{(f \star g)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t-u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t-u)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \cdot e^{-i\omega v} g(v)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).
\end{aligned}$$

$\square$

**13.22 Corolar.** *Fie $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ are loc*

$$\widehat{(fg)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} \star \hat{g})(\omega).$$

*Demonstraţie.* Folosim inversa transformatei Fourier şi relaţia $\mathcal{F}\{f(-t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(-\omega)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\}(\omega) &= \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}\left\{\widehat{\hat{f}(\omega)}(-t) \cdot \widehat{\hat{g}(\omega)}(-t)\right\}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}\left\{\widehat{(\hat{f} \star \hat{g})}(-t)\right\}(\omega) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\mathcal{F}\left\{\widehat{(\hat{f} \star \hat{g})}(t)\right\}(-\omega) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} \star \hat{g})(\omega).
\end{aligned}$$

$\square$

**13.23 Teoremă.** *Fie $f$ pentru care este definită transformata Fourier. Atunci*

$$\mathcal{F}\left\{e^{iat} f(t)\right\}(\omega) = \hat{f}(\omega - a) \quad \text{şi} \quad \mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega), \quad \text{pentru orice } a, \omega \in \mathbb{R}.$$

*Demonstraţie.* Se aplică definiţia. $\square$

### 13.1.2 Exerciţii rezolvate

**13.24 Exemplu.** Să se determine tranformata Fourier a funcţiei $f(t) = \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) \cdot H\left(1 - \frac{|t|}{a}\right)$, unde $a > 0$ este un parametru, iar $H$ este funcţia lui Heaviside.

Folosind paritatea funcţiei $f$, rezultă

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= 2\int_0^\infty \cos\omega t \cdot \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cdot H\left(1 - \frac{t}{a}\right) \mathrm{d}t = 2\int_0^a \cos\omega t \cdot \left(1 - \frac{t}{a}\right) \mathrm{d}t \\ &= 2\left(1 - \frac{t}{a}\right) \frac{\sin\omega t}{\omega}\bigg|_0^a + \frac{2}{a}\int_0^a \frac{\sin\omega t}{\omega} \mathrm{d}t = \frac{4}{a\omega^2}\sin^2\frac{a\omega}{2}, \quad \omega \neq 0.\end{aligned}$$

Pentru $\omega = 0$, avem $\hat{f}(0) = 2\int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \mathrm{d}t = a$.

**13.25 Exemplu.** Să se determine tranformata Fourier a funcţiei $f(t) = e^{-a|t|}$, unde $a > 0$ este un parametru.

Folosind paritatea funcţiei $f$ şi transformata Laplace a funcţiei $\cos\omega t$ obţinem

$$\hat{f}(\omega) = 2\int_0^\infty \cos\omega t \cdot e^{-at} \mathrm{d}t = 2 \cdot \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(a) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

**13.26 Exemplu.** Să se determine tranformata Fourier a funcţiei $f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$, unde $a > 0$ este un parametru.

Notăm $g(t) = e^{-a|t|}$ şi folosim exerciţiul anterior şi inversa transformatei Fourier.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2a}\mathcal{F}\left\{\frac{2a}{t^2 + a^2}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\hat{g}(t)\}(\omega) = \frac{\pi}{a} \cdot g(-\omega) = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a|\omega|}.$$

**13.27 Exemplu.** Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{(t^2 + a^2)^2} \mathrm{d}t,$$

unde $a > 0$ este un parametru.

Folosim transformata Fourier în cosinus şi legătura cu transformata Fourier

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{(t^2 + a^2)^2} \mathrm{d}t = \mathcal{F}_c\left\{\frac{1}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{1}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega).$$

Dacă derivăm în raport cu $a$ formula $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2+a^2}\right\}(\omega) = \frac{\pi}{a} \cdot e^{-a|\omega|}$, avem

$$\mathcal{F}\left\{\frac{-2a}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega) = -\frac{\pi}{a^2} \cdot e^{-a|\omega|} - \frac{\pi|\omega|}{a}e^{-a|\omega|}.$$

De aici, deducem

$$\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{(t^2 + a^2)^2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4a^2}e^{-a|\omega|}\left(\frac{1}{a} + |\omega|\right).$$

**13.28 Exemplu.** Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^\infty \frac{t\sin\omega t}{(t^2 + a^2)^2} \mathrm{d}t,$$

unde $a > 0$ este un parametru.

Folosim transformata Fourier în sinus şi legătura cu transformata Fourier

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t\sin\omega t}{(t^2 + a^2)^2} \mathrm{d}t &= \mathcal{F}_s\left\{\frac{t}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega) = \frac{i}{2} \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{t}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega) \\ &= -\frac{i}{4}\mathcal{F}\left\{\frac{-2t}{(t^2 + a^2)^2}\right\}(\omega) = -\frac{i}{4}\mathcal{F}\left\{\left(\frac{1}{t^2 + a^2}\right)'\right\}(\omega) \\ &= -\frac{i}{4} \cdot i\omega \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + a^2}\right\}(\omega) = \frac{\pi\omega}{4a}e^{-a|\omega|}.\end{aligned}$$

**13.29 Exemplu.** Să se determine soluţia ecuaţiei diferenţiale $x'' = tx$, care verifică $\lim\limits_{|t|\to\infty} x(t) = 0$.

Aplicăm transformata Fourier. Avem $-\omega^2\hat{x} = i(\hat{x})'$. Ecuaţia liniară $(\hat{x})' - i\omega^2\hat{x} = 0$ are soluţia $\hat{x} = Ce^{i\frac{\omega^3}{3}}$. Trecând la inversă, obţinem

$$x(t) = \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega^3}{3}+i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{C}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{\omega^3}{3}+\omega t\right)\mathrm{d}\omega = CAi(t),$$

unde $Ai(t)$ este funcţia lui Airy.

**13.30 Exemplu.** Să se rezolve ecuaţia $-x'' + a^2x = f(t)$, când $x$ verifică condiţia $\lim_{|t|\to\infty} x(t) = 0$ şi $a > 0$ este un parametru dat.

Aplicând transformata Fourier obţinem $\omega^2\hat{x} + a^2\hat{x} = \hat{f}$, de unde

$$\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega)\cdot\frac{1}{\omega^2+a^2} = \hat{f}(\omega)\cdot\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2a}e^{-a|t|}\right\}(\omega).$$

Soluţia ecuaţiei va fi

$$x(t) = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-a|t-u|}\,\mathrm{d}u.$$

**13.31 Exemplu.** Să se determine soluţia ecuaţiei lui Laplace $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, care verifică condiţiile $u(x,0) = g(x)$ şi $\lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0$.

Considerăm transformata Fourier a funcţiei $u$ în variabila $x$.

$$U(\omega,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}u(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Ecuaţia se rescrie $-\omega^2U + U''_{y^2} = 0$, iar condiţiile devin $U(\omega,0) = \hat{g}(\omega)$ şi $\lim_{y\to\infty} U(\omega,y) = 0$. Ecuaţia este liniară de ordinul 2 în variabila $y$, cu soluţia $U = C_1(\omega)e^{|\omega|y} + C_2(\omega)e^{-|\omega|y}$. Din condiţia $U \to 0$, atunci când $y \to \infty$, deducem că $C_1(\omega) = 0$. Din condiţia $U(\omega,0) = \hat{g}(\omega)$ deducem că $C_2 = \hat{g}$. Soluţia se scrie

$$U(\omega,y) = \hat{g}(\omega)\cdot e^{-y|\omega|}.$$

Fiindcă $e^{-y|\omega|} = \hat{h}(\omega)$ cu $h(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$, obţinem

$$u(x,y) = (g\star h)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yg(u)}{(x-u)^2+y^2}\,\mathrm{d}u.$$

**13.32 Exemplu.** Să se determine soluţia ecuaţiei căldurii $u'_t = a^2u''_{x^2}$ în bara infinită, cu condiţia iniţială $u(x,0) = f(x)$, unde $a > 0$.

Fie $U(\omega,t)$ transformata Fourier a funcţiei $u(\cdot,t)$. Ecuaţia devine

$$U'_t + a^2\omega^2U = 0, \quad U(\omega,0) = \hat{f}(\omega).$$

Obţinem soluţia

$$U(\omega,t) = C(\omega)e^{-a^2\omega^2t}, \qquad \text{cu } C(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Ţinând cont că $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2a\sqrt{\pi t}}}\right\}(\omega) = e^{-a^2\omega^2t}$ rezultă

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2a\sqrt{t}v)e^{-v^2}\,\mathrm{d}v, \quad x\in\mathbb{R}, t>0.$$

**13.33 Exemplu.** Să se determine soluţia ecuaţiei coardei vibrante infinite $z''_{t^2} = \nu^2 z''_{x^2}$ cu condiţiile iniţiale $z(x,0) = f(x)$, $z'_t(x,0) = g(x)$, unde $\nu > 0$.

Fie $Z(\omega, t)$ transformata Fourier a funcţiei $z(\cdot, t)$. Ecuaţia devine

$$Z''_{t^2} + \nu^2\omega^2 Z = 0, \quad Z(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),\ Z'_t(\omega, 0) = \hat{g}(\omega).$$

Obţinem soluţia

$$Z(\omega, t) = C_1(\omega)\cos\nu\omega t + C_2(\omega)\sin\nu\omega t.$$

Din condiţiile iniţiale se obţin şi constantele

$$C_1(\omega) = \hat{f}(\omega) \quad \text{şi } C_2(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\nu\omega},\ \omega \neq 0.$$

Folosind formula $\hat{\chi}_{[-\nu t, \nu t]}(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\nu\omega t$, putem scrie soluţia sub forma

$$Z(\omega, t) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega)\left(e^{i\nu\omega t} + e^{-i\nu\omega t}\right) + \frac{1}{2\nu}\hat{g}(\omega) \cdot \hat{\chi}_{[-\nu t, \nu t]}(\omega).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} z(x,t) &= \frac{1}{2}\left[f(x+\nu t) + f(x-\nu t)\right] + \frac{1}{2\nu}(g \star \chi_{[-\nu t, \nu t]})(x) \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+\nu t) + f(x-\nu t)\right] + \frac{1}{2\nu}\int_{x-\nu t}^{x+\nu t} g(u)\,\mathrm{d}u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned}$$

**13.34 Exemplu.** Să se determine soluţia ecuaţiei $u'_t + vu'_x = 0$, care verifică condiţia $u(x,0) = f(x)$.

Fie $U(\omega, t)$ transformata Fourier a funcţiei $u(\cdot, t)$. Ecuaţia devine

$$U'_t + vi\omega U = 0, \quad U(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Soluţia acestei ecuaţii liniare omogene este

$$U(\omega, t) = C(\omega)e^{-iv\omega t}, \qquad \text{cu } C(\omega) = U(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale este

$$u(x,t) = f(x - vt).$$

| Originalul | Imaginea |
| --- | --- |
| $f(t)$ | $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t$ |
| $\chi_{[a,b]}(t)$ | $\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{(b-a)\omega}{2}\right) e^{-i\omega\frac{a+b}{2}}$ |
| $\left(1-\dfrac{\lvert t\rvert}{\lvert a\rvert}\right)\cdot H\left(1-\dfrac{\lvert t\rvert}{\lvert a\rvert}\right)$ | $\dfrac{4}{\lvert a\rvert\omega^2}\sin^2\dfrac{\lvert a\rvert\omega}{2}$ |
| $e^{-\lvert a\rvert t^2}$ | $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lvert a\rvert}}e^{-\frac{\omega^2}{4\lvert a\rvert}}$ |
| $e^{-\lvert a\rvert\lvert t\rvert}$ | $\dfrac{2\lvert a\rvert}{a^2+\omega^2}$ |
| $\dfrac{1}{t^2+a^2}$ | $\dfrac{\pi}{\lvert a\rvert}e^{-\lvert a\rvert\lvert\omega\rvert}$ |
| $\dfrac{1}{(t^2+a^2)^2}$ | $\dfrac{\pi}{2a^2}e^{-\lvert a\rvert\lvert\omega\rvert}\left(\dfrac{1}{\lvert a\rvert}+\lvert\omega\rvert\right)$ |

| Originalul | Imaginea |
| --- | --- |
| $f(t)$ | $\hat{f}(\omega)$ |
| $e^{iat}f(t)$ | $\hat{f}(\omega-a)$ |
| $f(t-a)$ | $e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$ |
| $(f\star g)(t)$ | $\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$ |
| $\hat{f}(t)$ | $2\pi f(-\omega)$ |
| $(-it)^n f(t)$ | $[\hat{f}(\omega)]^{(n)}$ |
| $f^{(n)}(t)$ | $(i\omega)^n\cdot\hat{f}(\omega)$ |

Figura 13.1: Transformata Fourier