

# Curs 2

## Integrale de suprafață

### 2.1 Pânze și suprafețe

**Definiție 2.1.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  o mulțime conexă și deschisă. O funcție continuă  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numește **pânză de suprafață**. Mulțimea  $S = \sigma(D)$  se numește **imaginea** pânzei.

**Observație 2.2.** Pânza  $\sigma$  este specificată dacă sunt precizate componentele funcției vectoriale  $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . O altă modalitate este folosirea vectorului de poziție  $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$  sau parametrizarea

$$\sigma: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in D.$$

**Observație 2.3.** Fie  $I_u = \{u \mid (u, v) \in D\}$  și  $I_v = \{v \mid (u, v) \in D\}$ . Pentru o pânză  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  și pentru orice  $(u, v) \in D$  funcțiile

$$\sigma_u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma_u(t) = \sigma(u, t) \quad \sigma_v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \sigma_v(t) = \sigma(t, v)$$

sunt drumuri în  $\mathbb{R}^3$ .

**Definiție 2.4.** O pânză  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numește **simplă** dacă  $\sigma$  este injectivă pe mulțimea  $D$ .

**Definiție 2.5.** O pânză  $\sigma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numește **netedă** dacă aplicația  $\sigma$  este de clasă  $C^1$  pe  $D$  și  $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$ , pentru orice  $(u, v) \in D$ , unde

$$\vec{r}'_u = x'_u(u, v)\vec{i} + y'_u(u, v)\vec{j} + z'_u(u, v)\vec{k}, \quad \vec{r}'_v = x'_v(u, v)\vec{i} + y'_v(u, v)\vec{j} + z'_v(u, v)\vec{k}$$

**Observație 2.6.** Vectorul  $\vec{r}'_u$  este tangent la curba  $\sigma_v$ , iar  $\vec{r}'_v$  este tangent la curba  $\sigma_u$ . Condiția  $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$  înseamnă că vectorii  $\vec{r}'_u$  și  $\vec{r}'_v$  sunt nenuli și liniar independenți. În aceste condiții ei formează vectorii directori ai planului tangent la suprafață. Ecuația planului tangent este

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & y - y(u_0, v_0) & z - z(u_0, v_0) \\ x'_u(u_0, v_0) & y'_u(u_0, v_0) & z'_u(u_0, v_0) \\ x'_v(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) & z'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Aceeași condiție

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$$

ne asigură în același timp că în fiecare punct al suprafeței putem considera vectorul normal

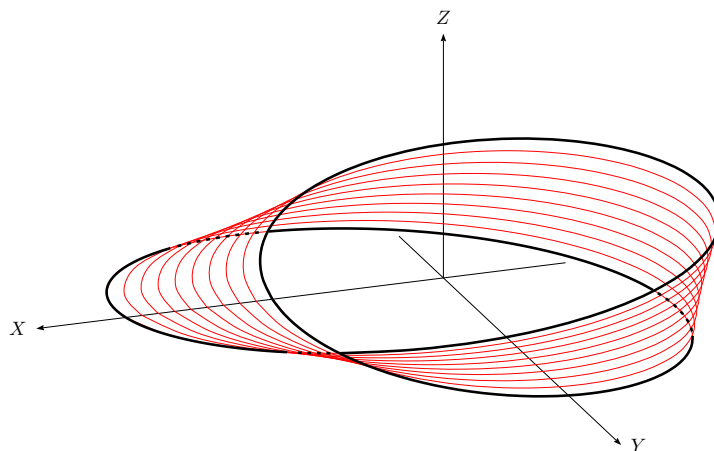
$$\vec{N} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v.$$

Versorul normalei este vectorul de lungime 1 pe direcția normalei, adică

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \pm \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}.$$

**Definiție 2.7.** O suprafață se numește **orientabilă** sau **cu două fețe** dacă normala la suprafață variază continuu pe întreaga suprafață. Pentru o astfel de suprafață alegerea unui semn pentru versorul normalei înseamnă alegerea unei fețe a suprafeței.

**Observație 2.8.** Există suprafețe care au o singură față. Un exemplu este banda lui Möbius.



**Definiție 2.9.** Două pânze  $\sigma_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  și  $\sigma_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se numesc **echivalente** dacă există o funcție  $h : D_1 \rightarrow D_2$  de clasă  $C^1$ , bijectivă, cu inversa de clasă  $C^1$  astfel încât jacobianul lui  $h$  să fie strict pozitiv în orice punct al lui  $D_1$ , iar  $\sigma_1 = \sigma_2 \circ h$ .

**Observație 2.10.** Notăm prin  $\sigma_1 \sim \sigma_2$  faptul că pânzele  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  sunt echivalente. Relația  $\sim$  este o relație de echivalență. De asemenea, se verifică imediat faptul că două pânze echivalente au aceeași imagine, iar dacă una este simplă sau netedă și cealaltă are aceeași proprietate.

**Definiție 2.11.** Se numește **suprafață** o clasă de pânze echivalente.

**Observație 2.12.** O suprafață este mulțimea tuturor pânzelor care au o imagine dată și o orientare precizată. O suprafață se poate specifica în 4 feluri:

- 1) forma parametrică:  $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in D$
- 2) forma vectorială:  $\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ ,  $(u, v) \in D$
- 3) forma explicită:  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$
- 4) forma implicită:  $F(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in A \subset \mathbb{R}^3$ , precizând orientarea aleasă.

Forma explicită nu este altceva decât o parametrizare de forma  $(u, v, f(u, v))$ , unde  $f$  este o funcție de clasă  $C^1$ . Forma implicită ne conduce la forma explicită cel puțin local, în jurul unui punct dat, datorită teoremei funcțiilor implicite.

Oricare din aceste forme duce la identificarea unei suprafețe și de aceea vom folosi noțiunea de suprafață în legătură cu oricare din aceste forme.

**Exemplu 2.13.** Pânza descrisă de

$$\begin{cases} x = (1 - u - v)x_A + ux_B + vx_C, \\ y = (1 - u - v)y_A + uy_B + vy_C, \\ z = (1 - u - v)z_A + uz_B + vz_C, \end{cases} \quad D = \{(u, v) \mid u \in (0, 1), v \in (0, 1), u + v < 1\}$$

are ca imagine porțiunea din planul determinat de punctele  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$  și  $C(x_C, y_C, z_C)$  aflată în interiorul triunghiului  $ABC$ . Pentru  $u \in (0, 1)$ , drumurile  $\sigma_u$  sunt segmente paralele cu  $AC$  care umple triunghiul. Pentru  $v \in (0, 1)$ , drumurile  $\sigma_v$  sunt segmente paralele cu  $AB$ .

**Exemplu 2.14.** Pânza descrisă de

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos v \sin u, \\ y = y_0 + r \sin v \sin u, \\ z = z_0 + r \cos u \end{cases} \quad u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

este o porțiune din sfera de ecuație  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ , cu centrul  $(x_0, y_0, z_0)$  și raza  $r$ . O altă pânză echivalentă este  $x = u + x_0$ ,  $y = v + y_0$  și  $z = z_0 + \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$ , pentru  $u, v > 0$ ,  $u^2 + v^2 < r^2$ . Într-adevăr, funcția  $h(u, v) = (r \cos v \sin u, r \sin v \sin u)$  cu jacobianul  $J(h) = r^2 \sin u \cos u > 0$  este de clasă  $C^1$  pe  $(0, \frac{\pi}{2})^2$  și are inversa  $h^{-1}(u, v) = \left(\arcsin \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{r}, \arctg \frac{v}{u}\right)$  de clasă  $C^1$ .

## 2.2 Aria unei suprafețe

**Definiție 2.15.** Fie  $\sigma$  o pânză netedă descrisă vectorial prin  $\vec{r}(u, v)$ , unde  $(u, v) \in D$  iar  $D$  este o mulțime deschisă și conexă. Fie o submulțime  $M \subset D$  care are arie. Numim **arie a porțiunii de suprafață**  $\sigma(M)$  numărul real

$$Aria(\sigma(M)) = \iint_M |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv.$$

**Observație 2.16.** O justificare pentru această formulă este următoarea: considerăm mulțimea  $M = [a, b] \times [c, d]$  și fie o partiție a intervalului  $[a, b]$ , respectiv  $[c, d]$

$$u_0 = a < u_1 < \dots < u_n = b, \quad v_0 = c < v_1 < \dots < v_m = d.$$

Notând  $M_{kj} = [u_{k-1}, u_k] \times [v_{j-1}, v_j]$  calculăm aria lui  $S$  însumând ariile imaginilor  $\sigma(M_{kj})$ . Aproximăm aria imaginii  $\sigma(M_{kj})$  cu aria paralelogramului format de vectorii

$$\vec{r}(u_k, v_{j-1}) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}), \quad \vec{r}(u_{k-1}, v_j) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}).$$

Dar

$$\begin{aligned} \vec{r}(u_k, v_{j-1}) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}) &= \vec{r}'_u(\xi_k, v_{j-1}) \cdot (u_k - u_{k-1}), \quad \xi_k \in (u_{k-1}, u_k) \\ \vec{r}(u_{k-1}, v_j) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}) &= \vec{r}'_v(u_{k-1}, \eta_j) \cdot (v_j - v_{j-1}), \quad \eta_j \in (v_{j-1}, v_j). \end{aligned}$$

Suma

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m [|\vec{r}(u_k, v_{j-1}) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1})| \times |\vec{r}(u_{k-1}, v_j) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1})|] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |\vec{r}'_u(\xi_k, v_{j-1}) \times \vec{r}'_v(u_{k-1}, \eta_j)| (u_k - u_{k-1})(v_j - v_{j-1}) \end{aligned}$$

aproximează suma

$$Aria(\sigma(M)) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m Aria(\sigma(M_{kj})).$$

Datorită faptului că funcțiile vectoriale  $\vec{r}'_u$  și  $\vec{r}'_v$  sunt continue pe  $D$  suma  $\Sigma_1$  are aceeași valoare la limită cu suma

$$\Sigma_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m |\vec{r}'_u(\xi_k, \eta_j) \times \vec{r}'_v(\xi_k, \eta_j)| (u_k - u_{k-1})(v_j - v_{j-1})$$

care tinde la integrala dublă

$$\iint_M |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv.$$

**Observație 2.17.** Se poate arăta că aria porțiunii suprafeței  $\sigma(M)$  nu depinde de parametrizare. Expresia

$$d\sigma = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv$$

se numește **element de suprafață**. Vom da în continuare câteva formule de calcul pentru  $d\sigma$ . Avem

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k},$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Atunci

$$d\sigma = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv.$$

Dacă suprafața are reprezentarea explicită  $z = z(x, y)$  atunci formula devine

$$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} \, dx \, dy.$$

O altă reprezentare a elementului de suprafață pentru pânze se poate obține plecând de la formula

$$\begin{aligned} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|^2 &= |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 \sin^2(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v) = |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 [1 - \cos^2(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v)] \\ &= |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 - |\vec{r}'_u|^2 |\vec{r}'_v|^2 \cos^2(\vec{r}'_u, \vec{r}'_v) \\ &= (\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_u) (\vec{r}'_v \cdot \vec{r}'_v) - (\vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v)^2 \end{aligned}$$

și notând

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_u = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 \\ G &= \vec{r}'_v \cdot \vec{r}'_v = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 \\ F &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'. \end{aligned}$$

Rezultă

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv.$$

**Exemplu 2.18.** Să calculăm aria sferei de rază  $R$ .

Datorită simetriei, aria sferei va fi de 8 ori aria porțiunii din octantul pozitiv, care se parametrizează

$$\begin{cases} x = R \cos v \sin u, \\ y = R \sin v \sin u, \\ z = R \cos u, \end{cases} \quad u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Avem

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = (R \cos v \cos u)^2 + (R \sin v \cos u)^2 + (-R \sin u)^2 = R^2$$

$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = (-R \sin v \sin u)^2 + (R \cos v \sin u)^2 + 0^2 = R^2 \sin^2 u$$

$$F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v' = 0$$

și atunci

$$\text{Aria}(\text{sferii}) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = 8R^2(-\cos u)|_0^{\frac{\pi}{2}}v|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2.$$

## 2.3 Integrale de suprafață în raport cu aria

**Definiție 2.19.** Fie  $\sigma$  o pânză netedă descrisă vectorial prin  $\vec{r}(u, v)$ , unde  $(u, v) \in D$  iar  $D$  este o mulțime deschisă și conexă. Fie o submulțime  $M \subset D$  care are arie. Fie  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă pe o mulțime deschisă  $U \subset \mathbb{R}^3$  ce conține pe  $S = \sigma(M)$ . Numim **integrală de suprafață în raport cu aria** (de speța I) numărul real

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\sigma = \iint_M F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv.$$

**Observație 2.20.** Dacă suprafața  $S$  este inclusă în planul  $XOY$  atunci  $z = 0$  și vectorul de poziție se reduce la  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . În acest caz,  $\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  și  $d\sigma = dx \, dy$ . Rezultă

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\sigma = \iint_S F(x, y, 0) \, dx \, dy.$$

Integrala de suprafață se reduce la o integrală dublă în cazul suprafețelor incluse în planul  $XOY$ .

**Observație 2.21.** Aria suprafeței  $S$  este dată de formula

$$\text{Aria}(S) = \iint_S d\sigma.$$

Masa unei plăci subțiri având forma suprafeței  $S$ , cu densitatea punctuală dată de funcția  $\rho$  se calculează cu formula

$$\text{masa}(S) = \iint_S \rho(x, y, z) \, d\sigma.$$

**Exemplu 2.22.** Să se calculeze  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \, d\sigma$ , unde  $S : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1$ .

Suprafața  $S$  este un con care se poate scrie în formă explicită  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , iar  $(x, y) \in M$ , unde  $M$  este discul centrat în origine de rază  $r = 1$ . Elementul de suprafață se calculează plecând de la

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

și folosind formula

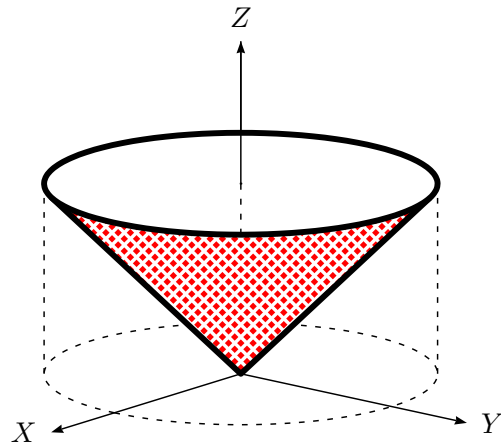
$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Obținem

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_M (x^2 + y^2 + x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \iint_M (x^2 + y^2) dx dy.$$

Trecând la coordonate polare, se obține

$$I = 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = 4\pi\sqrt{2} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$



## 2.4 Fluxul unui câmp vectorial printr-o suprafață

**Definiție 2.23.** Fie  $S$  o suprafață netedă orientabilă pe care fixăm o anumită orientare alegând un anumit semn pentru versorul normalei la suprafață. Fie un câmp vectorial continuu  $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  definit pe un domeniu care conține suprafața  $S$ . Se numește **fluxul lui**  $\vec{v}$  prin fața suprafeței  $S$  determinată de  $\vec{n}$ , integrala de suprafață

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

**Observație 2.24.** Produsul  $\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  se numește flux elementar. Dacă  $\vec{v}$  reprezintă câmpul vitezelor unui fluid în mișcare, atunci  $\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  este cantitatea de fluid ce trece prin elementul de suprafață în unitatea de timp, în sensul indicat de  $\vec{n}$ . Dacă  $\vec{v}$  și  $\vec{n}$  au sensuri opuse atunci produsul  $\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$  este negativ. Fluxul se schimbă printr-un semn, dacă se schimbă sensul normalei la suprafață.

**Observație 2.25.** Dacă notăm cu  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  unghiurile pe care le face  $\vec{n}$  cu axele de coordonate  $OX, OY$ , respectiv  $OZ$ , atunci

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

Dacă notăm cu  $dy dz, dz dx$  și  $dx dy$  proiecțiile elementului de suprafață  $d\sigma$  pe planele de coordonate  $YOZ, ZOX$ , respectiv  $XOY$ , obținem

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Integrala de suprafață

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

se numește **integrală de suprafață în raport cu coordonatele** (de speța a II-a).

**Observație 2.26.** Pentru calculul fluxului ținem cont de expresia versorului normalei și de expresia elementului de suprafață.

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_M \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| \, du \, dv \\ &= \iint_M \vec{v} \cdot (\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v) \, du \, dv = \iint_M \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \, du \, dv.\end{aligned}$$

**Exemplu 2.27.** Să se calculeze fluxul vectorului  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$  prin fața exterioară a paraboloidului  $z = x^2 + y^2$ , din interiorul cilindriului  $x^2 + y^2 = 1$ .

Paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  intersectează cilindrul  $x^2 + y^2 = 1$  pentru  $z = 1$ . Ecuația suprafeței este

$$z = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in M,$$

unde  $M : x^2 + y^2 \leq 1$ . Normala la suprafață face cu axa  $OZ$  unghiul  $\gamma > \frac{\pi}{2}$ , deci  $\cos \gamma < 0$ . Rezultă că

$$\vec{n} = -\frac{\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y}{|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y|}.$$

Fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = -\iint_D \vec{v} \cdot (\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y) \, dx \, dy.$$

Calculăm produsul mixt. Avem

$$\vec{v} \cdot (\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y) = \begin{vmatrix} x & y & (x^2 + y^2)^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2).$$

Rezultă că

$$\Phi_S(\vec{v}) = -\iint_D [(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)] \, dx \, dy,$$

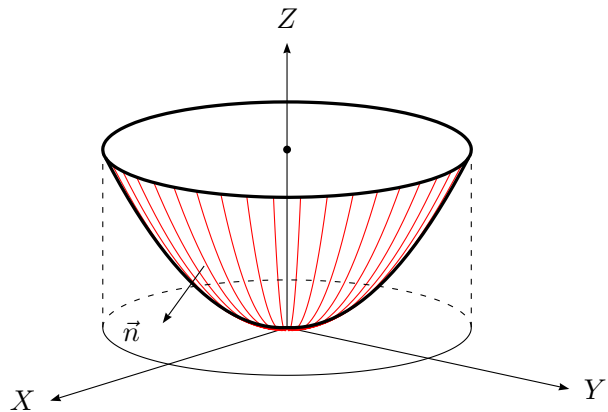
unde  $D$  este discul  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Se trece la coordonate polare și se obține

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= -\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} (\rho^4 - 2\rho^2) \rho \, d\varphi = -2\pi \int_0^1 (\rho^5 - 2\rho^3) \, d\rho \\ &= -2\pi \left( \frac{\rho^6}{6} - \frac{2\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -2\pi \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

## 2.5 Formula lui Stokes

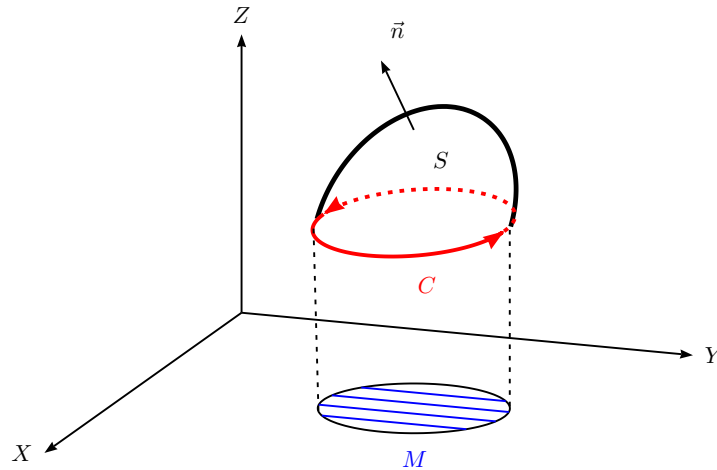
**Teoremă 2.28.** Fie  $S$  o suprafață orientabilă, netedă pe porțiuni și deschisă, având ca frontieră curba  $C$ , simplă, închisă, netedă pe porțiuni, orientată astfel încât dacă cineva parcurge curba având suprafața la stânga sa, versorul normalei este orientat de la picioare la cap. Fie  $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  un câmp vectorial de clasă  $C^1$  pe un domeniu ce include suprafața  $S$ . În aceste condiții,

$$\int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \iint_S (R'_y - Q'_z) \, dy \, dz + (P'_z - R'_x) \, dz \, dx + (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy.$$



**Observație 2.29.** În cazul unei suprafețe plane care este inclusă în  $XOY$ , teorema lui Stokes se reduce la teorema lui Green:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S (Q'_x - P'_y) dx dy.$$

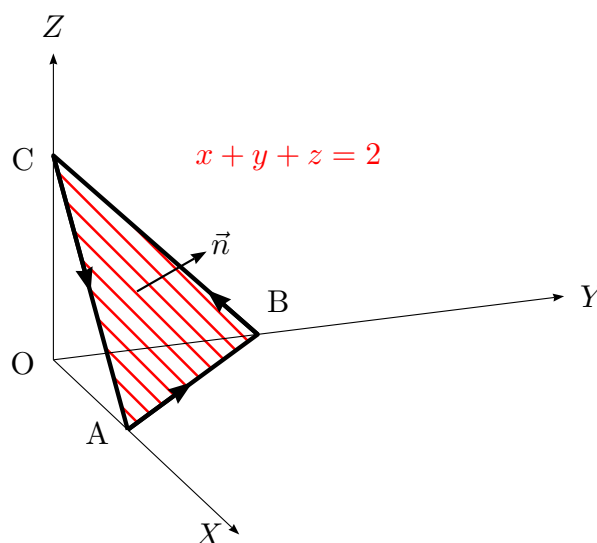


**Observație 2.30.** Formula lui Stokes se poate rescrie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$

ceea ce înseamnă că circulația vectorului  $\vec{v}$  de-a lungul unei curbe închise  $C$  este egală cu fluxul rotorului printr-o suprafață deschisă care se sprijină pe curba  $C$ .

**Exemplu 2.31.** Să se calculeze circulația vectorului  $\vec{v} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$  de-a lungul laturilor triunghiului cu vârfurile  $A(2, 0, 0)$ ,  $B(0, 2, 0)$  și  $C(0, 0, 2)$ , parcurse în sens orar dacă sunt privite din origine.



Aplicăm formula lui Stokes

$$\int_{\text{fr}(S)} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma,$$



pentru suprafața triunghiului

$$S: z = 2 - x - y, (x, y) \in M,$$

unde  $M$  este mulțimea din planul  $XOY$  mărginită de  $\Delta OAB$ . Normala la suprafața triunghiului face unghi ascuțit cu axa  $OZ$ , ceea ce înseamnă că semnul lui  $\vec{n}$  se alege astfel încât  $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ . Versorul normalei la o suprafață dată explicit are formula

$$\vec{n} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} (-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}).$$

În cazul nostru

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} (-z'_x \vec{i} - z'_y \vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}).$$

Rotorul vectorului  $\vec{v}$  este

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k}.$$

Obținem

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \iint_S (-2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \, d\sigma \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) \, d\sigma \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D 2\sqrt{3} \, dx \, dy \\ &= -4 \cdot \text{Aria}(M) \\ &= -8. \end{aligned}$$