Seminar 2

Integrale triple

2.1. Volumul corpului limitat de $x^2 + y^2 = z$ şi planul $z = 1$.

2.2. Volumul corpului limitat de $x^2 + y^2 = 4 - 2z$ şi planul XOY.

2.3. $\displaystyle\iiint_V (x^2 + y^2)^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, unde V este corpul $x^2 + y^2 \leq z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

2.4. Masa corpului cuprins între două sfere concentrice de raze a, b $(a < b)$ dacă densitatea în fiecare punct este egală cu pătratul distanţei de la acest punct la centrul sferelor.

2.5. $\displaystyle\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, unde $V = \{\, (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x, y, z \geq 0 \,\}$.

Temă:

2.6. Volumul părţii din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ decupată de $x^2 + y^2 = 4z$.

2.7. $\displaystyle\iiint_V z \cdot e^{-(x^2+y^2+z^2)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$, unde $V = \{\, (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0 \,\}$.

2.8. $\displaystyle\iiint_V \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}{x^2 + y^2 + z^2}$, unde V este corpul $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 \leq 3z^2$, $z \geq 0$.

Indicaţii

2.1. Corpul se poate scrie

$$V = \left\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \,\right\}$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq 1$. Atunci

$$Volum(V) = \iiint_V \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{1} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_D (1 - x^2 - y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Folosind coordonate polare

$$Volum(V) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - \rho^2)\rho \,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

2.2. Corpul se scrie

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq \frac{4 - x^2 - y^2}{2} \right\}$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq 4$. Atunci

$$Volum(V) = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_0^{\frac{4-x^2-y^2}{2}} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{4 - x^2 - y^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Folosind coordonate polare

$$Volum(V) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (4 - \rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi = 4\pi.$$

2.3. Corpul se poate scrie

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 \right\}$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq 1$. Atunci

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D (x^2 + y^2)^2 (1 - \sqrt{x^2 + y^2})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Folosind coordonate polare

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^4 (1 - \rho)\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{21}.$$

2.4. Considerăm sferele centrate în origine. Corpul V este

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2 \right\}.$$

Densitatea este $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Avem de calculat

$$Masa(V) = \iiint_V \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Folosind coordonate sferice

$$Masa(V) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_a^b \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{4\pi(b^5 - a^5)}{5}.$$

2.5. Folosim coordonate sferice

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \rho \cos\theta \cdot \rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{16}.$$