# Seminar 3

# Integrale de suprafaţă

**3.1.** Să se calculeze aria suprafeţei $\vec{r} = u\cos v\vec{\imath} + u\sin v\vec{\jmath} + u^2\vec{\kappa}$, $u \in [0,3]$, $v \in [0,\pi]$.

**3.2.** Să se calculeze $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S:\ x^2+y^2=z^2,\ \ 0 \le z \le 1$.

**3.3.** $\displaystyle\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S\colon x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \ge 0$.

**3.4.** Fluxul vectorului $\vec{v} = x\vec{\imath} - (2x+y)\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ prin faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$.

**3.5.** Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{v} = y^2\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + x^2\vec{\kappa}$ de-a lungul laturilor triunghiului cu vârfurile $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ şi $C(0,0,2)$, parcurse în sens orar dacă sunt privite din origine.

**3.6.** Să se calculeze $\displaystyle\int_C \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, unde $\vec{v} = (y-2z)\vec{\imath} + (x-z)\vec{\jmath} + (2x-y)\vec{\kappa}$ iar $C$ este curba simplă, închisă, care se află la intersecţia suprafeţelor $x^2+y^2+z^2=a^2$ şi $x-y+z=0$, parcursă în sens trigonometric dacă este privită din partea pozitivă a axei $OX$.

## Indicaţii

**3.1.** $E = 1+4u^2$, $G = u^2$, $F = 0$.

$$Aria = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^3\int_0^\pi u\sqrt{1+4u^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{12}(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{12}(37\sqrt{37}-1).$$

**3.2.** $I = \pi\sqrt{2}$.

**3.3.** $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $I = \pi a^3$.

**3.4.** Folosim formula lui Gauss-Ostrogradski

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

În cazul nostru $\operatorname{div}\vec{v} = 1-1+1 = 1$. Atunci fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = Volum(\text{sferă}) = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

**3.5.** Aplicăm formula lui Stokes. $I = -8$.

**3.6.** Aplicăm formula lui Stokes; $\operatorname{rot}\vec{v} = -4\vec{\jmath}$; considerăm $S$ suprafaţa planului delimitată de cercul $C$; versorul normalei la plan este $\vec{n} = \frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{\kappa}}{\sqrt{3}}$. Atunci

$$I = \iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{4}{\sqrt{3}}Aria(cerc) = \frac{4\pi a^2}{\sqrt{3}}.$$