ELECTROTEHNICĂ

CURS 3

2019 - 2020

Conf. dr. ing. Mihaela CREȚU

Departamentul de Electrotehnică și Măsurări, Facultatea de Inginerie Electrică

E-mail: Mihaela.Cretu@ethm.utcluj.ro

http://users.utcluj.ro/~mihaela/

1. INTRODUCERE

Electricitate statică → sarcini

Dorim să vedem ce se petrece când sarcinile sunt în mişcare → se vor studia preponderent conductoarele, şi nu izolatoarele (în care sarcinile nu se pot mişca). Ideea de sarcini în mişcare ne conduce imediat la conceptul de curenţi electrici şi câmpuri magnetice.

În acest capitol se vor trata anumite aspecte legate de curenţi electrici.

Această ramură a electromagnetismului este cunoscută ca: electrocinetica.

Întrucât sarcinile sunt de acum în mişcare, nu mai există echilibru electrostatic, de aceea proprietăţile conductoarelor stabilite anterior nu mai sunt valide. În speţă, atunci când sarcinile sunt în mişcare, câmpul electric total în interiorul unui conductor nu mai este nul:

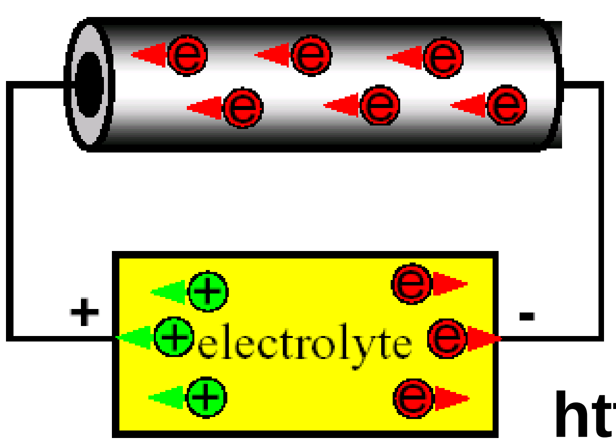
$$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_{extern} \neq 0}$$

Notă: dacă sarcina are o anumită acceleraţie, ea creează o undă electromagnetică. Aceasta este tema următorului capitol despre câmp electromagnetic.

1.1. Curentul electric (vezi cursul 10_MIT)

- Dacă sursele producătoare de câmp electrostatic se află în contact fizic cu un corp metalic, electronii vor încerca imediat să le descarce până când nu va mai exista câmp electric în interiorul conductorului.

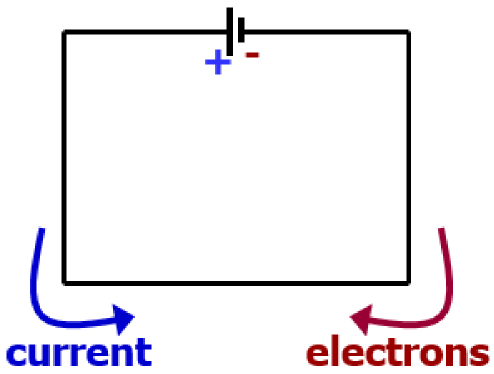
- Exact aceasta ar fi situația dacă sursa nu ar fi capabilă să furnizeze în mod continuu tot mai multe sarcini, printr-un anumit mecanism de transfer al sarcinilor electrice.



http://www.mst.edu/~pringle

1.1. Curentul electric

Curenții în aparatele ce funcționează cu baterii sunt în cele mai multe cazuri exprimate în: 10^{-3} A.



Curgerea curentului este în direcția sarcinilor pozitive …

...în sens opus curgerii de electroni, care în mod normal sunt purtătorii de sarcini.

- Un electron care se deplasează de la – la + dă naștere aceluiași “sens convențional” al curentului ca și în cazul unui proton care circulă de la + la -.
- “Convențional” se referă la efectul pozitiv al sarcinilor (de exemplu, direcția câmpului electric este definită relativ la sarcinile pozitive).

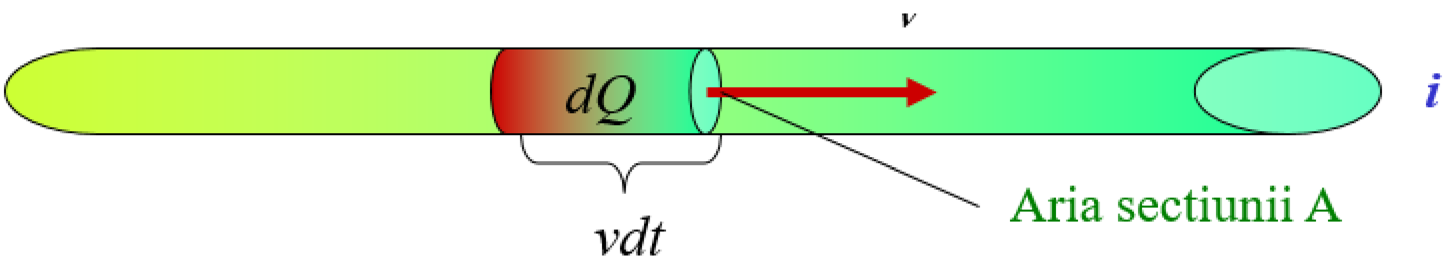
1.1. Curentul electric

Dacă există un mecanism de trasfer al sarcinilor electrice, apare o mişcare dirijată a sarcinilor electrice, denumită curent electric de conducție, sau simplu, curent electric *i (A).*

Cantitatea totală de sarcini ce se deplasează printr-o secțiune dată per unitate de timp reprezintă curentul, notat uzual cu *i:*

$$\boxed{i = \frac{dQ}{dt}, \qquad [i]_{SI} = \frac{1C}{1s} = 1A\,(Amper)}$$

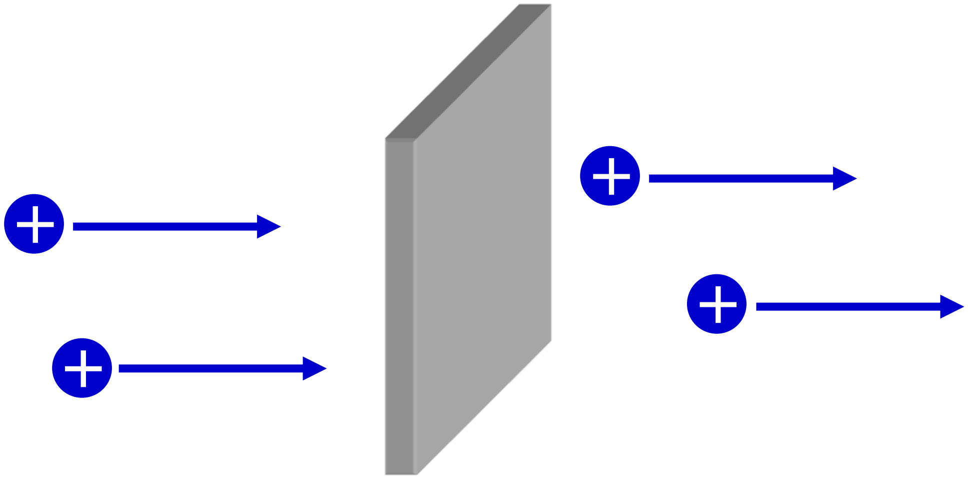
Conductor



1.1.2. Densitatea curentului electric

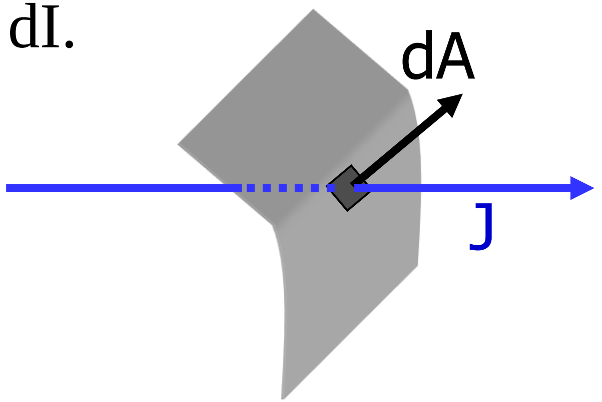
- Când facem referire la transportul de sarcină electrică, folosim noțiunea de densitate de curent.

- Densitatea de curent reprezintă cantitatea de sarcină electrică ce străbate unitatea de arie în unitatea de timp.



1.1.2. Densitatea curentului electric

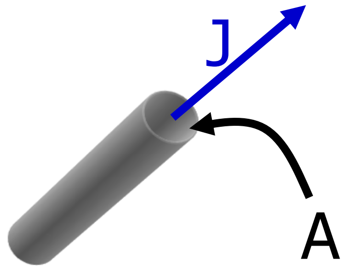
- Densitatea de curent **J** care trece prin unitatea de arie infinitezimală dA produce un curent infinitezimal dI.



- Densitatea de curent **este un vector**. Direcția ei este dată de direcția sarcinilor pozitive.

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

- Curentul total care trece prin aria A este: $$I = \int_{suprafata} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$



Dacă **J** este constant și paralel cu **dA** (ca într-un conductor), atunci

$$I = \int_{suprafata} \vec{J} \cdot d\vec{A} = J \int_{suprafata} dA = JA \quad \Rightarrow \quad J = \frac{I}{A}$$

1.1.2. Densitatea curentului electric

Considerând curentul ce străbate o secțiune de arie unitară, se obține o valoare ce poate fi definită în orice punct din spațiu ca un vector, notat cu $\vec{J}$, denumit densitate de curent de conducție (proiectarea LEA/LES se bazează pe **J**):

$$\vec{J} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta i}{\Delta A} \cdot \vec{n} = \frac{di}{dA} \cdot \vec{n}, \qquad [J]_{SI} = \frac{1A}{1m^2}$$

unde n este direcția normală la (perpendiculara pe) plan.

Curentul total prin suprafețele terminale poate fi obținut din densitatea de curent ca o integrală pe aria secțiunii conductorului.

$$i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

1.1.3. Curentul electric de convecție

Curentul electric de conducție are proprietatea de a străbate întotdeauna mediul conductor, deplasarea particulelor încărcate cu sarcină electrică fiind o mișcare relativă față de conductor.

Dacă sarcinile electrice sunt transportate direct de mase încărcate cu electricitate, apare un curent electric creat de deplasarea acestor mase, denumit **curent electric de convecție.**

Considerând un corp – conductor sau izolator – încărcat cu o sarcină electrică având densitatea de volum ρv, care se deplasează într-o anumită direcție cu viteza *v*:

Densitatea de curent de convecție este definită ca: $\boxed{\vec{J}_C = \rho_v \cdot \vec{v}}$

iar curentul total ce-i corespunde este

$$\boxed{i_c = \int_A \vec{J}_C \cdot d\vec{A}}$$

2. Legi specifice electrocineticii

2.1. Legea conducției electrice – Legea lui Ohm

2.2. Legea conservării sarcinii electrice – Legea continuității

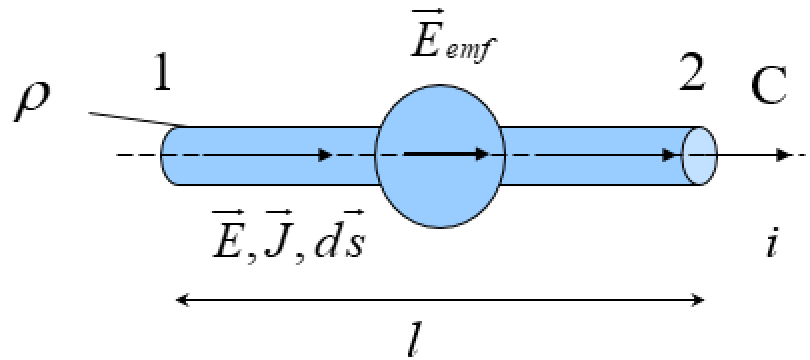
2.3. Legea conservării energiei în conductoare – Legea lui Joule-Lenz

2.1. Legea lui OHM

Forma integrală a legii lui Ohm.

Se consideră un material omogen cu conductivitatea σ, lungimea l și secțiune uniformă A. În conductor, J, E și E_i au aceeași direcție ca și curentul i.

$$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_i = \rho \cdot \vec{J}}$$



$$\boxed{u_{12} \pm e_{12} = i \cdot R}$$ **- Forma integrală**

u_{12} - tensiunea electrică dintre capetele 1 și 2

e_{12} – tensiunea electromotoare dintre capetele 1 și 2

Câmpuri imprimate

Câmpul electric obţinut prin consumul unei energii de altă natură decât cea electrică (câmp care imprimă purtătorilor de sarcină electrică o mişcare ordonată), se numeşte **câmp electric imprimat**.

- Apariția lui are în general cauze neelectrice (neuniformități de temperatură sau concentrație, neomogenități, forțe de inerție).
- Prezența câmpurilor electrice imprimate face posibilă apariția fenomenului de conducție ($J \neq 0$) chiar, și în absența câmpului electric ($E = 0$) sau reciproc apariția câmpului electric ($E \neq 0$) în conductoare nestrăbătute de curent ($J = 0$).

Exemple **câmpuri imprimate**:

- câmp imprimat de accelerație;
- câmp electric imprimat datorat neuniformităților de temperatură;
- câmp electric imprimat de concentrație, apare în electroliții cu concentrații neuniforme, datorită difuziei purtătorilor de sarcină;
- câmpuri electrice imprimate de contact (voltaice); la suprafața de contact între două corpuri metalice diferite apare un câmp electric de interfață, datorită difuziei electronilor dintr-un corp în altul;

Câmpuri imprimate

Exemple **câmpuri imprimate**:

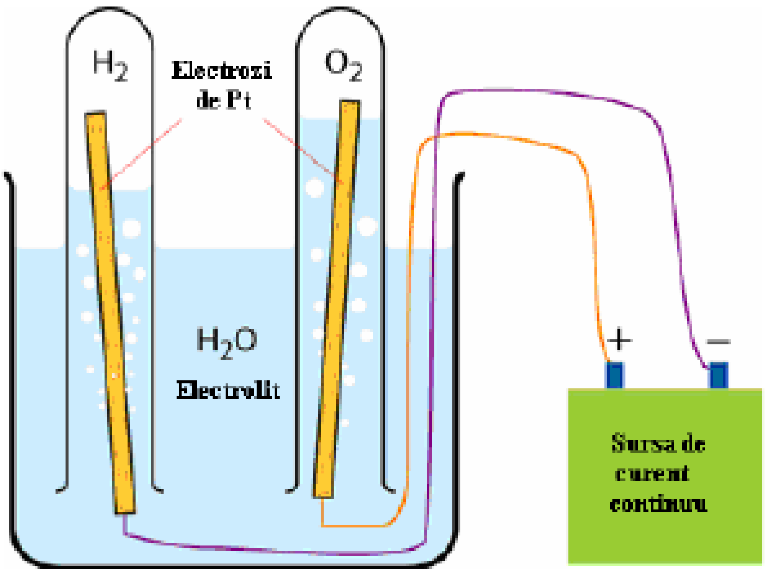
- câmp electric de natură galvanică, care apare la suprafața de contact dintre un metal și un electrolit;
- câmp fotovoltaic imprimat, care apare la suprafața de contact între un metal și un semiconductor, sub acțiunea luminii care cade pe această interfață.

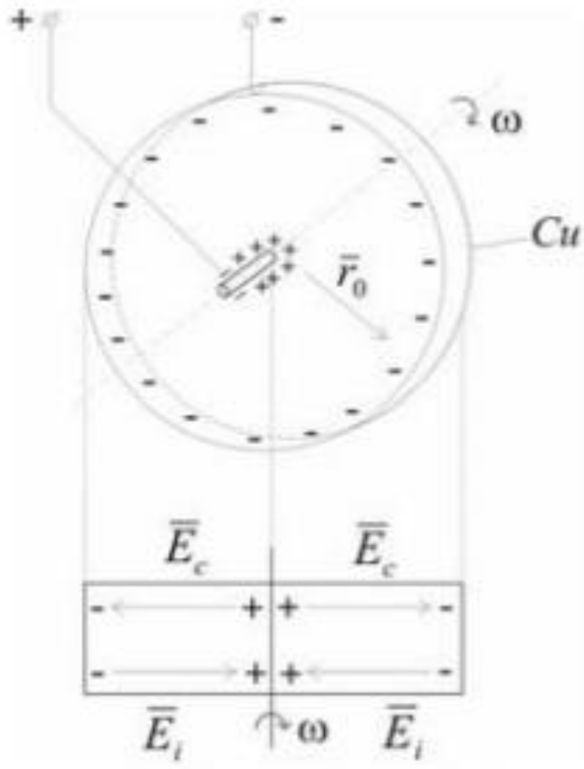
Câmpurile electrice imprimate apărute în joncțiunile dintre două semiconductoare sau dintre un metal și un semiconductor, explică funcționarea dispozitivelor semiconductoare (diode, tranzistoare, tranzistoare cu efect de câmp, fotodiode etc).

În acest caz, **câmpul electric imprimat** depinde de densitatea de curent.

Câmpuri imprimate

Pila de combustie





2.1. Legea lui OHM

Prin studii experimentale s-a constatat că vectorul densitate de curent de conducție este strâns legat de vectorul intensitate câmp electric. Pentru majoritatea conductorilor, acești doi vectori sunt coliniari și proporționali pentru o gamă largă de valori ale lui **E** (materiale liniare).

Prima formă locală: $$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}}$$ Validă pt materiale liniare, fără câmp electric extern!!

Unde σ este conductivitatea conductorului.

A doua formă locală: $$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{J} = \rho \cdot \vec{J}}$$ Validă pt materiale liniare, fără câmp electric extern!!

Unde ρ este rezistivitatea conductorului.

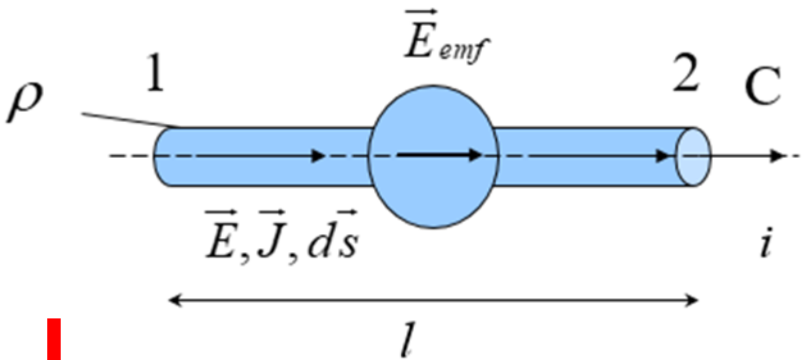
$$\boxed{\rho = \frac{1}{\sigma}}$$

A treia formă locală: $$\boxed{\vec{E} + \vec{E}_i = \rho \cdot \vec{J}}$$ Validă pentru materiale liniare și câmp electric extern !!

A patra formă locală: $$\boxed{\vec{J} = \sigma \cdot \left(\vec{E} + \vec{E}_i\right)}$$ Validă pentru materiale liniare și câmp electric extern!!

2.1. Legea lui OHM

Se presupune că densitatea de curent este uniformă prin secțiunea conductorului



$$\int_{(1)}^{(2)} \overline{E}\cdot\overline{ds}+\int_{(1)}^{(2)} \overline{E_i}\cdot\overline{ds}=\int_{(1)}^{(2)}\left(\rho\cdot\overline{J}\right)\cdot\overline{ds}=\int_{(1)}^{(2)}\left(\rho\cdot\frac{i}{A}\right)\cdot ds=i\cdot\int_{(1)}^{(2)}\frac{\rho\cdot ds}{A}$$

2.1. Legea lui OHM

Se presupune că densitatea de curent este uniformă prin secțiunea conductorului

$$\int_{(1)}^{(2)} \left(\rho \cdot \vec{J}\right) \cdot d\vec{s} = \int_{(1)}^{(2)} \left(\rho \cdot \frac{i}{A}\right) \cdot ds = i \cdot \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho \cdot ds}{A}$$

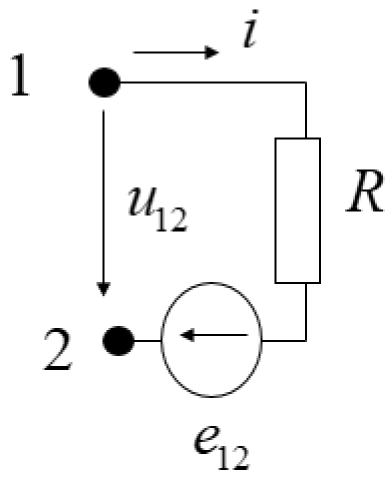
R_{12} este rezistența conductorului între (1) și (2)

$$R_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho \cdot ds}{A}$$

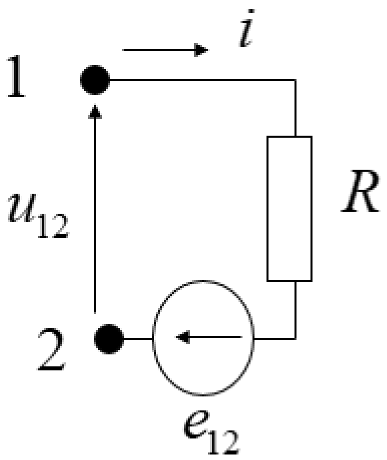
Dacă secțiunea este constantă de-a lungul întregii curbe, atunci rezistența între cele două puncte (1) și (2) va fi:

$$R_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\rho \cdot ds}{A} = \frac{\rho}{A} \cdot \int_{(1)}^{(2)} ds = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

Forma integrală a legii lui Ohm.



convenția de la receptoare

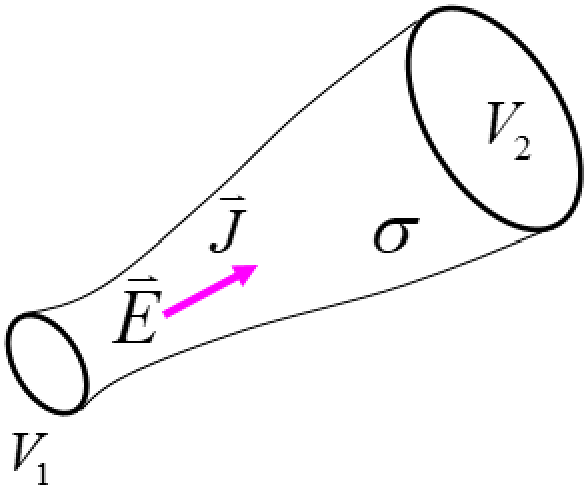


convenția de la generatoare

$$\boxed{u_{12} \pm e_{12} = i \cdot R}$$

Rezistența

$$\boxed{R_{12} = \frac{u_{12}}{i} = \frac{V_1 - V_2}{i}}$$



$$u_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

$$i = \int_\Sigma \vec{J} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_\Sigma \sigma \cdot \vec{E} \cdot \overrightarrow{dA}$$

Rezistența

$$R_{12} = \frac{u_{12}}{i} = \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{A}} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{A}}, \quad 1\Omega = \frac{1V}{1A}$$

Atenție: punctul (1) trebuie să fie un punct de pe electrodul cu potențial mai mare, și (2) un punct de pe electrodul cu potențial mai mic:

$$G_{12} = \frac{i}{u_{12}} = \sigma \cdot \frac{\iint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}, \quad 1S = \frac{1A}{1V} = 1\Omega^{-1}$$

Rezistența

Analogia dintre conductanță și capacitate este evidentă:

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon \cdot \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int\limits_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

$$G = \frac{i}{u} = \sigma \frac{\iint\limits_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int\limits_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

Se presupune existența a două structuri cu exact aceeași formă a electrozilor. Diferența este că regiunea ce separă electrozii este un dielectric în primul caz, și un conductor în al doilea caz. Raportul dintre capacitate și conductanță este:

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Rezistența

Formula precedentă este foarte convenabilă pentru determinarea rezistenței (sau a conductanței) unei structuri pentru care s-a calculat deja capacitatea.

Exemplu: conductanța unei structuri plan-paralele este:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}, \quad F} \qquad \boxed{G = \frac{\sigma \cdot A}{d}, \quad \Omega^{-1}} \qquad \boxed{R = \frac{d}{A \cdot \sigma}, \quad \Omega}$$

unde, *A* este aria armăturilor și *d* este distanța dintre armături.

Analogia dintre câmpul electrostatic și câmpul electrocinetic

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$u_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$div\vec{D} = \rho_v$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f\Sigma}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A} = i$$

$$div\vec{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$$

$$div_S \vec{D} = \vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_s$$

$$div_S \vec{J} = \vec{n} \cdot \left(\vec{J}_2 - \vec{J}_1\right) = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}_p$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} + \sigma \cdot \vec{E}_i$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$G = \frac{i}{u}$$

Analogia dintre câmpul electrostatic și câmpul electrocinetic

$$U_{AB} \Leftrightarrow u_{AB}$$

$$\overrightarrow{E} \Leftrightarrow \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{J}$$

$$Q \Leftrightarrow i$$

$$\varepsilon \Leftrightarrow \sigma$$

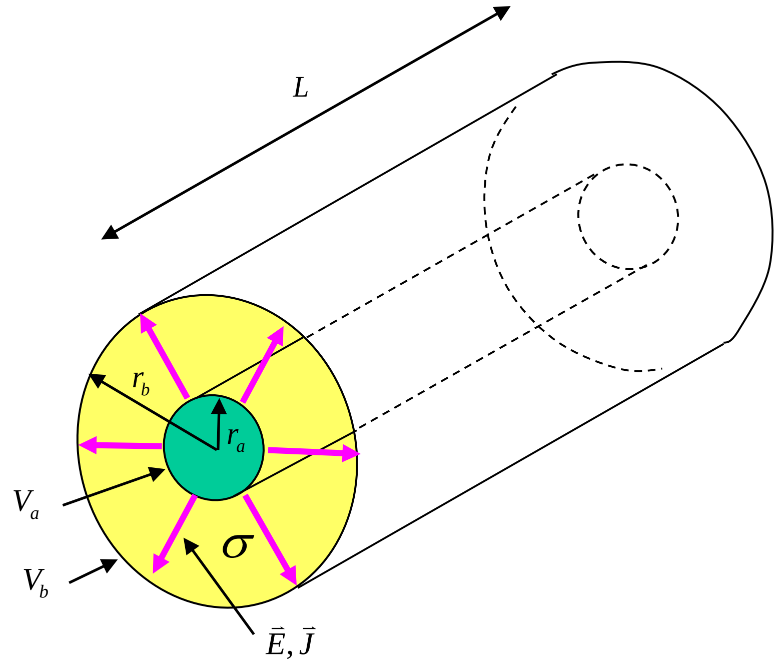
$$\overrightarrow{P}_p \Leftrightarrow \sigma \cdot \overrightarrow{E}_i$$

$$C \Leftrightarrow G$$

Analogia este foarte utilă pentru multe probleme practice.
Problemele de electrostatică sunt de obicei mai ușor de rezolvat în comparație cu problemele electrocinetice echivalente.

Exemplu: Se consideră un cablu coaxial de lungime L, având mediul dintre conductoare de permitivitate Ɛ și rezistivitate ρ=constant. Să se determine rezistența cablului folosind 3 metode:

a) metoda directă;
b) legea lui Ohm;
c) analogia dintre câmpul electrostatic și câmpul electrocinetic.



a) $R = \int_{r_a}^{r_b} \frac{\rho}{A} \cdot dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{\rho}{2\pi r L} \cdot dr = \frac{\rho}{2\pi L} \cdot \ln \frac{r_b}{r_a}$

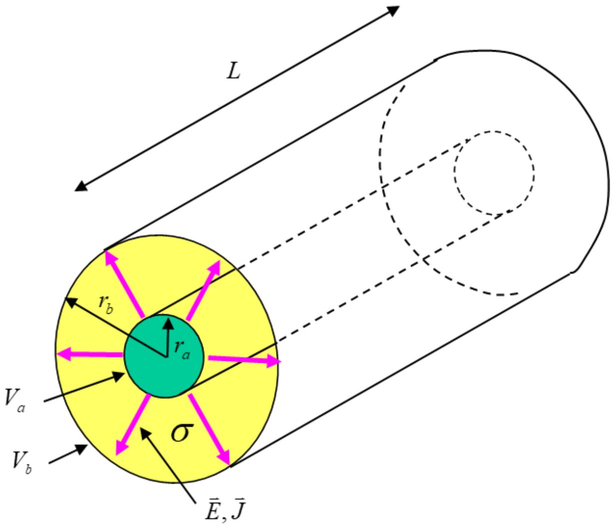
b) $u = R \cdot i \Rightarrow R = \frac{u}{i}$

$$u = \int_{r_a}^{r_b} \overline{E} \cdot \overline{dr} = \int_{r_a}^{r_b} E \cdot dr = \int_{r_a}^{r_b} \rho \cdot J \cdot dr = \frac{\rho \cdot i}{2\pi L} \cdot \ln \frac{r_b}{r_a} \; ; \quad \bar{E} \textit{ paralel cu } \overline{dr}$$

$$i = \iint_{\Sigma} \bar{J} \cdot \overline{dA} = J 2\pi r L \Rightarrow J = \frac{i}{2\pi r L}$$

Σ – *suprafața cilindrului de rază r*
$\bar{J}$ *paralel cu* $\overline{dA}$ *pe aria laterală a cilindrulu*

b) $R = \frac{u}{i} = \frac{\rho}{2\pi L} \cdot \ln\frac{r_b}{r_a}$



c) $$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot L}{\ln\frac{r_b}{r_a}}$$

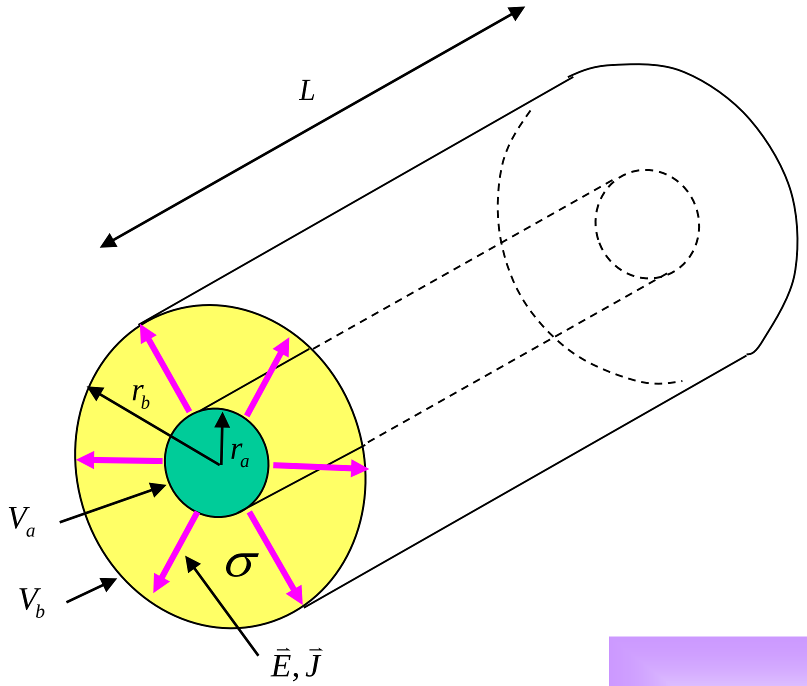
$$G = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot L}{\ln\frac{r_b}{r_a}}$$

$$R = \frac{\rho \cdot \ln\frac{r_b}{r_a}}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

Unde $\sigma = \frac{1}{\rho}$, respectiv $G = \frac{1}{R}$

2.1. Legea lui OHM

Expresia rezistenței dintre cilindrul interior și cel exterior, indicate în figură este:



$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot L}{\ln \dfrac{r_b}{r_a}}$$

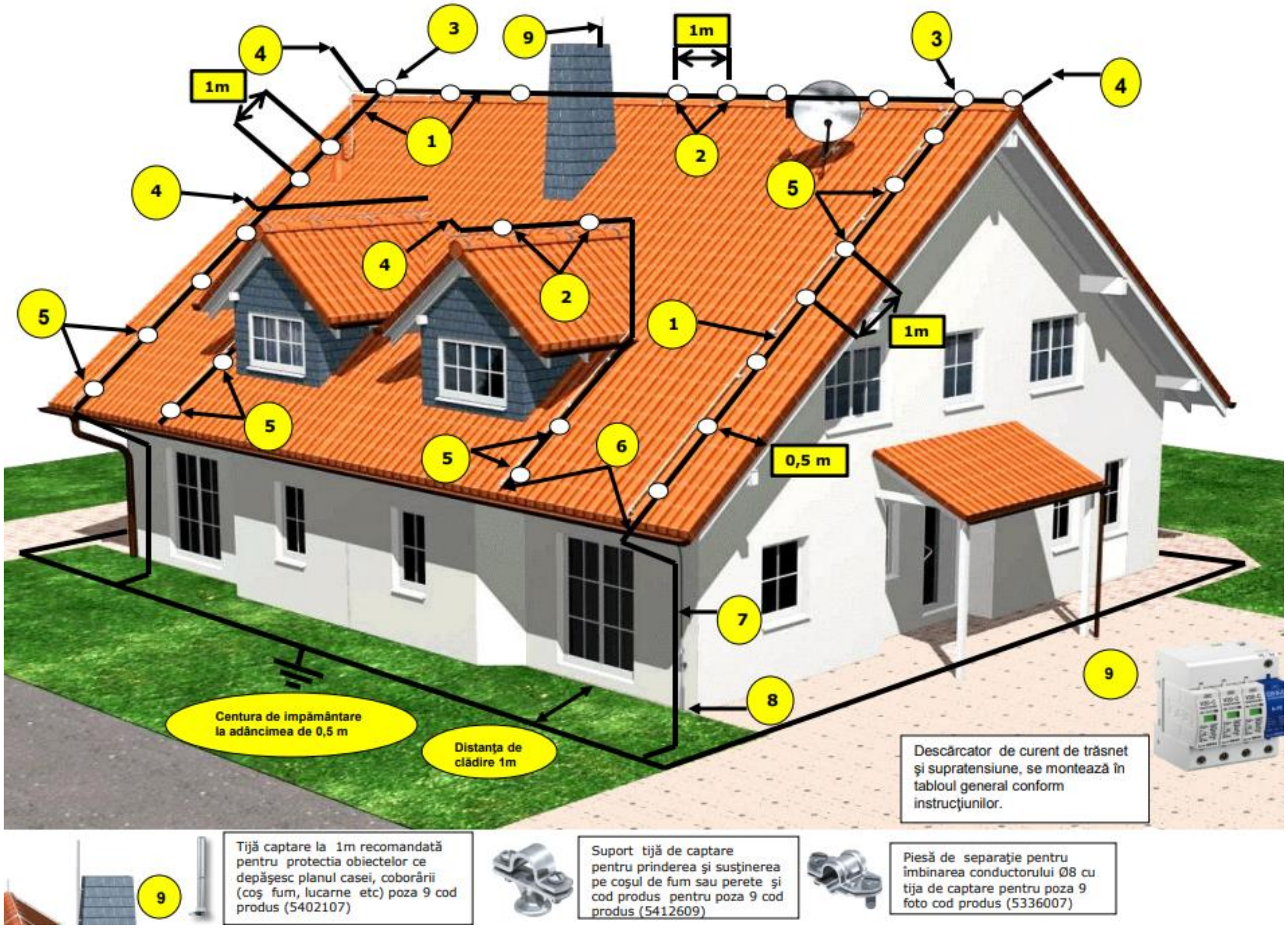
$$G = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sigma \cdot L}{\ln \dfrac{r_b}{r_a}}$$

$$R = \frac{\rho \cdot \ln \dfrac{r_b}{r_a}}{2 \cdot \pi \cdot L}$$

Prize de pământ

Prize de pământ

Protecția la trăsnet: sistemul de legare la pământ



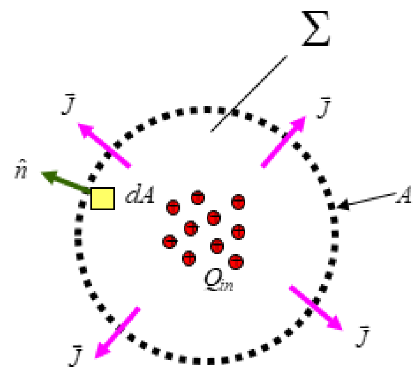
2.2. Legea conservării sarcinilor electrice (legea continuității)

O lege fundamentală a fizicii spune că sarcinile nu pot fi nici create nici distruse. Sarcinile pot fi deplasate dintr-un loc în altul de către curenții electrici.

Scurgerea unui curent dintr-un volum înseamnă, în mod inevitabil, scăderea numărului de sarcini din acest volum. Intrarea unui curent într-un volum implică creșterea numărului de sarcini delimitate de acest volum.

Aceasta reprezintă legea continuității curenților (sau legea conservării sarcinilor electrice). În forma integrală, aceasta este:

$$\boxed{i = -\frac{dQ}{dt} = \oiint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{A}}$$

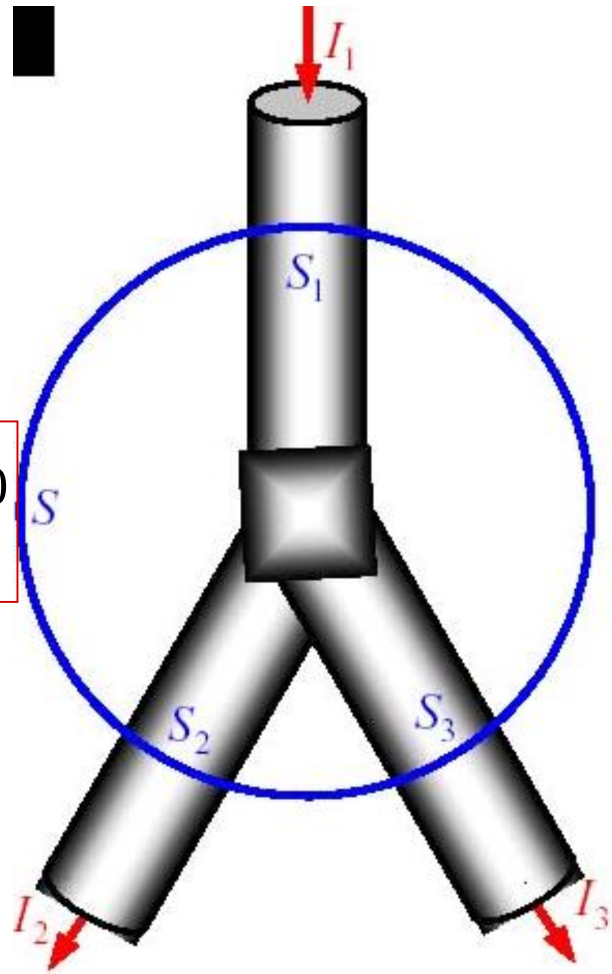


2.2. Legea conservării sarcinilor electrice (legea continuității)

Se presupune că integrarea se realizează pe o suprafață închisă -delimitează un volum ce cuprinde un nod de circuit. Curenții există doar în interiorul firelor metalice, deci integrala reprezintă suma integralelor pe suprafețele secțiunilor fiecărui fir în parte.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{J}\cdot d\vec{A} = \iint_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{A} + \iint_{S_2} \vec{J}\cdot d\vec{A} + \iint_{S_3} \vec{J}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$



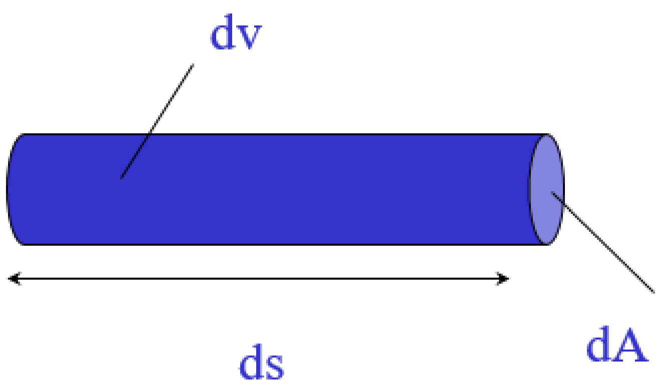
Aceasta reprezintă teorema I a lui Kirchhoff referitoare la curenți, care în teoria circuitelor electrice are forma generală:

$$\Rightarrow \sum_n I_n = 0$$

2.3. Legea conservării energiei în conductoare. Legea Joule-Lenz

Se consideră un volum infinitezimal *dv* dintr-un material rezistiv

Lucrul mecanic efectuat de campul electric pentru a deplasa o sarcina infinitezimala *dQ* de la un capat la altul este:



$$\boxed{d^2W = dV \cdot dQ = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot dQ, \quad Joule}$$

Puterea este definită ca rata de variație a energiei în timp. Puterea necesară pentru a transfera această sarcină este:

$$\boxed{dP = \frac{d^2W}{dt} = \frac{\left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot dQ}{dt} = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot i = \left(\vec{E} \cdot d\vec{s}\right) \cdot \left(\vec{J} \cdot d\vec{A}\right)}$$

Densitatea de putere si legea lui Joule

Într-un conductor cu secțiune uniformă $dv = dAds$, cu ds măsurat în direcția lui J. Ecuația precedentă devine:

$$P = \iiint_{V_\Sigma} \left(\vec{E}\cdot\vec{J}\right)\cdot\left(d\vec{A}\cdot d\vec{s}\right) =$$

$$= \iiint_{V_\Sigma} \left(\vec{E}\cdot d\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{J}\cdot d\vec{A}\right) = \underbrace{\left(\int_s \vec{E}\cdot d\vec{s}\right)}_{u_{12}} \underbrace{\left(\iint_A \vec{J}\cdot d\vec{A}\right)}_{i}$$

unde, i este curentul prin conductor.

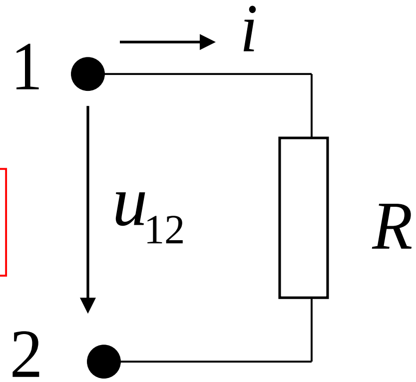
$$P = u_{12}\cdot i$$

Aceasta este forma integrală a legii lui Joule (Lenz) pentru o ramură de circuit fără surse.

2.3. Legea lui Joule-Lenz

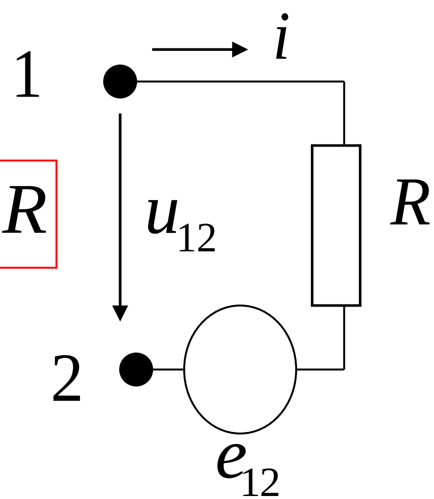
Expresia puterii disipate este:

$$\boxed{u_{12} = i \cdot R}$$



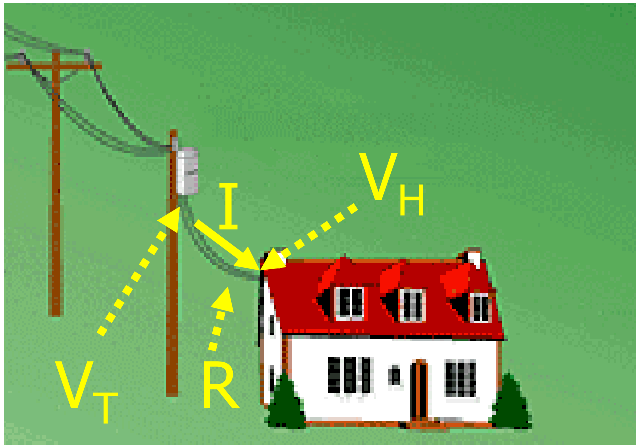
$$\boxed{P = u_{12} \cdot i} \qquad \boxed{P = R \cdot i^2}$$

$$\boxed{u_{12} \pm e_{12} = i \cdot R}$$



$$\boxed{P = \left(i \cdot R \mp e_{12}\right) \cdot i = i^2 \cdot R \mp e_{12} \cdot i}$$

Example: the electric utility company supplies your house with electricity from the main power lines at 120 V. The wire from the pole to your house has a resistance of 0.03 Ω. Suppose your house is drawing 110 A of current…



(a) Find the voltage at the point where the power wire enters your house.

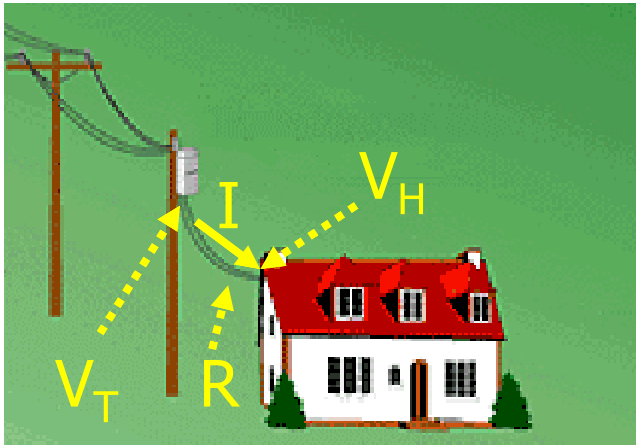
$\Delta V_{HT} = IR$

$V_T - V_H = IR$

$V_H = V_T - IR$

$V_H = (120\ \text{V}) - (110\ \text{A})\ (0.03\Omega) = 116.7\ \text{V}$

(b) How much power is being dissipated in the wire from the pole to your house?



Three different ways to solve; all will give the correct answer.

$P = I\Delta V = I^2R = (\Delta V)^2/R$

$P = I(V_T-V_H) = I^2R = (V_T-V_H)^2/R$

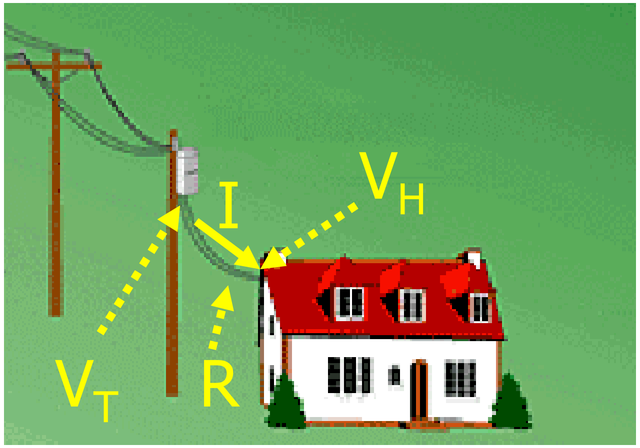
P = (110 A) (120 V -116.7 V) = 363 W

or $P = (110\ A)^2\ (0.03\Omega) = 363\ W$

or $P = (120\ V - 116.7\ V)^2\ /\ (0.03\Omega) = 363\ W$

http://www.mst.edu/~pringle

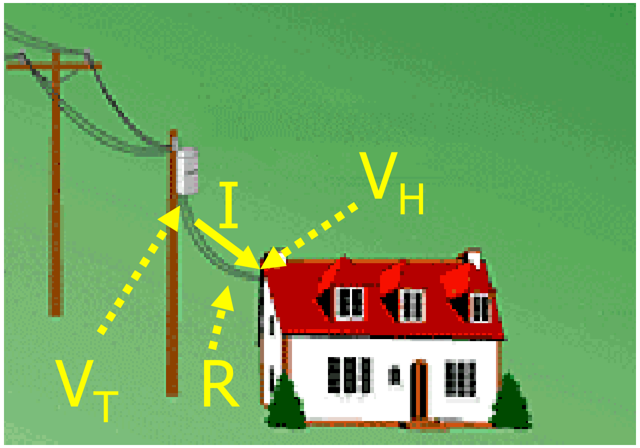
(c) How much power are you using inside your house?



You need to understand that your household voltage represents the potential difference between the “incoming” and “outgoing” power lines, and the “outgoing” is at ground (0 V in this case)…except…

…because the “outgoing” power line is at 0 V, you can “accidentally” get this correct if you simply multiply the current by the voltage at the point where the power wire enters your house.

(c) How much power are you using inside your house?



$P = I\Delta V$

$P = (110\text{ A})\,(116.7\text{ V} - 0\text{ V})$

$P = 12840\text{ W}$

You don't want to use the $P=I^2R=V^2/R$ equations because you don't know the effective resistance of your house (although you could calculate it).