



UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA



ELECTROTEHNICĂ

CURS 4

2019 - 2020

Conf. dr. ing. Mihaela CREȚU

Departamentul de Electrotehnică și Măsurări, Facultatea de Inginerie Electrică

E-mail: Mihaela.Cretu@ethm.utcluj.ro

<http://users.utcluj.ro/~mihaela/>



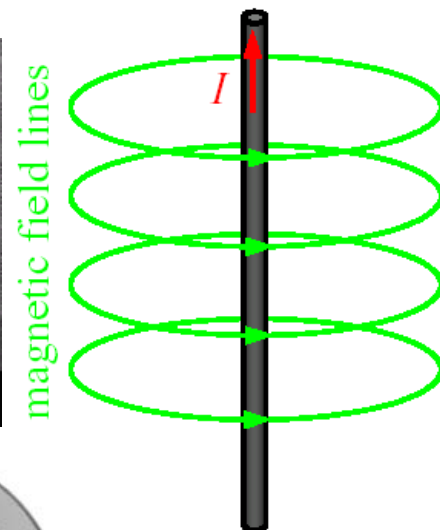
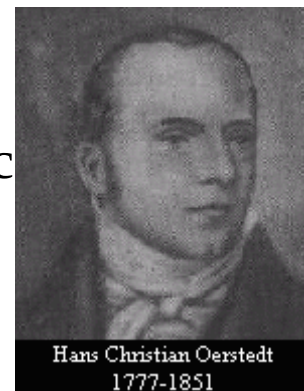
Teoria Câmpului Electromagnetic

Capitolul 3

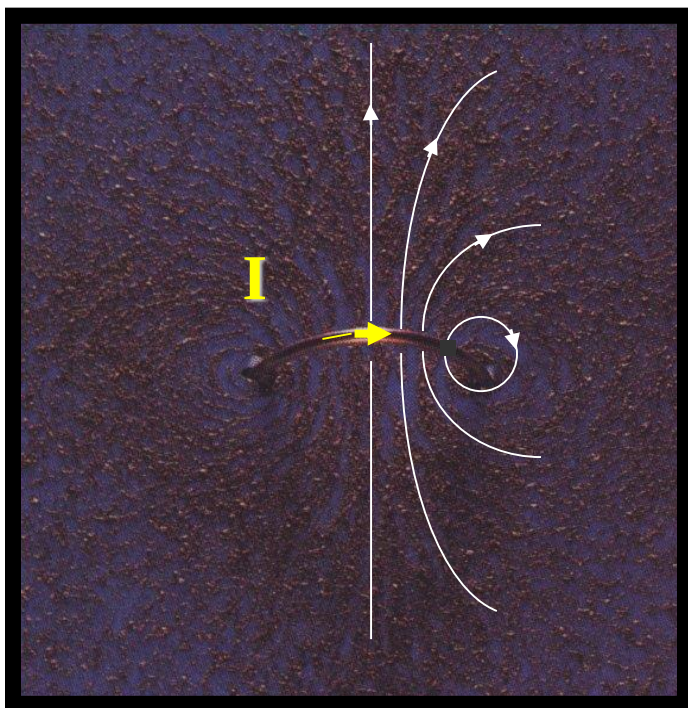
Electrodinamica Câmpuri magnetostatice

1. Istoric. Unități și mărimi specifice

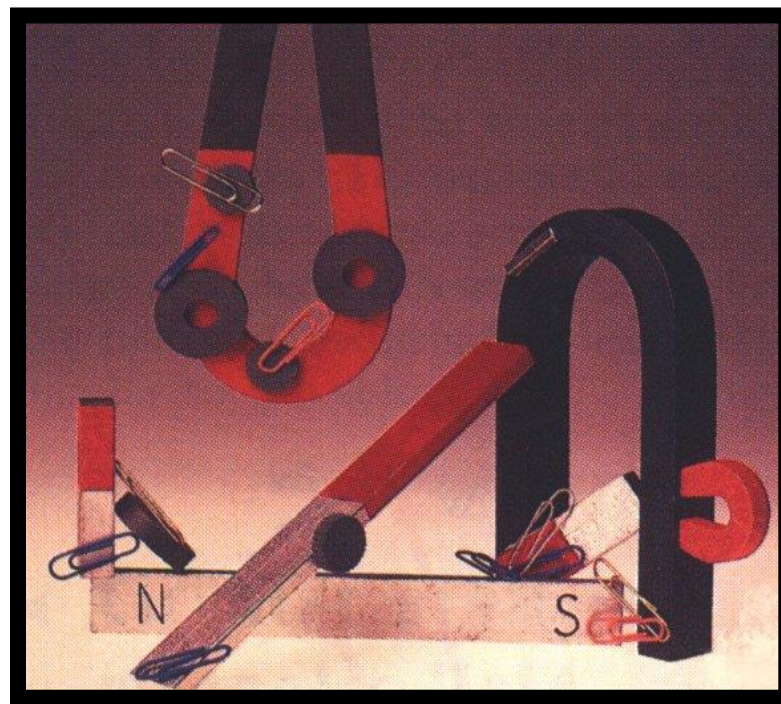
- Hans Christian Oersted a descoperit (în 1819) forța magnetică produsă de un fir conductor parcurs de curent electric
- Regula mâinii drepte face legătura între direcția curentului și cea a câmpului magnetic creat de acesta
- André Marie Ampère măsoară forța magnetică creată de un conductor parcurs de curent (1820-1825)
- Jean-Baptiste Biot și Felix Savart (1825) măsoară cu precizie câmpul magnetic creat de un element de curent



Câmpuri Magnetice (B)



Curenți



Magneți Permanenți



Câmpuri magnetostatice



- Magnetismul provine din mișcarea sarcinilor electrice.
Mișcarea (inclusiv rotația) sarcinilor generează câmpuri magnetice.
- Un curent electric generează un câmp magnetic.
- Un câmp magnetic va exercita o forță asupra unei sarcini aflate în mișcare.
- Un câmp magnetic va exercita o forță asupra unui conductor străbătut de un curent electric.

- **Sarcini staționare :**

- $v_q = 0$

- $E \neq 0$

$$B = 0$$

O sarcină staționară produce doar un câmp electric.

- **Sarcini în mișcare:**

- $v_q \neq 0$ and $v_q = \text{constant}$

- $E \neq 0$

$$B \neq 0$$

O sarcină ce se mișcă uniform produce un câmp electric și un câmp magnetic.

- **Sarcini accelerate:**

- $v_q \neq 0$ and $a_q \neq 0$

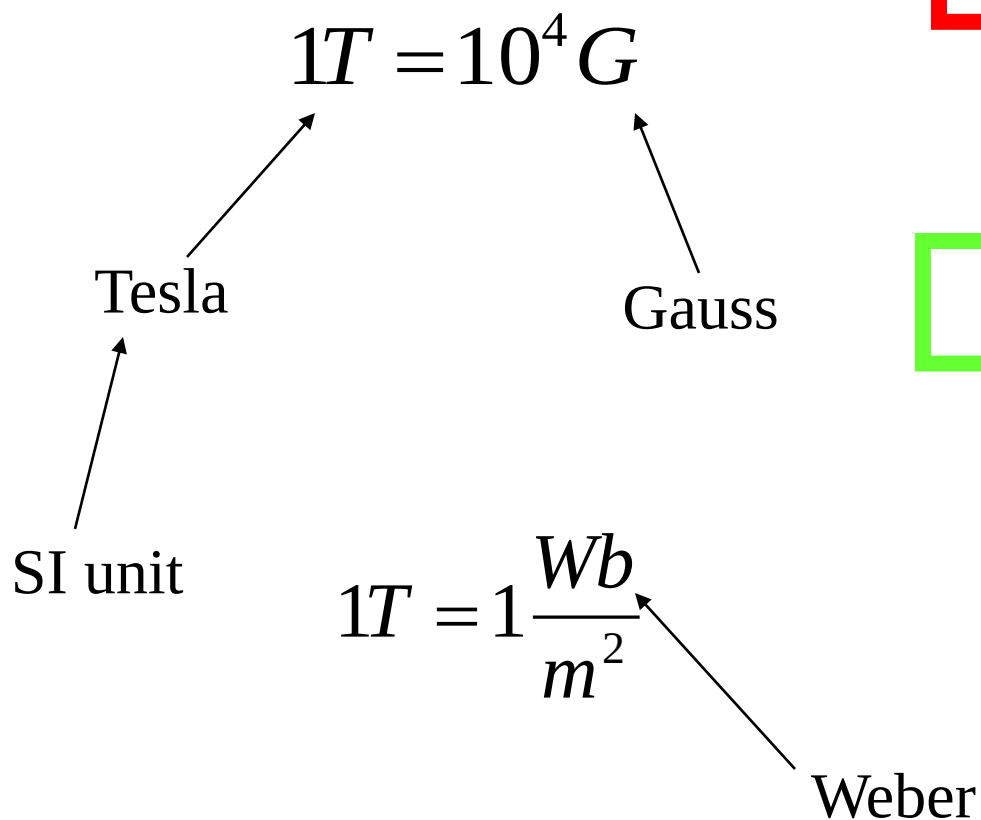
- $E \neq 0$

$$B \neq 0$$

O sarcină accelerată produce un câmp electric, un câmp magnetic și un câmp electromagnetic radiant.

Câmp radiant

Unități și definiții:



$\vec{B}$

Vectorul inducție
magnetică

$\vec{H}$

Vectorul intensitate
câmp magnetic

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$



Permeabilitate

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_o$$

Permeabilitatea vidului

Permeabilitatea relativă a unui mediu

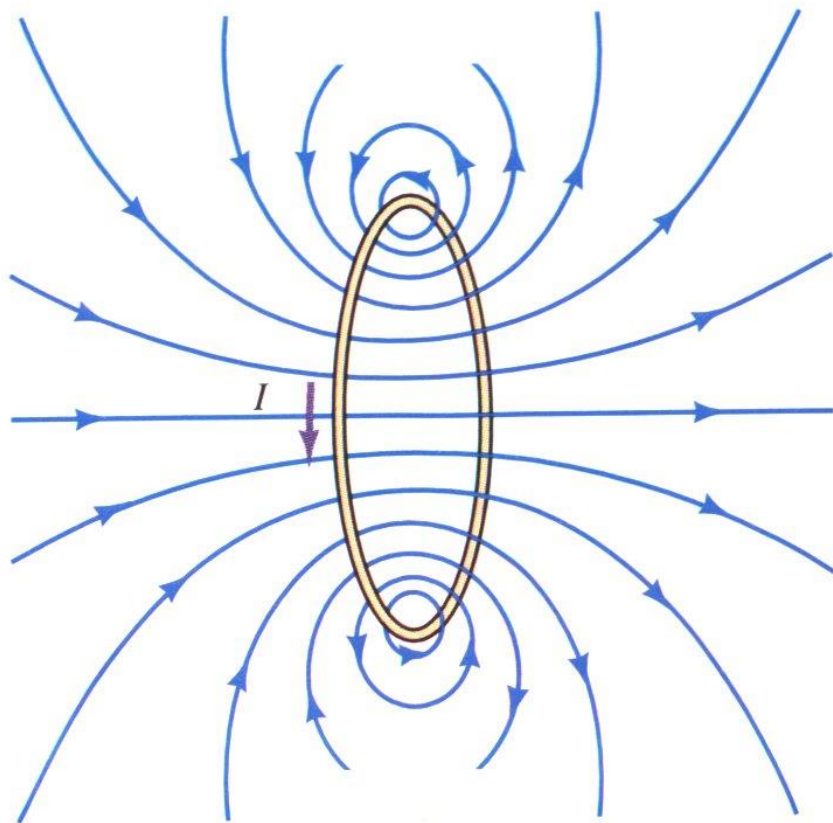
Permeabilitatea mediului

Constanta exactă

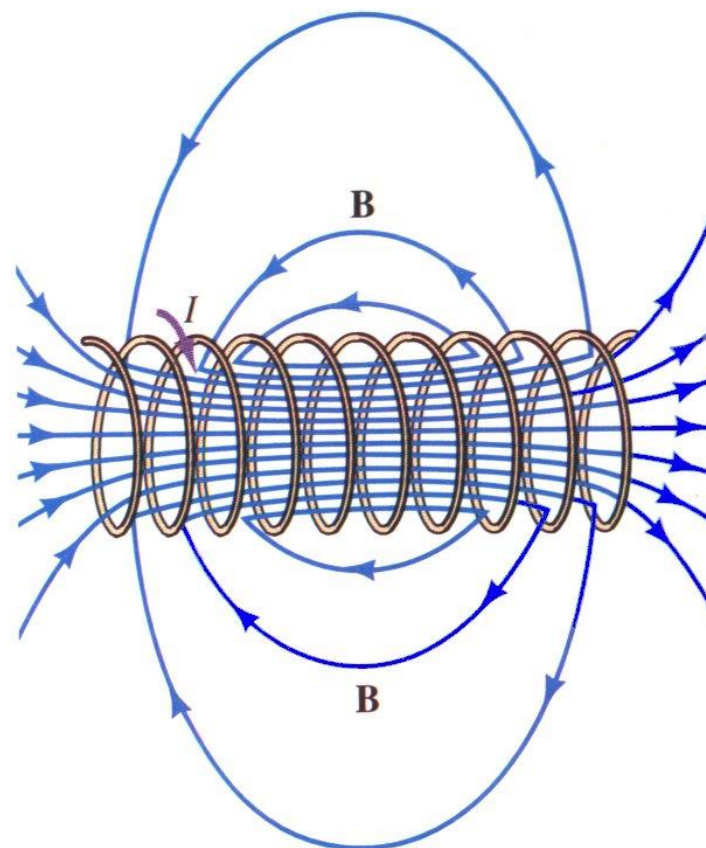
$$\left\{ \frac{H}{m} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \frac{Wb}{m} \right\}$$

Permeabilitatea relativă μ_r și susceptibilitatea χ_m

■	Bismut	0.99983	-1.66 E-4	Diamagnetic
	Mercur	0.999968	-3.2 E-5	
	Aur	0.999964	-3.6 E-5	
	Argint	0.99998	-2.60 E-5	
	Plumb	0.999983	-1.7 E-5	
	Cupru	0.999991	-0.98 E-5	
	Apa	0.999991	-0.88 E-5	
■	Vid	1.000	0	Paramagnetic
■	Aer	1.00000036	3.6 E-7	
	Aluminiu	1.000021	2.5 E-5	
	Paladiu	1.00082	8.2 E-4	
■	Cobalt	250	---	Feromagnetic
	Nickel	600	---	
	Otel	6000	---	



(a)



(b)

Spira parcursă de curent

Bobină sau solenoid

1.1. Fluxul magnetic

Fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă S este definit ca:

$$\Psi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad [\text{Weber} = \text{Wb}]$$

În câmp electrostatic, fluxul ce străbate o suprafață închisă este egal cu sarcina delimitată de această suprafață. Este deci posibilă existența sarcinilor electrice izolate, iar liniile de câmp electric nu sunt linii închise (curbe).

Spre deosebire de liniile de câmp electric, liniile de câmp magnetic sunt întotdeauna închise. Aceasta se datorează faptului că nu e posibilă existența unor poli magnetici izolați (sau sarcini magnetice). De aceea, fluxul magnetic total printr-o suprafață închisă trebuie să fie zero:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Această ecuație se numește legea conservării fluxului magnetic sau legea lui Gauss pentru câmpuri magnetostatice.

2. Legile câmpului magnetostatic

2.1. Legea fluxului magnetic

Definiție:

Fluxul magnetic total printr-o **suprafață închisă** este întotdeauna nul.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Forma integrală a legii



$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V_{\Sigma}} \text{div} \vec{B} \cdot dV = 0$$



$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Forma diferențială a legii

$$\text{div}_s \vec{B} = \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = B_{2n} - B_{1n} = 0$$

Condiții de frontieră

Legile câmpului magnetostatic

2.2. Legea magnetizației

Prin studii experimentale s-a determinat că există o strânsă legătură între vectorul magnetizație (componenta temporară) și intensitatea câmpului magnetic. Pentru materialele uzuale, acești doi vectori sunt coliniari și proporționali pentru o gamă largă de valori ale lui H (materiale liniare și izotrope).

$$\vec{M}_t = \chi_m \cdot \vec{H} \quad \text{Validă doar pentru materiale liniare}$$

unde: χ_m este susceptibilitatea magnetică a materialului.

Când susceptibilitatea magnetică depinde de **intensitatea câmpului magnetic H** , se spune că **mediul este neliniar**, deoarece toate ecuațiile de câmp devin ecuații neliniare. Când susceptibilitatea magnetică depinde de **poziție** în volumul corpului magnetic, se spune că problema este **neomogenă**, spre deosebire de cazul omogen, când proprietățile de material sunt constante în întregul volum. Mai mult, proprietățile magnetice pot depinde de **direcția câmpului aplicat**. Această proprietate se numește **anizotropia** materialelor magnetice.

Legile câmpului magnetostatic

2.3. Legătura între vectorii B, H și M

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}_t + \vec{M}_p)$$

Pentru materiale fără magnetizație permanentă :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}_t)$$

Pentru materiale liniare fără magnetizație permanentă :

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}_t) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi_m \cdot \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$$

Pentru materiale anizotrope și fără magnetizație permanentă :

$$\vec{B} = \vec{\mu} \cdot \vec{H}$$

Legile câmpului magnetostatic

2.3. Legătura între vectorii B , H și M

În acest caz, relația dintre vectorul inducție magnetică și vectorul intensitate câmp magnetic implică prezența unui **tensor**:

$$\vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \cdot \vec{H}$$



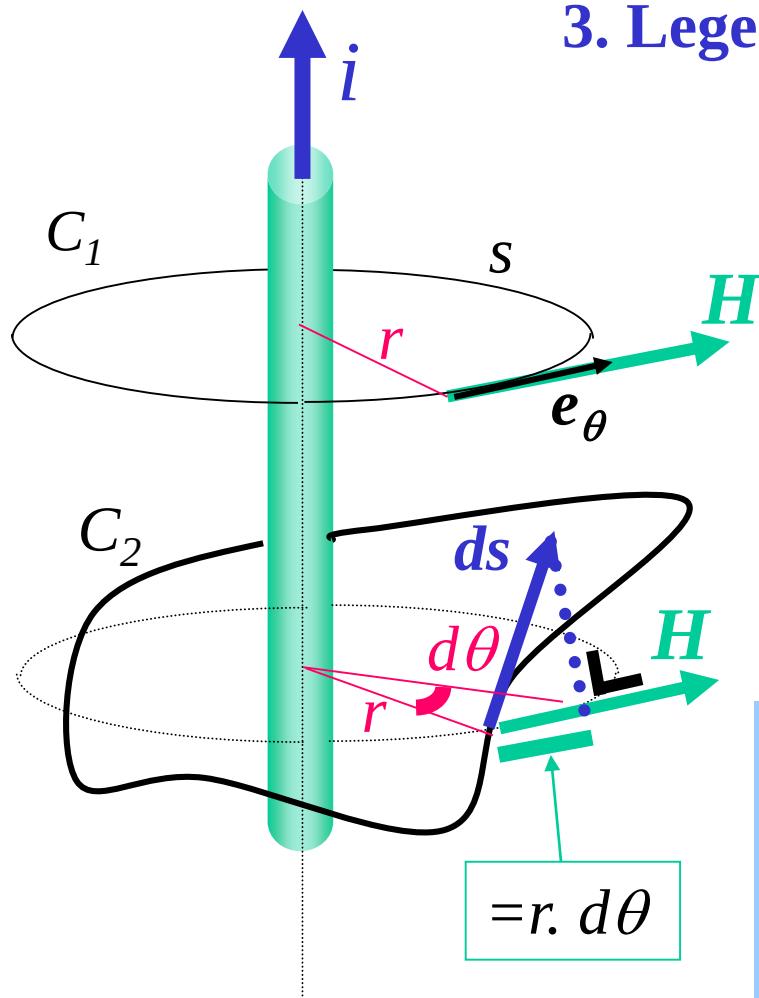
$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

Din fericire, de obicei este suficient să considerăm mediul **omogen**, **liniar** și **izotrop**. Acesta este cel mai simplu caz posibil.

Notă finală asupra semnificației fizice a permeabilității magnetice relative: indică de câte ori crește sau scade intensitatea câmpului magnetic în volumul materialului magnetic (datorită efectului de magnetizare).

Note: În general, vectorul magnetizație are 2 componente:
- o componentă temporară (M_t) și una permanentă (M_p)

3. Legea lui Ampere



Să se determine “circulația vectorului $\mathbf{H}$ ” de-a lungul unei curbe arbitrare c

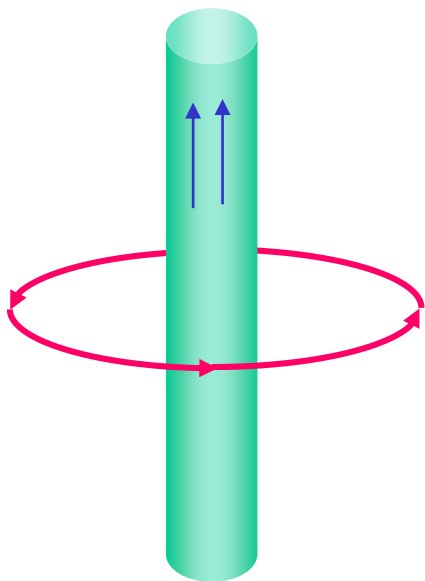
$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$$

Consecințe:

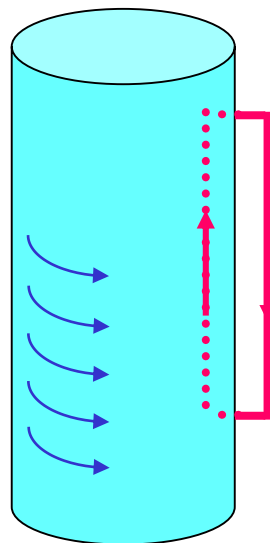
1. Mai mulți curenți ce străbat suprafața delimitată de C_2 se *adună*;
2. Curenții ce nu străbat suprafața delimitată de C_2 nu contribuie;
3. Poziția curenților în interiorul lui C_2 nu e importantă.

Calculul câmpului magnetic folosind Legea lui Ampere

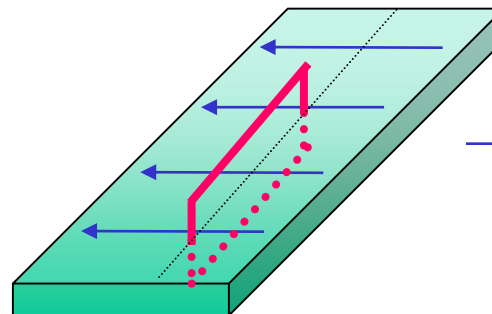
Simetrii pentru Legea lui Ampere



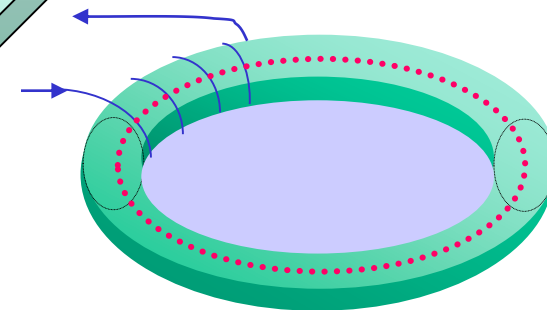
Fir, ∞ lung



Solenoid,
 ∞ lung



Plan,
 ∞ extins



Toroid

- Direcția densității de curent
- Direcția liniilor de câmp magnetic

3. Legea lui Ampere

Forma diferențială a legii lui Ampere poate fi dedusă astfel:

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i \Rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\iint_{S_C} \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} = \iint_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

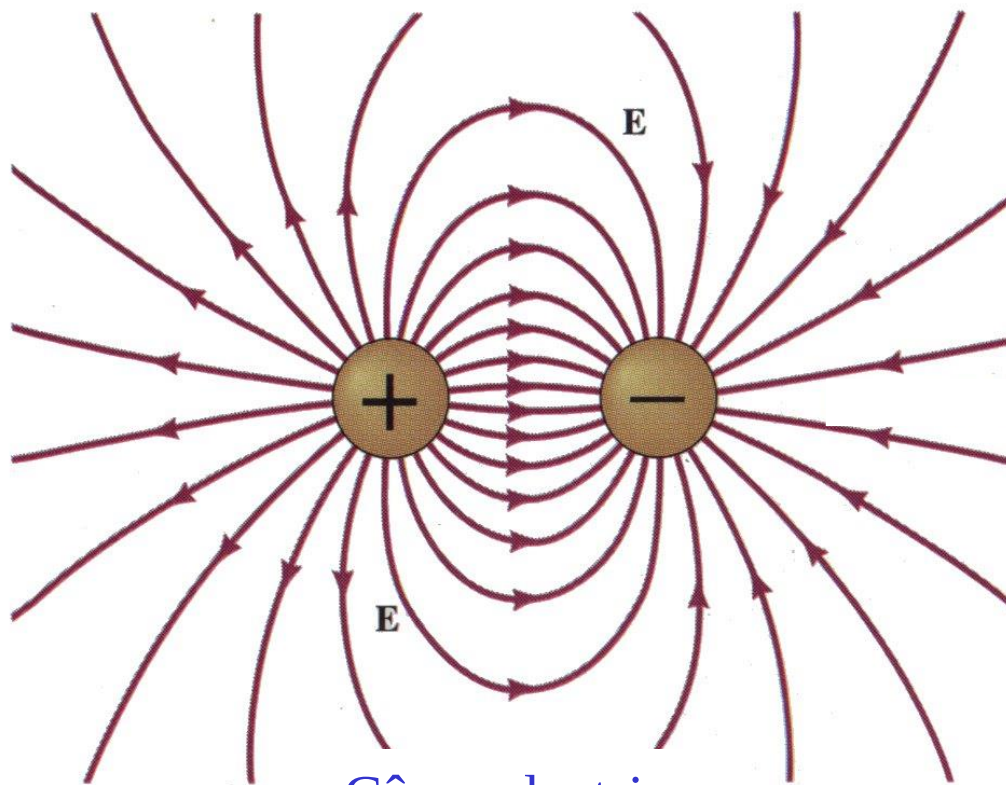
Forma diferențială a legii lui Ampere ($v = 0$)

Este evident acum: curenții electrici sunt sursele ce creează rotoarele câmpului magnetic. Observație: rotorul câmpului magnetic este ne-nul, fiind egal cu densitatea de curent electric, spre deosebire de câmpul electrostatic, al cărui rotor este nul.

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

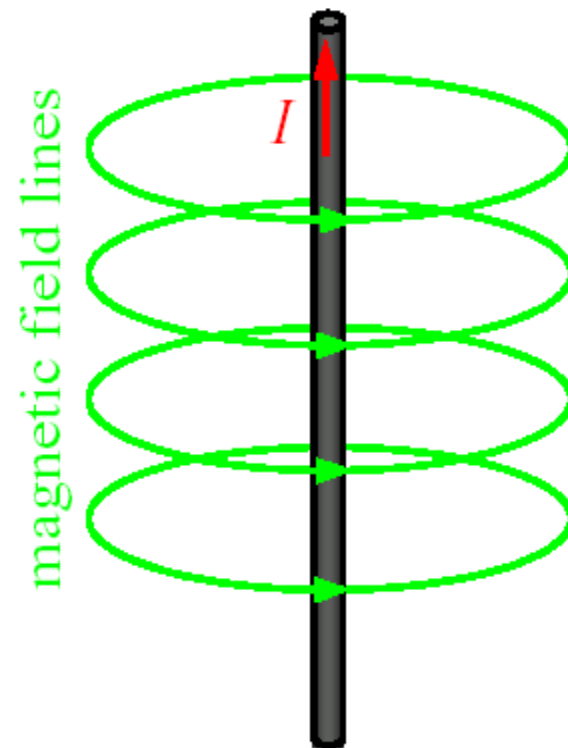
Câmp irotational



Câmp electric

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

Câmp rotațional



Câmp magnetic

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

Observație: până acum s-a considerat că suprafața S este imobilă.

În cazul cel mai general, al unui mediu aflat în mișcare (suprafața are o viteză relativă față de mediu), legea lui Ampere în forma diferențială trebuie completată cu:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho_v \cdot \vec{v} + \text{rot}(\vec{D} \times \vec{v}) \quad , \quad A/m^2$$

Densitate de curent de conducție

Densitate de curent de deplasare

Densitate de curent de convecție

Densitate de curent Roentgen

Din punct de vedere fizic, curentul de convecție apare datorită deplasării, cu viteza v (față de suprafața S_C), a corpurilor încărcate cu sarcină (având densitatea de volum a sarcinii ρ_v), iar curentul Roentgen apare datorită deplasării cu viteza v a corpurilor polarizate.



Câmpuri magnetostatice

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho_v \cdot \vec{v} + \text{rot}(\vec{D} \times \vec{v})$$



$$\oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho_v \cdot \vec{v} + \text{rot}(\vec{D} \times \vec{v}) \right) \cdot d\vec{A}$$



$$\oint_{C(S)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i + i_D + i_C + i_R$$

**Forma integrală a legii
lui Ampere**

În cazul cel mai general, un câmp magnetic poate fi produs prin:

- curenți de conducție
- curenți de deplasare
- curenți de convecție
- curenți Roentgen

4. Flux fascicular

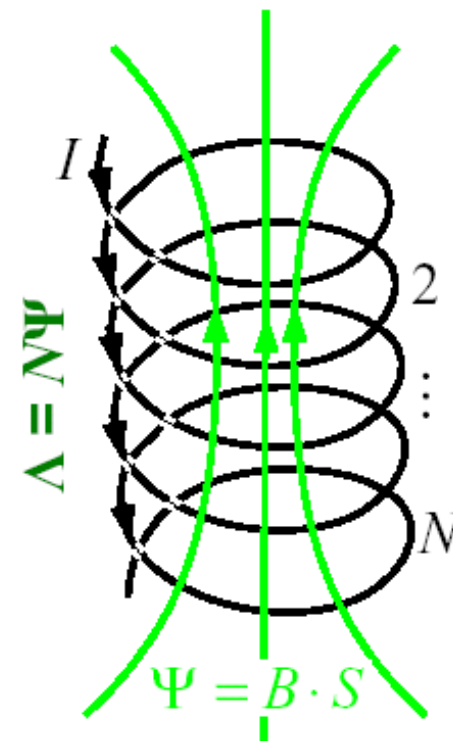
În inductoare, e important nu doar să creăm un flux magnetic cât mai puternic, dar este important și ca acest flux să străbată suprafața mai multor bobine. *Suma tuturor fluxurilor ce străbat suprafețele delimitate de spirele unei bobine se numește flux fascicular.*

În majoritatea bobinelor, fluxul ce străbate fiecare spiră este același, deci fluxul fascicular este:

$$\Lambda = N\Psi, \text{ Wb}$$

Astfel, dacă inducția magnetică este uniformă în interiorul bobinei, fluxul fascicular este:

$$\Lambda = NBS, \text{ Wb}$$



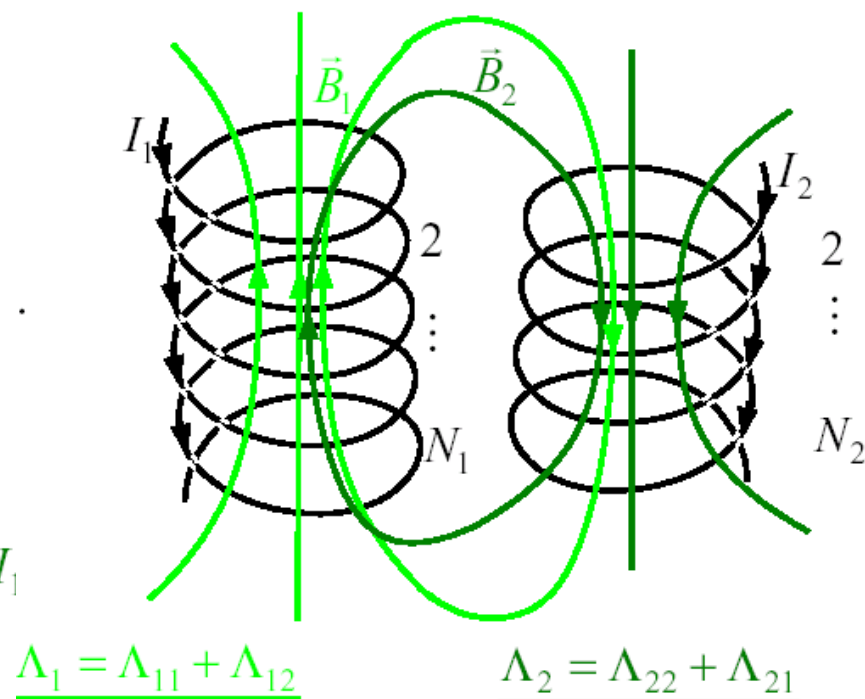
Flux fascicular

Fluxul fascicular poate fi **flux propriu** sau **flux mutual**. O bobină izolată are doar flux propriu, adică fluxul creat de propriul său curent, care circulă prin spirele sale.

Fluxul mutual există **doar** dacă există o pereche de bobine cuplate magnetic.

Fluxul fascicular mutual al bobinei 1 este datorat câmpului magnetic al bobinei 2, care induce o t.e.m. în bobina 1.

$$\left| \begin{array}{l} \Lambda_{11} = N_1 \Psi_{11} \sim N_1^2 I_1 \\ \Lambda_{12} = N_1 \Psi_{12} \sim N_1 N_2 I_2 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} \Lambda_{22} = N_2 \Psi_{22} \sim N_2^2 I_2 \\ \Lambda_{21} = N_2 \Psi_{21} \sim N_2 N_1 I_1 \end{array} \right|$$



4.1. Inductivitate proprie și mutuală

S-a aratat deja că fluxul magnetic (și deci și fluxul fascicular) în bobine solenoidale sau toroidale este proporțional cu curentul. Coeficientul de proporționalitate dintre fluxul fascicular și curent se numește *inductivitate* L :

$$\Lambda = LI, \quad \text{Wb} = \text{V} \times \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{\Lambda}{I}}, \quad H = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{V} \times \text{s}}{\text{A}} = \Omega \times \text{s}$$

Inductivitatea proprie corespunde cu fluxul fascicular propriu:

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1}, \quad H$$

Inductivitatea mutuală este definită prin intermediul fluxului fascicular mutual:

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\Lambda_{21}}{I_1} = \frac{\Lambda_{12}}{I_2}, \quad H$$



4.1. Inductivitate proprie și mutuală

Dacă permeabilitatea magnetică μ nu depinde de curent, inductivitatea este și ea o constantă a unei configurații, care nu depinde de curentul I .

Pentru materialele feromagnetice, permeabilitatea magnetică depinde de intensitatea câmpului H . Astfel, depinde și de curent. De aceea, inductivitatea bobinelor cu miez feromagnetic este o funcție neliniară de curent.

$$\Psi \sim \mu(I)I \Rightarrow \Psi = L(I) \cdot I, \text{ Wb}$$

În general, inductivitatea proprie a oricărui contur C poate fi exprimată prin intermediul vectorilor din magnetostatică astfel:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\iint_{s[C]} \vec{B} \cdot d\vec{A}}{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}} = \mu \cdot \frac{\iint_{s[C]} \vec{H} \cdot d\vec{A}}{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}},$$



Câmpuri magnetostatice



$$L = \mu \cdot \frac{\iint \vec{H} \cdot d\vec{A}}{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}}, \quad [H]$$

$$C = \varepsilon \cdot \frac{\iint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}}, \quad [F]$$

Pentru condensatoare:

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$L_{ext} \cdot C = \mu \cdot \varepsilon$$

Notă: L_{ext} reprezintă doar **inductivitatea externă**, legată de fluxul extern al unui inductor.

Într-un inductor precum cablul coaxial sau o linie de transmisie formată din două fire paralele, inductivitatea produsă de fluxul intern al conductoarelor se numește **inductivitate internă** L_{int} în vreme ce cea produsă de fluxul extern se numește **inductivitate externă**. Inductivitatea totală L este:

$$L = L_{int} + L_{ext}$$

5. Energia câmpului magnetostatic

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i \cdot i_i$$

Relația de mai sus redă expresia energiei stocate în câmpul magnetic al mai multor circuite electrice parcurse de curent.

$$w_m = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \cdot \mu \cdot H \cdot H = \frac{1}{2} \cdot B \cdot H$$

Densitate de energie
magnetică

În general:

$$w_m = \frac{1}{2} \cdot \vec{B} \cdot \vec{H}$$

$$W_m = \iiint_V w_e \cdot dv = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dv$$



Magnetostatică

Analogie

Electrostatica	Magnetostatica
Potențial scalar - V	Potențial vector - A
Câmp electric - E	Câmp magnetic - H
Permitivitate	Permeabilitate
Densitate volumică de sarcină	Densitate de curent
Densitate superficială de sarcină	Densitate superficială de curent
Capacitate - C	Inductivitate - L
Ecuatie Laplace	Ecuatie Laplace
Ecuatie Poisson	Ecuatie Poisson

Introducere

Până acum avem:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad \text{rot} \vec{E} = 0$$

Câmp electrostatic

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{J}$$

Câmp magnetostatic

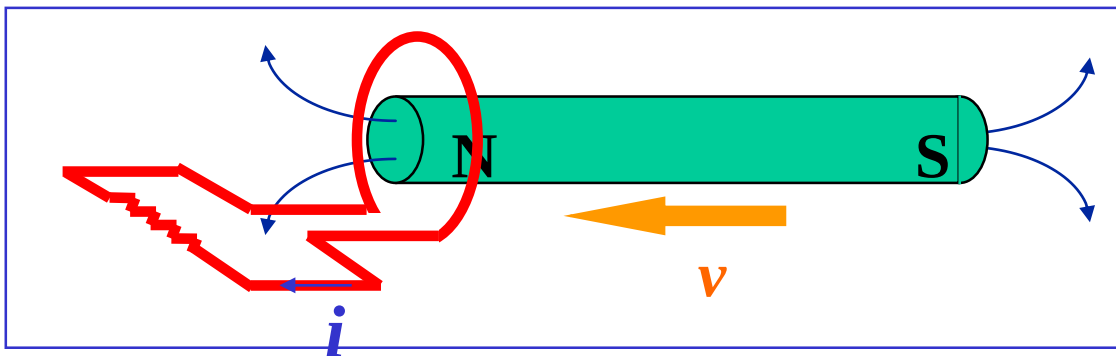
Aceste ecuații sunt corecte pentru **câmpuri statice**, adică acele câmpuri care nu variază în timp. Când câmpurile variază ca funcții de timp, **ecuațiilor cu rotor** li se adaugă un termen în plus.

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{se adaugă} \quad -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad \text{se adaugă} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

6.2. Legea inducției electromagnetice

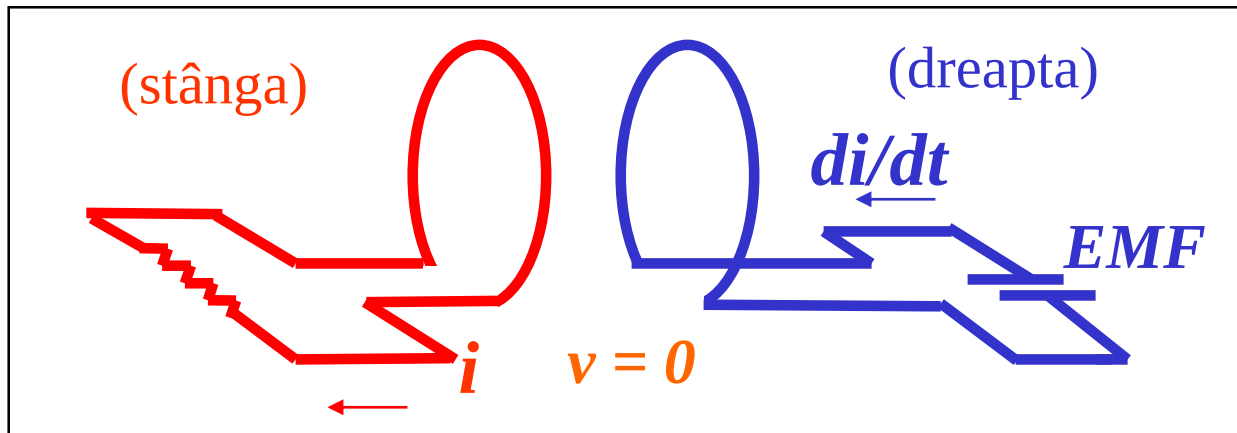
Experimentele lui Faraday



- Michael Faraday a descoperit inducția el-mg în 1831.
- Mișcarea magnetului induce un curent i .
- Inversarea sensului de deplasare duce la inversarea sensului curentului.
- Mișcarea spirei induce un curent.
- Curentul indus este generat de o *TEM indusă*.

6.2. Legea inducției electromagnetice

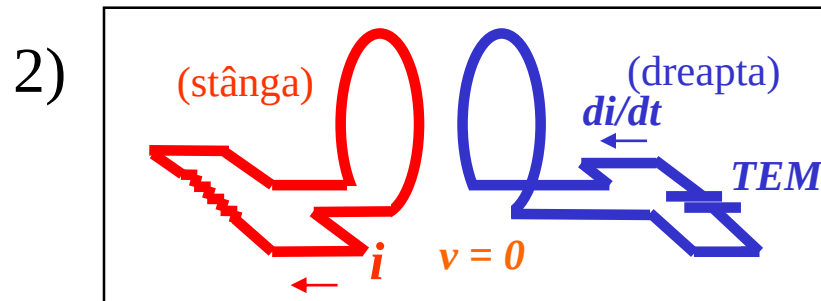
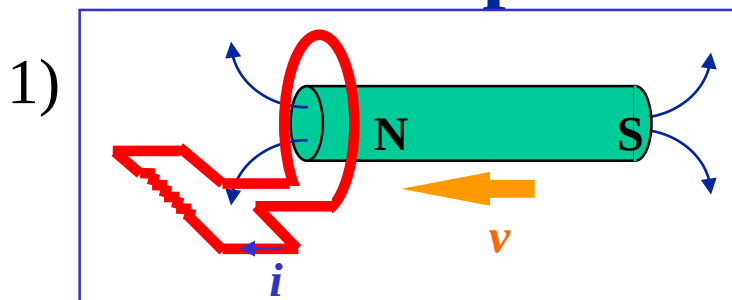
Experimentele lui Faraday



- Variația curentului în bobina din partea dreaptă (albastră) induce un curent în bobina din partea stângă (roșie).
- Curentul indus nu depinde de valoarea intensității curentului din bobina din partea dreaptă.
- Curentul indus depinde de di/dt .

6.2. Legea inducției electromagnetice

Experimentele lui Faraday



- Mișcarea magnetului modifică fluxul Ψ (1) – TEM indusă prin mișcare.
- Variația curentului modifică fluxul Ψ (2) – TEM indusă prin transformare.

Faraday: variația fluxului induce o TEM (e).

$$e = - \frac{d\Psi}{dt}$$

Legea lui Faraday

TEM indusă în spiră

egală cu viteza de variație a fluxului prin suprafața spirei.

Faraday a formulat legea ce-i poartă numele

Tensiunea electromotoare indusă (TEM) - e_{tem} sau simplu (e), în orice contur conductor închis (circuit) este egală cu derivata în raport cu timpul a fluxului magnetic total prin suprafața delimitată de acel contur.

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_r} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

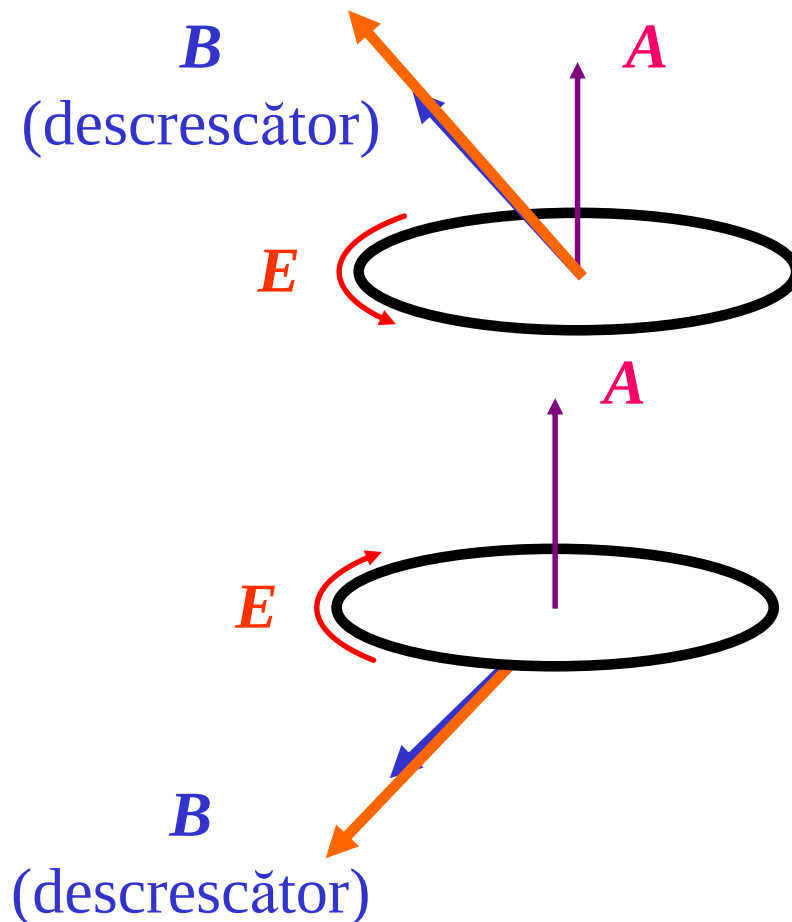
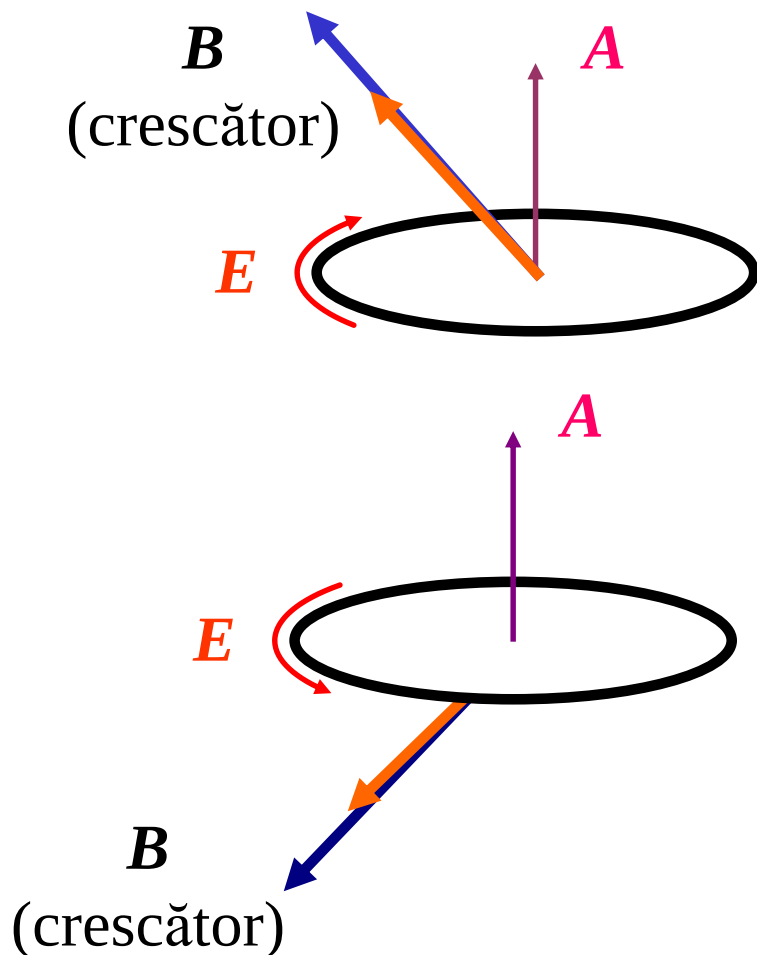
Forma integrală a legii lui Faraday

Semnul minus arată că tem indusă (și curenții) vor acționa a.î. să se opună variației fluxului ce a creat-o. Această lege este cunoscută ca legea lui Lentz.

Dacă circuitul constă din N spire toate având aceeași arie și dacă Ψ este fluxul printr-o spirală, t.e.m. totală indusă este:

$$e = -\frac{d\Lambda}{dt} = -N \cdot \frac{d\Psi}{dt}$$

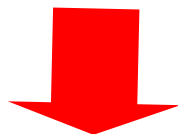
Legea lui Lenz : Direcția oricărui efect al inducției el-mg (curent indus) este a.î. acesta se opune cauzei ce l-a produs. (Se opune schimbării=inerție!)





Forma diferențială a legii lui Faraday

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}$$



$$e = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Psi = \iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Notă: S_{Γ} este o suprafață deschisă.



$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

Aplicând teorema lui Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left(\iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

Presupunând că suprafața S_{Γ} este mobilă cu viteza $\vec{v}$, derivata în raport cu timpul a integralei de suprafață va fi:

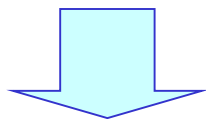
$$\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) = \underbrace{\left(\iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \right)}_{\text{Suprafața este imobilă}} + \underbrace{\iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A}}_{\text{Suprafața este mobilă cu viteza } \vec{v}}$$

Suprafața este imobilă

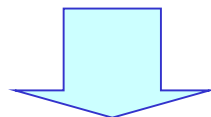
Suprafața este mobilă cu
viteza $\vec{v}$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\iint_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot d\vec{A} \right) = \left(\iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \right) + \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A}$$



$$\left(\iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} \right) = - \left(\iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \right) - \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot}(\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{A}$$



$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B})$$

Forma diferențială a legii lui Faraday

Tensiunea electromotoare indusă (t.e.m.) într-un circuit poate fi separată în doi termeni:

- Componenta t.e.m indusă prin transformare, datorată variației în timp a vectorului inducție magnetică $\vec{B}$:

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e_{\text{transformer}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_{\Gamma}} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}}$$

- Componenta t.e.m indusă prin mișcare, datorată mișcării circuitului:

$$\boxed{\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{e_{\text{motional}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}}$$

Notă: Câmpul electric indus este non-conservativ!!!!

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} \neq 0}$$

Câmpul electric este conservativ doar în regim electrostatic!!!!

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = 0}$$

Cazuri particulare :

1) Suprafața este imobilă ($v = 0$):



$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad}V$$

T.E.M indusă prin mișcare e nulă:

$$e_{\text{motional}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = 0$$

T.E.M indusă prin transformare e ne-nulă:

$$e_{\text{transformer}} = - \iint_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Forma diferențială a legii lui Faraday:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2) Suprafața e mobilă dar câmpul magnetic B este constant în timp:



T.E.M indusă prin mișcare e ne-nulă:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} - \text{grad}V$$

$$e_{\text{motional}} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

7. Ecuatiile lui Maxwell ($\mathbf{v} = 0$)

Forma integrală

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Forma diferențială

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho_v$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Semnificație

Legea lui Faraday
Maxwell 1

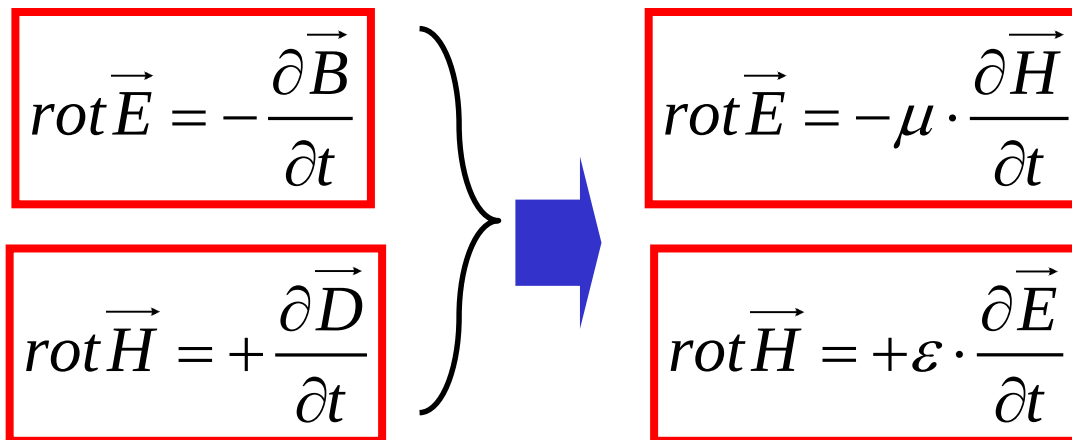
Legea lui Ampère
Maxwell 2

Legea fluxului
electric
Maxwell 3

Legea fluxului
magnetic
Maxwell 4

7. Ecuațiile lui Maxwell ($\mathbf{v} = 0$)

În regiuni fără pierderi ($\sigma=0$) și fără surse ($J=0$), ecuațiile lui Maxwell sunt perfect simetrice, evidențiind faptul că un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic, a cărui variație în timp creează la rândul ei un câmp electric.



The diagram illustrates the relationship between the fundamental Maxwell equations and the constitutive relations. On the left, two equations are listed in red boxes: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ and $\text{rot } \vec{H} = +\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. A large blue arrow points from these equations to the right, where the same two equations are shown in red boxes, but with the magnetic field vector $\vec{B}$ replaced by $\mu \vec{H}$ and the electric displacement vector $\vec{D}$ replaced by $\epsilon \vec{E}$. The resulting equations are $\text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ and $\text{rot } \vec{H} = +\epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$$\begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = +\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} = +\epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array}$$

Cele două ecuații fundamentale ale lui Maxwell sunt axiome ale electromagnetismului. Ele *sunt presupuse a fi corecte*. Totuși, corectitudinea lor este demonstrată de nenumărate rezultate experimentale. Întreaga tehnologie modernă, electrică, electronică și de comunicații se bazează pe aceste ecuații fundamentale.



Câmp electromagnetic



$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H}$$

$$\text{rot} \vec{H} = +\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = -\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

În vid:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} = 0$$



$$\Delta \vec{E} = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

sau

$$\Delta \vec{H} = \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

cu:

$$\mu \cdot \varepsilon = \frac{1}{c^2} \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_r$$

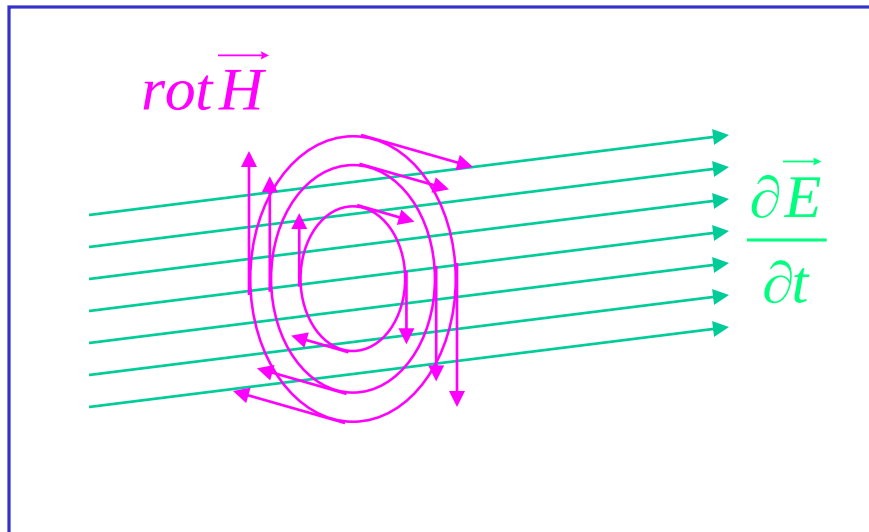
În vid:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

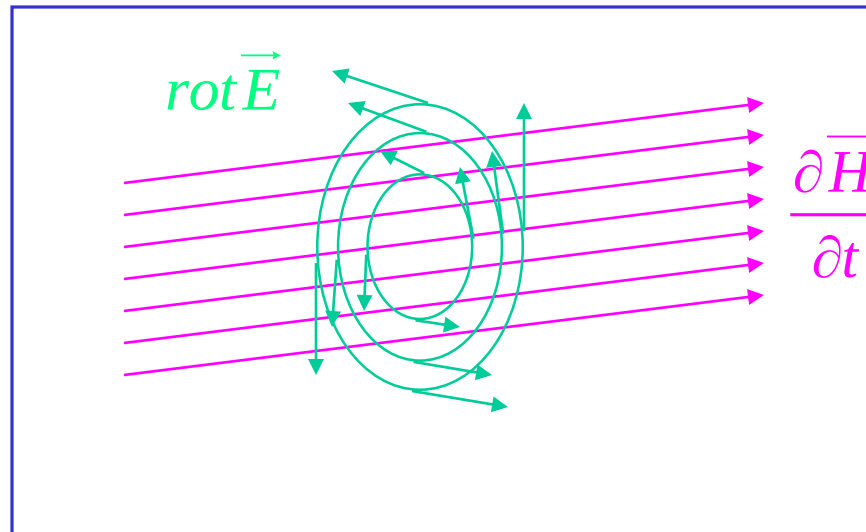
$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Ecuatiile undelor

$$\text{rot} \vec{H} = +\varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$



Caz special : unde plane

$$\vec{E} = E_y(x, t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{H} = H_z(x, t) \cdot \vec{k}$$

satisfac ecuația undelor

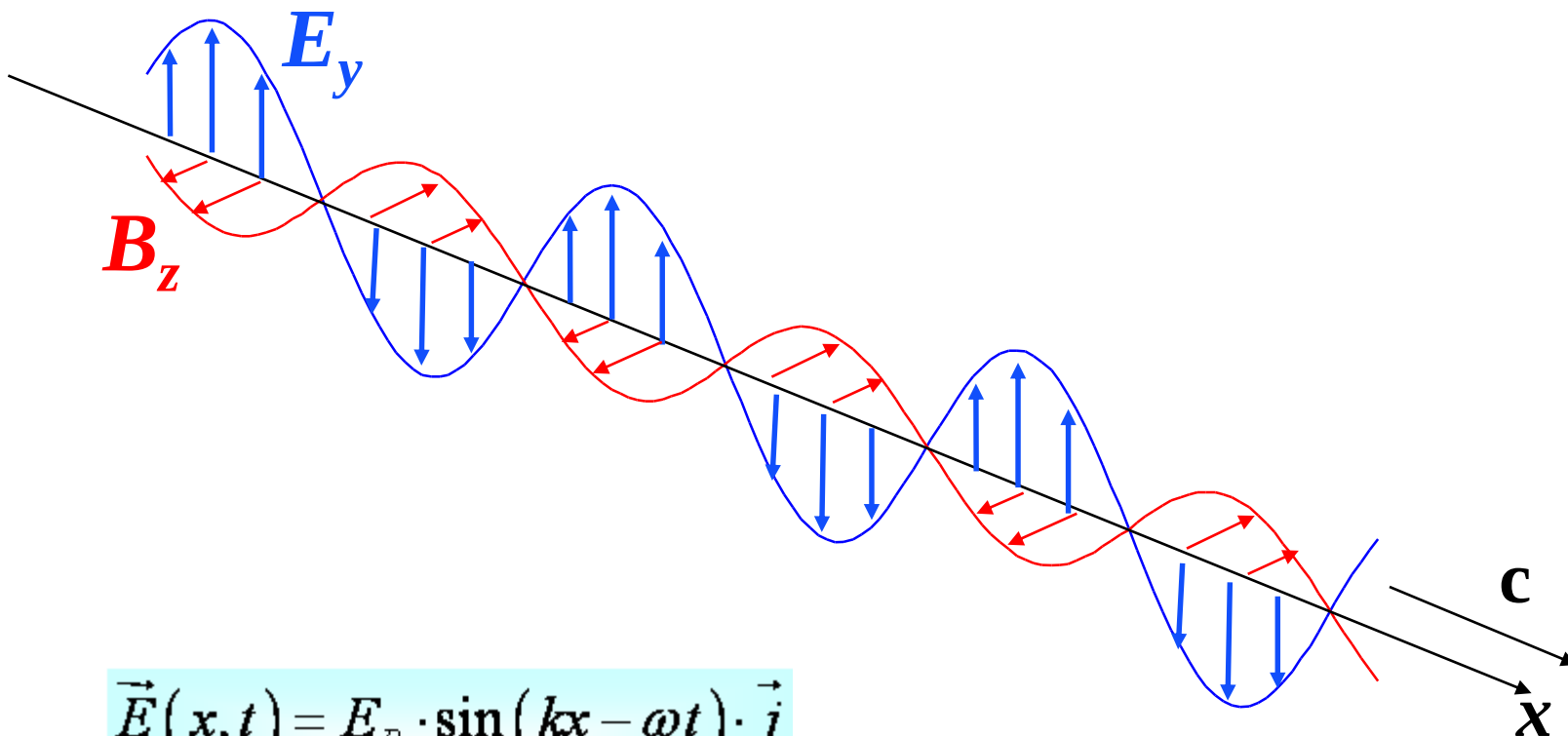
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Cu soluția cunoscută de forma

$$\psi = A \sin(\omega t + \phi)$$



Unda electromagnetică plană



$$\vec{E}(x, t) = E_p \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{B}(x, t) = B_p \cdot \sin(kx - \omega t) \cdot \vec{k}$$