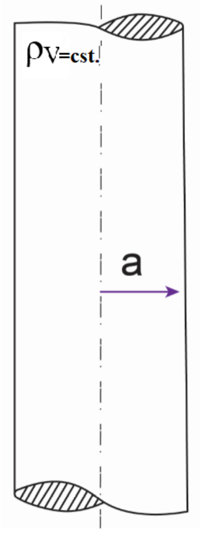
Problema 1.

Să se determine intensitatea câmpului electric și potențialul electric în interiorul și în exteriorul unui cilindru circular infinit lung, de rază a, permitivitate ε_0, încărcat uniform cu densitatea de volum ρ_V=constant, a sarcinii electrice.



Rezolvare:

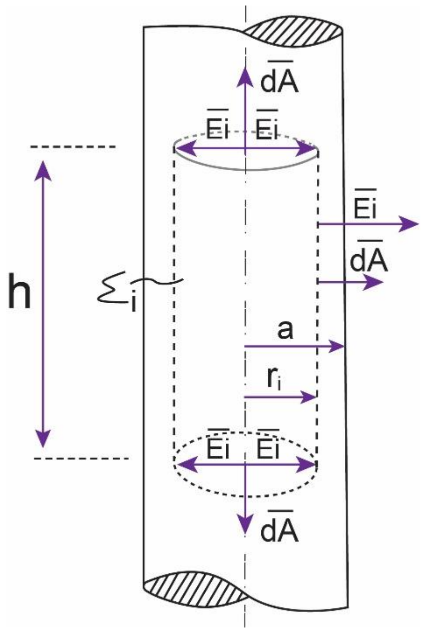
Determinarea intensității câmpului electric

1) În interiorul cilindrului

Datorită simetriei cilindrice perfecte se poate aplica teorema lui Gauss:

$$\oiint_{\Sigma} \overline{E}\cdot\overline{dA} = \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

Pentru a se putea aplica teorema lui Gauss, se va alege o suprafață închisă Σ_i (suprafața gaussiană), de forma unui cilindru de rază r_i<a și înălțime h – figura alăturată.



Se reprezintă pe desen vectorul $\overline{E}_i$ (câmpul electric în interiorul cilindrului), care va avea o direcție radială (o sarcină distribuită pe o suprafață sau într-un volum cilindric va crea un câmp electric radial). Se reprezintă pe desen și vectorul $\overline{dA}$, care reprezintă normala la suprafața Σ_i (normala exterioară, este îndreptată spre exteriorul suprafeței).

Vom adapta terorema lui Gauss pentru problema considerată:

$$\oiint_{\Sigma_i} \overline{E}_i\cdot\overline{dA} = \frac{q_{\Sigma_i}}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

Se va evalua mai întâi membrul stâng al ecuației (2), ținându-se cont de orientarea vectorilor $\overline{E}_i$ și $\overline{dA}$ pe cele trei suprafețe ale cilindrului (aria laterală și ariile bazelor).

$$\oiint_{\Sigma_i} \overline{E}_i\cdot\overline{dA} = \iint_{Al} \underbrace{\overline{E}_i\cdot\overline{dA}}_{\overline{E}_i \text{ paralel cu } \overline{dA}} + \underbrace{2\iint_{Ab} \underbrace{\overline{E}_i\cdot\overline{dA}}_{\overline{E}_i \perp \overline{dA}}}_{=0} = \iint_{Al} E_i\cdot dA = E_i\cdot\oiint_{\Sigma_i} dA = E_i\cdot 2\pi r_i h \tag{3}$$

unde E_i este constant pe suprafața Σ_i (toate punctele de pe suprafață se află la aceeași distanță r_i de axa cilindrului).

În continuare, se va evalua membrul drept al ecuației (2):

$$\frac{q_{\Sigma_i}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_V\cdot V_{cil.}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_V\cdot\pi r_i^2h}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

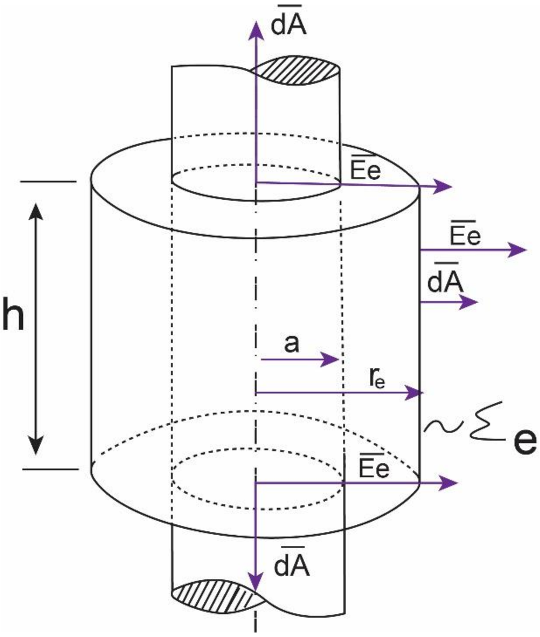
Sarcinile electrice se regăsesc în tot volumul delimitat de suprafața Σ_i.
V_{cil} reprezintă volumul cilindrului de rază r_i.

$$\Rightarrow E_i\cdot 2\pi r_i h=\frac{\rho_V\cdot\pi r_i^2h}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_i=\frac{\rho_V\cdot r_i}{2\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$\overline{E_i}=\frac{\rho_V\cdot r_i}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\overline{r_i}}{r_i} \tag{6}$$

2) În exteriorul cilindrului

Pentru a se putea aplica teorema lui Gauss, se va alege o suprafață închisă Σ_e (suprafața gaussiană), de forma unui cilindru de rază $r_e>a$ și înălțime h – figura alăturată.



Se reprezintă pe desen vectorul $\overline{E_e}$ (câmpul electric în exteriorul cilindrului), care va avea o direcție radială (o sarcină distribuită pe o suprafață sau într-un volum cilindric va crea un câmp electric radial). Se reprezintă pe desen și vectorul $\overline{dA}$, care reprezintă normala la suprafața Σ_e (normala exterioară, este îndreptată spre exteriorul suprafeței).

$$\oiint_{\Sigma_e}\overline{E_e}\cdot\overline{dA}=\frac{q_{\Sigma_e}}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

$$\oiint_{\Sigma_e}\overline{E_e}\cdot\overline{dA}=\iint_{Al}\underbrace{\overline{E_e}\cdot\overline{dA}}_{\overline{E_e}\text{ paralel cu }\overline{dA}}+\underbrace{2\iint_{Ab}\underbrace{\overline{E_e}\cdot\overline{dA}}_{\overline{E_e}\perp\overline{dA}}}_{=0}=\iint_{Al}E_e\cdot dA=E_e\cdot\oiint_{\Sigma_e}dA=E_e\cdot 2\pi r_e h \tag{8}$$

unde E_e este constant pe suprafața Σ_e (toate punctele de pe suprafață se află la aceeași distanță r_e de axa cilindrului).

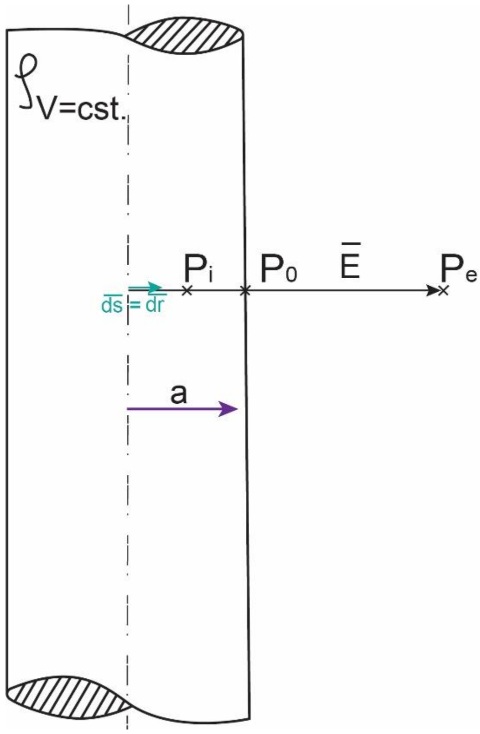
$$\frac{q_{\Sigma_e}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_V\cdot V_{cil.}}{\varepsilon_0}=\frac{\rho_V\cdot\pi a^2h}{\varepsilon_0} \tag{9}$$

V_{cil} – volumul ocupat de sarcinile electrice în interiorul suprafeței închise Σ_e (volumul cilindrului de rază a)

$$\Rightarrow E_e\cdot 2\pi r_e h=\frac{\rho_V\cdot\pi a^2h}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_e=\frac{\rho_V\cdot a^2}{2\varepsilon_0\cdot r_e} \tag{10}$$

$$\overline{E_e} = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot \frac{\overline{r_e}}{r_e^2} \tag{11}$$

Determinarea potențialului electric



1) În interiorul cilindrului

$$V_{P_i} = \int_{P_i}^{P_0} \overline{E_i} \cdot \underbrace{\overline{ds}}_{=\overline{dr}} = -\int_a^{r_{P_i}} \underbrace{\overline{E_i} \cdot \overline{dr}}_{\overline{E_i}\text{ paralel cu }\overline{dr}} = -\int_a^{r_{Pi}} E_i \cdot dr = -\frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot \int_a^{r_{P_i}} r_i \cdot dr = -\frac{\rho_V}{4\varepsilon_0}(r_{P_i}{}^2 - a^2) \tag{12}$$

, unde punctul P_o este considerat a fi punctul pe cilindrul de rază a, pentru care valoarea potențialului se anulează (potențialul de referință).

2) În exteriorul cilindrului

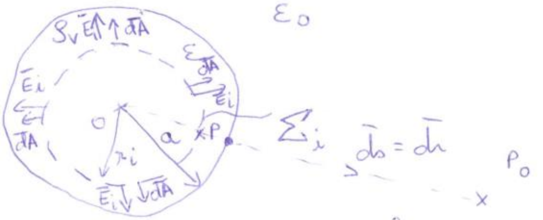
$$V_{P_e} = \int_{P_e}^{P_0} \overline{E_e} \cdot \underbrace{\overline{ds}}_{=\overline{dr}} = \int_{r_{P_e}}^{r_{P_0}} \underbrace{\overline{E_e} \cdot \overline{dr}}_{\overline{E_e}\text{ paralel cu }\overline{dr}} = \int_{r_{P_e}}^{r_{P_0}} E_e \cdot dr = \tag{13}$$

$$= \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot \int_{r_{P_e}}^{r_{P_0}} \frac{1}{r_e} \cdot dr = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot \ln\frac{r_{P_0}}{r_{P_e}} = -\frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot \ln r_{P_e}$$

, punctul P_o este considerat a fi punctul unde valoarea potențialului se anulează (potențialul de referință), respectiv $V_{P_0} = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot a^2 \cdot \ln r_{P_0} = 0$, expesie care se anulează pentru $r_{P0}=1$.

2. Se consideră o sferă de rază a, încărcată cu densitatea volumică de sarcină, ρ_v - ct. Să se determine intensitatea câmpului electric $\bar{E}$ și potențialul electrostatic V în cele două regiuni ale problemei.

a) În interiorul sferei



Se aplică legea fluxului electric: $\oiint_{\Sigma_i} \bar{D}_i \cdot \bar{dA} = q_{\Sigma_i}$

Se alege o suprafață închisă Σ_i de forma unei sfere, cu centrul în O și raza $r_i < a$ (s-a ținut cont de simetria problemei).

Se plasează pe desen vectorul $\bar{D}_i = \varepsilon \cdot \bar{E}_i$, care va avea o direcție radială (s-a stabilit deja că o sarcină distribuită pe o suprafață sau într-un volum sferic va crea un câmp electric radial).

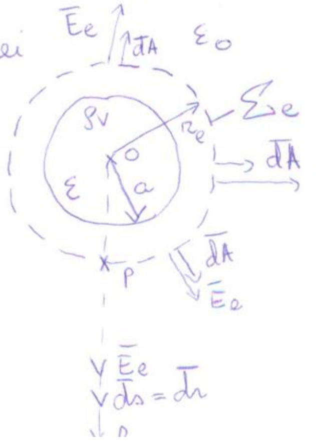
Se plasează pe desen vectorul $\bar{dA}$ (normala exterioară la suprafața închisă Σ).

$$\oiint_{\Sigma_i} \underbrace{\bar{D}_i \cdot \bar{dA}}_{\bar{D}_i \parallel \bar{dA}} = \oiint_{\Sigma_i} \varepsilon \cdot E_i \cdot dA = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{constant pe } \Sigma_i}}{\varepsilon \cdot E_i} \cdot \oiint_{\Sigma_i} dA = \varepsilon \cdot E_i \cdot 4\pi r_i^2$$

$$q_{\Sigma_i} = \rho_v \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{în volumul delimitat de suprafața} \\ \Sigma \text{ se găsesc sarcini el}}}{V_{\Sigma_i}} = \rho_v \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi \cdot r_i^3}_{\text{volumul sferei de rază } r}$$

$$\Longrightarrow \varepsilon \cdot E_i \cdot 4\pi \cdot r_i^2 = \rho_v \cdot \frac{4}{3}\pi r_i^3 \Rightarrow \bar{E}_i = \frac{\rho_v \cdot \bar{r}_i}{3 \cdot \varepsilon}$$

b) În exteriorul sferei



Se aplică legea fluxului electric:

$$\oiint_{\Sigma_e} \bar{D}_e \cdot \bar{dA} = q_{\Sigma_e}$$

Se alege o suprafață închisă Σ_e de forma unei sfere, cu centrul în O și raza $r_e > a$.

Se plasează $\bar{E}_e$ și $\bar{dA}$.

$\bar{D}_e = \varepsilon_0 \cdot \bar{E}_e$

$$\iint_{\Sigma_e} \underbrace{\bar{D}_e \cdot \bar{dA}}_{\bar{D}_e \parallel \bar{dA}} = \iint_{\Sigma_e} \varepsilon_0 \cdot E_e \cdot dA = \varepsilon_0 \cdot E_e \iint_{\Sigma_e} dA = \varepsilon_0 \cdot E_e \cdot 4\pi r_e^2$$

constant pe Σ_e
(toate punctele de pe Σ_e se află la aceeași distanță r_e de centrul problemei, O)

$$Q_{\Sigma_e} = \rho_V \cdot V = \rho_V \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$$

volumul ocupat de sarcini electrice în interiorul suprafeței închise Σ_e (volumul sferei de rază a)

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \cdot E_e \cdot 4\pi r_e^2 = \rho_V \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot a^3 \Rightarrow \bar{E}_e = \frac{\rho_V \cdot a^3}{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot r_e^2} \cdot \frac{\bar{r}_e}{r_e}$$

Determinarea potențialului în cele 2 zone:

a) În exteriorul sferei

$$V_P = \int_P^{P_0} \bar{E}_e \cdot \bar{ds} = \int_{r_P}^{r_{P_0}} E_e \cdot dr = \int_{r_P}^{\infty} \frac{\rho_V \cdot a^3}{3\varepsilon_0 \cdot r_e^2} \cdot dr = \frac{\rho_V \cdot a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \int_{r_P}^{\infty} \frac{1}{r_e^2} \cdot dr = \frac{\rho_V \cdot a^3}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_P}$$

$\bar{ds} \parallel \bar{dr}$, $\bar{E}_e \parallel \bar{dr}$ (punctul P_0 este considerat a fi situat la ∞, deoarece problema pe care o rezolvăm are dimensiuni finite. Drumul dintre P și P_0 se face pe raza ce unește P de P_0)

b) În interiorul sferei

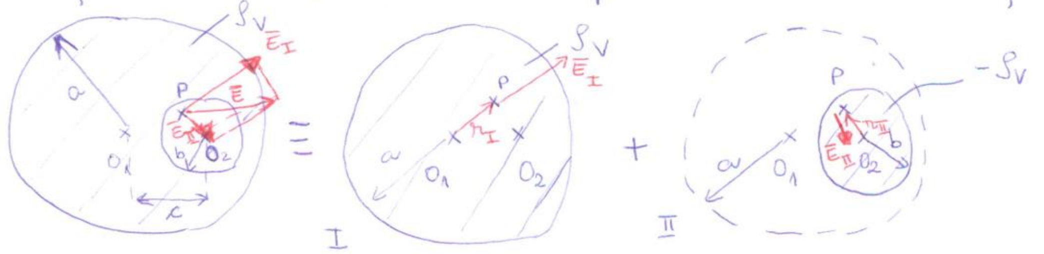
$$V_P = \int_P^{P_0} \bar{E} \cdot \bar{ds} = \int_{r_P}^{a} E_i \cdot dr + \int_a^{\infty} E_e \cdot dr = \int_{r_P}^{a} \frac{\rho_V \cdot r_i}{3\varepsilon_0} \cdot dr + \int_a^{\infty} \frac{\rho_V \cdot a^3}{3\varepsilon_0 r_e^2} \cdot dr$$

$\bar{ds} \parallel \bar{dr}$, $\bar{E} \parallel \bar{dr}$

$$= \frac{\rho_V}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2}\left(a^2 - r_P^2\right) + \frac{\rho_V \cdot a^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a}$$

(Drumul de la punctul P până la P_0 – situat la ∞ – se face pe o rază ce unește cele două puncte. De la P până la suprafața sferei de rază a, ne aflăm în interiorul sferei, deci câmpul electric este cel din interiorul sferei. De la suprafața sferei până la ∞ ne aflăm în exteriorul sferei, deci câmpul electric este $\bar{E}_e$)

3. Un cilindru circular drept, de rază a, foarte lung (practic infinit), de permitivitate ε_0, are în interior o cavitate cilindrică de rază $b < a$, distanța dintre axa cilindrului și axa cavității fiind $c < (a-b)$. Partea masivă a cilindrului este uniform încărcată cu densitatea de volum ρ_V a sarcinii electrice. Se cere să se arate că intensitatea câmpului electric are aceeași valoare și aceeași orientare (câmp uniform) în orice punct din interiorul cavității.



Această problemă se rezolvă prin metoda suprapunerii efectelor.
Problema inițială se poate descompune în "suma" a două probleme:
în prima toată sfera de rază a este încărcată cu sarcina ρ_V, iar în a doua toată sfera de rază b e încărcată cu sarcina $-\rho_V$ $\Rightarrow$

în interiorul cavității, prin suprapunerea celor două probleme (I și II), se obține din nou o sarcină nulă $(-\rho_V + \rho_V = 0)$, iar câmpul electric poate fi determinat prin suprapunerea câmpului obținut în situația I și II.

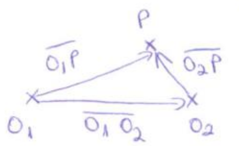
Se alege un punct oarecare P în interiorul cavității. Se determină câmpul electric creat în problema I în acest punct $\left(\bar{E}_I = \dfrac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot \bar{r}_I \Rightarrow\right.$

$\Rightarrow \left.\bar{E}_I = \dfrac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot \overline{O_1P}\right)$ $\rightarrow$ Determinat în problema

Se determină câmpul electric creat în punctul P în problema a II-a

$$\Rightarrow \bar{E}_{II} = \frac{(-\rho_V)}{2\varepsilon_0} \cdot \bar{r}_{II} = \frac{(-\rho_V)}{2\varepsilon_0} \cdot \overline{O_2P}$$

Se determină $\bar{E}_p = \bar{E}_I + \bar{E}_{II} = \dfrac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot \overline{O_1P} - \dfrac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot \overline{O_2P} = \dfrac{\rho_V}{2\varepsilon_0}\left(\overline{O_1P} - \overline{O_2P}\right)$

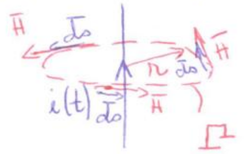


$$\Rightarrow \overline{O_1O_2} = \overline{O_1P} - \overline{O_2P}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_p = \frac{\rho_V}{2\varepsilon_0} \cdot \overline{O_1O_2}$$

P a fost ales arbitrar, deci valoarea câmpului este aceeași în întreaga cavitate, iar toate mărimile din componența formulei lui $\bar{E}_p$ sunt constante: ρ_V, ε_0, $\overline{O_1O_2}$!

4. Se consideră un fir conductor, infinit lung, parcurs de curentul i variabil în timp. Să se determine câmpul magnetic $\bar{H}$ creat de acest curent.



Se aplică legea lui Ampère: se alege un contur închis Γ pe care să se determine circulația vectorului $\bar{H}$. Datorită formei liniilor de câmp magnetic (circulare - se pot pune în evidență experimental, folosind pilitură de fier), conturul Γ e un cerc.

Sensul conturului Γ coincide cu sensul vectorului câmp magnetic. Acest sens se obține cu regula burghiului drept (se consideră un burghiu plasat ca firul conductor - pe direcția acestuia - și se învârte a.î. burghiul să înainteze în sensul curentului. Sensul vectorilor $\bar{H}$ și $\bar{ds}$ este sensul în care învârtim burghiul - vezi desen).

$$\oint_{\Gamma} \bar{H}\cdot\bar{ds} = i_{S_{\Gamma}} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \underbrace{\bar{H}\cdot\bar{ds}}_{\bar{H}\parallel\bar{ds}} = \oint_{\Gamma} H\cdot ds = H\oint_{\Gamma} ds = H\cdot 2\pi r = i$$

constant pe conturul Γ
(toate punctele de pe Γ sunt plasate la aceeași distanță de firul $i \rightarrow H$-ct)

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{i}{2\pi r}}$$

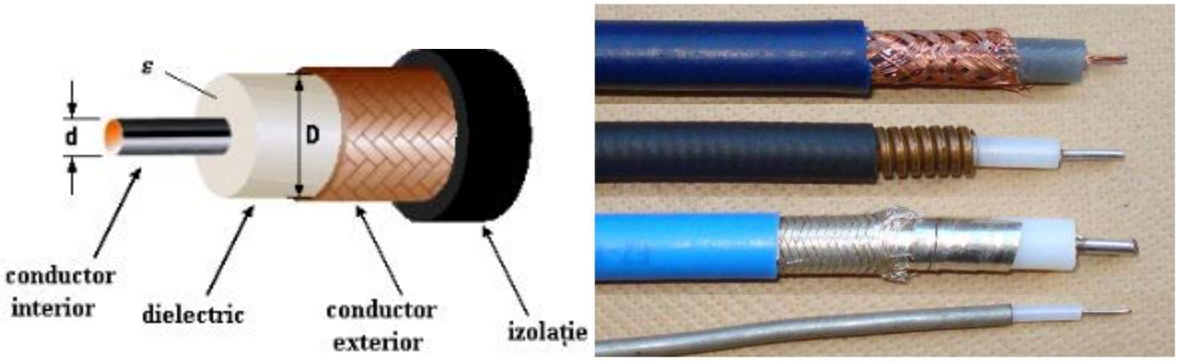
De reținut! (Se va folosi de multe ori)

Problema 5.

Un cablu coaxial format dintr-un conductor cilindric de rază a și un conductor tubular de rază interioară b și exterioară c, este străbătut de un curent electric i, repartizat uniform în secțiune J=cst. Cablul se consideră a fi infinit lung. Să se determine intensitatea câmpului magnetic creat în cele 4 regiuni indicate în figură.

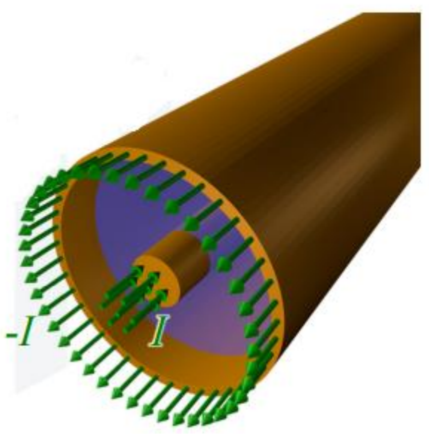
Rezolvare:

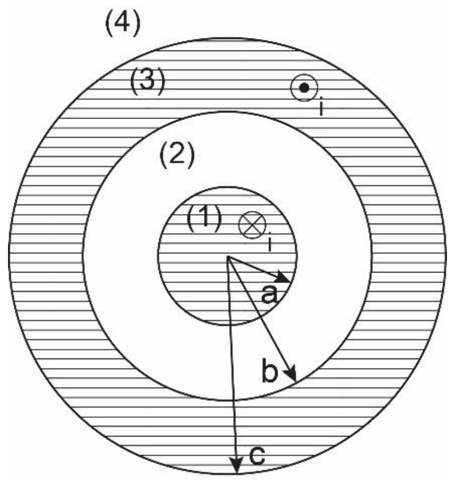
* Cablurile coaxiale sunt cele mai întâlnite tipuri de linii de transmisie, folosite în diverse aplicații: conectarea componentelor și dispozitivelor de microunde, transmiterea semnalelor de la un echipament la altul sau în cazul măsurătorilor de microunde. Cablurile coaxiale sunt realizate dintr-un conductor interior și unul exterior, dispuse concentric, separate de un dielectric. În exterior cablul este acoperit cu un material izolator, pentru protecţie. Conductorul exterior se conectează la masă, asigurându-se în acest fel ecranarea cablului.*



Construcția și exemple de cabluri coaxiale

Cablul coaxial este fromat dintr-un conductor de dus parcurs de curentul i și un conductor de întors, parcurs de curentul -i.





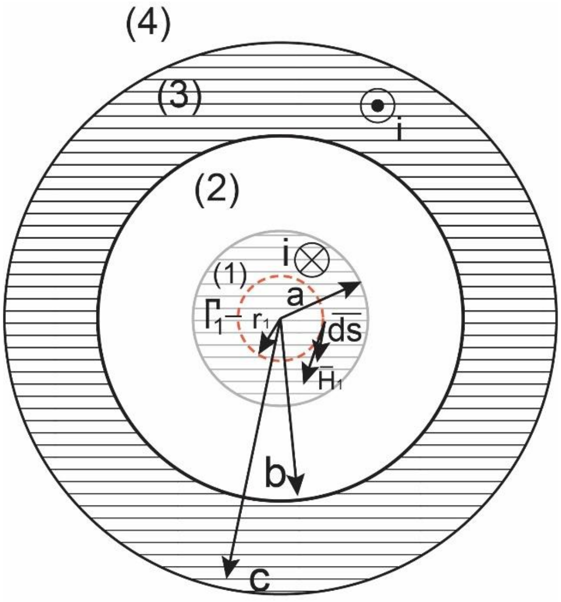
Pentru rezolvarea problemei se aplică teorema lui Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\cdot\overline{ds} = \sum i_{S_\Gamma} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \overline{H}\cdot\overline{ds} = \iint_{S_\Gamma} \overline{J}\cdot\overline{dA} \qquad (1)$$

Regiunea (1)

Pentru a se putea aplica teorema lui Ampère, se alege o curbă închisă Γ_1 de integrare, circulară, de rază $r_1 \in (0, a)$ - conform figurii, care reprezintă chiar o linie de câmp magnetic. Liniile de câmp magnetic sunt cercuri concentrice cu conductorul. Vectorul intensitate câmp magnetic ($\overline{H_1}$) reprezintă tangenta în orice punct la linia de câmp și el este constant de-a lungul unei linii de câmp. Direcția vectorului $\overline{H_1}$ este dat de direcția curentului, conform regulii burghiului drept. În acest caz, curentul intră în conductor, respectiv $\overline{H_1}$ este îndreptat în jos. ds reprezintă un element infinitesimal din lungimea liniei de câmp (curba Γ_1), $\overline{ds}$

reprezintă vectorul tangent în orice punct la curba Γ_1, iar direcția lui este aceeași cu direcția vectorului câmp magnetic $\overline{H_1}$ - **precizări valabile pentru toate celelalte regiuni !**



Ținând cont de cele de mai sus, aplicăm teorema lui Ampère de-a lungul curbei Γ_1:

$$\oint_{\Gamma_1} \overline{H_1} \cdot \overline{ds} = \sum i_{S_{\Gamma_1}} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma_1} \overline{H_1} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_{\Gamma_1}} \overline{J} \cdot \overline{dA} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma_1} H_1 \cdot ds = \iint_{S_{\Gamma_1}} J \cdot dA \qquad (2)$$

$\overline{H_1}$ colinear cu $\overline{ds}$, respectiv $\overline{J}$ paralel cu $\overline{dA}$ și au aceeași orientare la suprafața $S_{\Gamma 1}$, respectiv intră în suprafață ($\overline{J}$ are aceeași orientare ca și i).

$$\Leftrightarrow H_1 \cdot \oint_{\Gamma_1} ds = J \cdot \iint_{S_{\Gamma_1}} dA \Leftrightarrow H_1 \cdot 2\pi r_1 = J \cdot \pi r_1^2 \qquad (3)$$

unde $J = \dfrac{i}{\pi a^2}$ deoarece conductorul cilindric de rază a este parcurs de curentul i, uniform repartizat în secțiune cu densitatea de curent J=cst.

$$\Rightarrow H_1 = \frac{i \cdot r_1}{2\pi a^2} \qquad (4)$$

Regiunea (2)

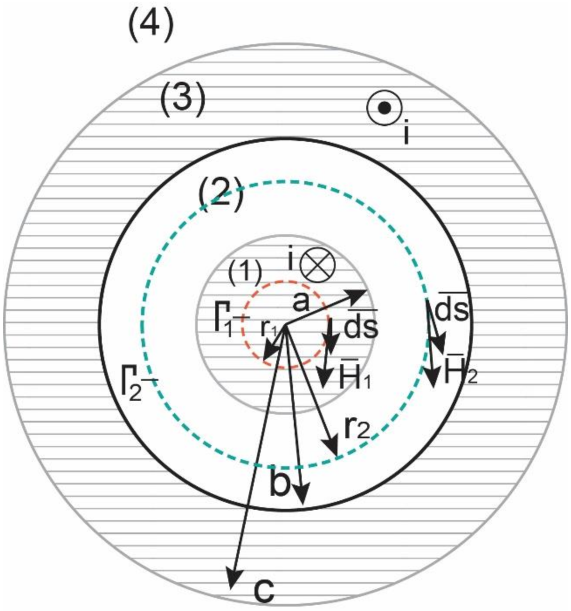
Se aplică teorema lui Ampère pe curba închisă Γ_2, circulară, de rază $r_2 \in (a, b)$ - conform figurii, care reprezintă chiar o linie de câmp magnetic.

$$\oint_{\Gamma_2} \overline{H_2} \cdot \overline{ds} = \sum i_{S_{\Gamma 2}} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma_2} \overline{H_2} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_{\Gamma_2}} \overline{J} \cdot \overline{dA} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma_2} H_2 \cdot ds = \iint_{S_{\Gamma_2}} J \cdot dA \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_2 \cdot \oint_{\Gamma_2} ds = J \cdot \iint_{S_{\Gamma_2}} dA \Leftrightarrow H_2 \cdot 2\pi r_2 = J \cdot \pi a^2 \qquad (6)$$

Suprafața $S_{\Gamma 2}$ este parcursă de curentul i uniform repartizat în secțiune cu densitatea de curent J=cst.

$$\text{dar } J = \frac{i}{\pi a^2} \Rightarrow H_2 = \frac{i}{2\pi r_2} \qquad (7)$$



Regiunea (3)

Se aplică teorema lui Ampère pe curba închisă Γ3, circulară, de rază $r_3 \in (b,c)$ - conform figurii, care reprezintă chiar o linie de câmp magnetic.

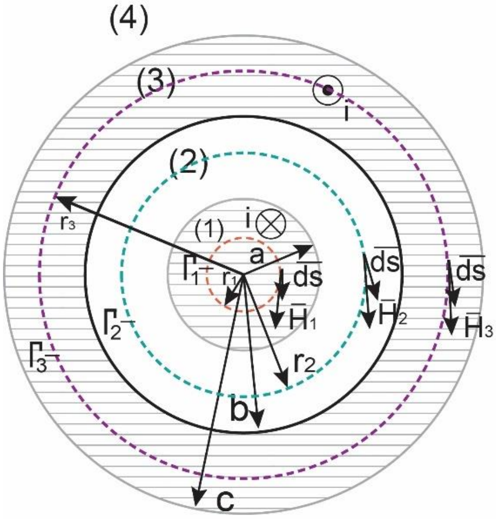
$$\oint_{\Gamma_3} \overline{H_3} \cdot \overline{ds} = \sum i_{S_{\Gamma_3}}$$

$$\sum i_{S_{\Gamma_3}} = i + \iint_{S_{\Gamma_3}} \bar{J} \cdot \overline{dA} = i - \iint_{S_{\Gamma_3}} J \cdot dA = i - J \cdot \iint_{S_{\Gamma_3}} dA = i - J \cdot (\pi r_3^2 - \pi b^2) \qquad (8)$$

Practic suprafața $S_{\Gamma 3}$ închide în interior tot curentul de conducție de dus (i) și o parte din curentul de conducție de întors (-i), distribuit uniform în secțiune cu densitatea $J = \frac{i}{\pi c^2 - \pi b^2}$.

$$\Rightarrow H_3 \cdot 2\pi r_3 = i - \frac{i \cdot (\pi r_3^2 - \pi b^2)}{\pi c^2 - \pi b^2} \Leftrightarrow H_3 \cdot 2\pi r_3 = \frac{i \cdot (\pi c^2 - \pi b^2) - i \cdot (\pi r_3^2 - \pi b^2)}{\pi c^2 - \pi b^2}$$

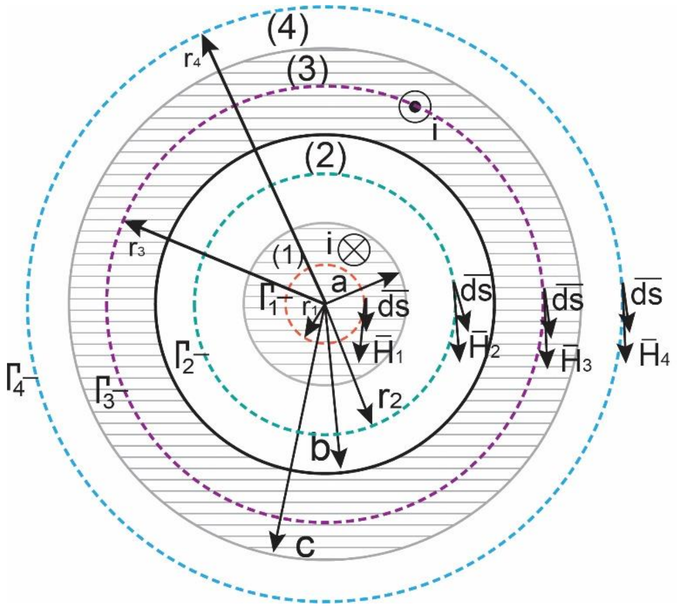
$$\Leftrightarrow H_3 \cdot 2\pi r_3 = \frac{i \cdot \pi \cdot (c^2 - b^2 - r_3^2 + b^2)}{\pi \cdot (c^2 - b^2)} \Rightarrow H_3 = \frac{i \cdot (c^2 - r_3^2)}{2\pi r_3 \cdot (c^2 - b^2)} \qquad (9)$$

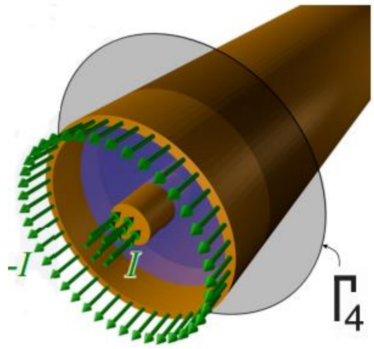


Regiunea (4)

Se aplică teorema lui Ampère pe curba închisă Γ4, circulară, de rază $r_4 \in (c, \infty)$ - conform figurii. Prin conductorul de dus circulă curentul i, iar prin cel de întors se întoarce curentul -i. Astfel, în regiunea 4, curba Γ4 închide în interior tot curentul (cel care intră și cel care iasă), care va fi egal cu zero.

$$\oint_{\Gamma_4} \overline{H_4} \cdot \overline{ds} = \sum i_{S_{\Gamma_4}}$$
$$\sum i_{S_{\Gamma_4}} = i - i = 0 \Rightarrow H_4 \cdot 2\pi r_4 = 0 \Rightarrow H_4 = 0 \tag{10}$$



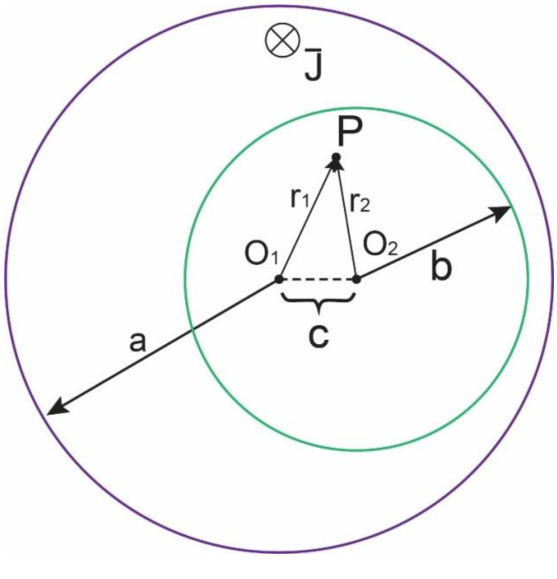


Problema 6. Se consideră un conductor cilindric de rază a, foarte lung (practic infinit), de permeabilitate μ_0, care are în interior o cavitate cilindrică excentrică, tot infinit lungă, de rază b<a. Distanța dintre axa cilindrului și axa cavității este c. Partea masivă a cilindului, mai puțin cavitatea, este parcursă de un curent repartizat uniform în secțiune cu densitatea de curent J=cst., conform figurii. Să se arate că în orice punct din interiorul cavității cîmpul magnetic este un câmp uniform (are aceeași valoare și aceeași orientare).

Rezolvare:

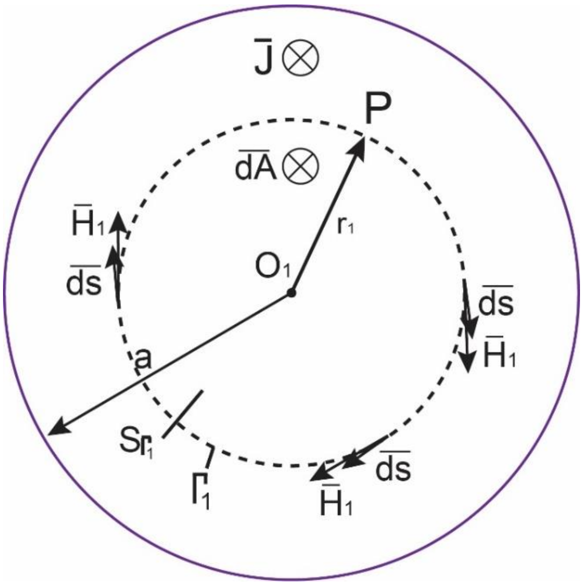
Se consideră un punct P în interiorul cavității, unde se dorește a se determina câmpul magnetic. Problema se rezolvă utilizând principiul suprapunerii efectelor. Se rezolvă mai întâi problema în întreg cilindrul de rază a, fără cavitate și se determină câmpul magnetic $\overline{H_1}$, apoi se rezolvă problema în cavitatea de rază b, determinându-se câmpul magnetic $\overline{H_2}$.
Câmpul total se obține prin suprapunerea celor două câmpuri: $\overline{H} = \overline{H}_1 + \overline{H}_2$.
Pentru rezolvarea problemei se aplică teorema lui Ampère. **Toate precizările de la problema 2, privind aplicarea teoremei lui Ampère, se păstrează !!!**

Problema cuplată cilindru+cavitate



$\overline{H} = \overline{H}_1 + \overline{H}_2$

Cilindru



$$\int_{\Gamma_1} \overline{H_1} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_{\Gamma_1}} \overline{J} \cdot \overline{dA}$$

$\overline{H_1}$ colinear cu $\overline{ds}$

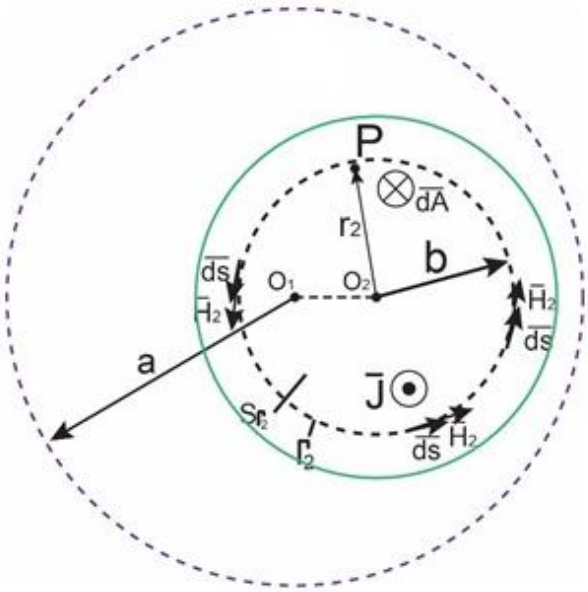
$\overline{J}$ paralel cu $\overline{dA}$, ambii intră în suprafață, produsul lor scalar este: $\overline{J} \cdot \overline{dA} = J \cdot dA \cdot \cos 90^\circ = J \cdot dA$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_1} H_1 \cdot ds = \iint_{S_{\Gamma_1}} J \cdot dA \Leftrightarrow H_1 \cdot 2\pi r_1 = J \cdot \pi r_1^2$$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{J \cdot r_1}{2}$$

$$\overline{H_1} = \frac{\overline{J} \times \overline{r_1}}{2}$$

Cavitate



$$\int_{\Gamma_2} \overline{H_2} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_{\Gamma 2}} \overline{J} \cdot \overline{dA}$$

$\overline{H_2}$ colinear cu $\overline{ds}$

$\overline{J}$ paralel cu $\overline{dA}$, $\overline{J}$ iese din suprafață, iar $\overline{dA}$ intră, produsul lor scalar este:

$$\overline{J} \cdot \overline{dA} = J \cdot dA \cdot \cos 180^\circ = -J \cdot dA$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_2} H_2 \cdot ds = -\iint_{S_{\Gamma_2}} J \cdot dA \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H_2 \cdot 2\pi r_2 = -J \cdot \pi r_2^2$$

$$\Rightarrow H_2 = -\frac{J \cdot r_2}{2}$$

$$\overline{H_2} = \frac{\overline{J} \times \overline{r_2}}{2}$$

Cuplând cele două probleme, prin suprapunerea efectelor, rezultă:

$$\Rightarrow \overline{H} = \overline{H_1} + \overline{H}_2 = \frac{\overline{J} \times \overline{r}_1}{2} - \frac{\overline{J} \times \overline{r_2}}{2} = \frac{\overline{J}}{2} \times \left(\underbrace{\overline{r_1} - \overline{r_2}}_{\overline{O_1O_2} = c} \right)$$

În final, $\overline{H} = \dfrac{\overline{J} \times \overline{O_1O_2}}{2}$.

Între vectorii $\overline{J}$ și $\overline{r}$, produsul este vectorial. Deoarece cei doi vectori sunt perpendiculari ($\overline{J}$ perpendicular pe suprafață, deci și pe $\overline{r}$), produsul lor vectorial este: $\left|\overline{J}\times\overline{r}\right| = J\cdot r\cdot \sin 90^{\circ} = J\cdot r$

Dacă produsul între cei doi vectori ar fi scalar, atunci $\left|\overline{J}\cdot\overline{r}\right| = J\cdot r\cdot \cos 90^{\circ} = 0$.

Analog pentru vectorii $\overline{J}$ și $\overline{r_1}$, $\overline{J}$ și $\overline{r_2}$, respectiv $\overline{J}$ și $\overline{O_1O_2}$.

Având în vedere că, intensitatea câmpului magnetic nu depinde de poziția punctului P în interiorul cavității, deoarece distanța $\overline{O_1O_2} = c$ este constantă și J=constant, rezultă că în interiorul cavității câmpul magnetic are tot timpul aceeași valoare și directie, fiind astfel un câmp uniform.

Problema 7.

Un cadran metalic de formă dreptunghiulară (de lungime $a = 4$ [cm] și lățime $b = 1.5$ [cm]) se află în apropierea unui conductor metalic drept, infinit lung parcurs de un curent electric variabil în timp, $i(t) = I\sqrt{2}\cdot sin(\omega\cdot t)$ (având valoarea efectivă $I = 1$ [A] și frecvența $f = 50$ [Hz]), a se vedea Fig. 1. Să se determine tensiunea electromotoare indusă, $e_{\Gamma}(t)$, în cadranul metalic dacă acesta se deplasează cu viteza constantă, $v = 50$ [cm/s], față de conductorul infinit lung. Distanța inițială de separație dintre cadran și conductor este de $d_0 = 2$ [cm]. Conductorul infinit lung se consideră de dimensiuni (rază) neglijabile în comparație cu restul dimensiunilor geometrice ale problemei.

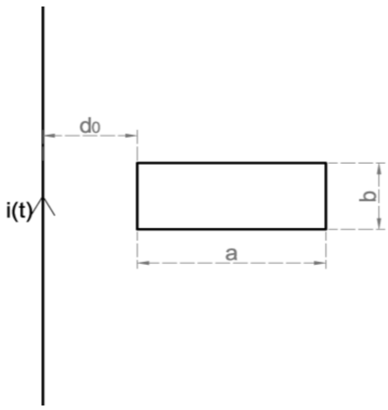


Fig. 1. Cadran metalic în vecinătatea unui conductor drept infinit lung parcurs de un curent i(t).

Rezolvare:

Pulsația semnalului de curent din conductorul infinit lung este:

$$\omega = 2\cdot\pi\cdot f = 314.15\ [Hz] \tag{1}$$

Conductorul metalic fiind infinit lung, inducția câmpului magnetic, $\vec{B}$, creat va varia în funcție de distanța de separație conform relației, obținută în cadrul unei probleme anterioare:

$$B(r) = \frac{\mu\cdot i}{2\cdot\pi\cdot r} \tag{2}$$

unde: r este distanța de separație a punctului în care se evaluează inducția magnetică față de conductorul parcurs de curentul i, iar μ este permeabilitatea magnetică a mediului (în cazul de față aer $\mu = \mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$ [H/m]).

Sensul și direcția lui $\vec{B}$ se obțin aplicând regula mâinii drepte.

a) Cadranul se deplasează pe direcție perpendiculară pe lungimea conductorului, conform celor prezentate în Fig. 2.

În acest caz, pe baza ecuației de mișcare, distanța de separație dintre cadranul metalic și conductorul infinit lung la un moment dat este:

$$d = d_0 + v \cdot t \tag{3}$$

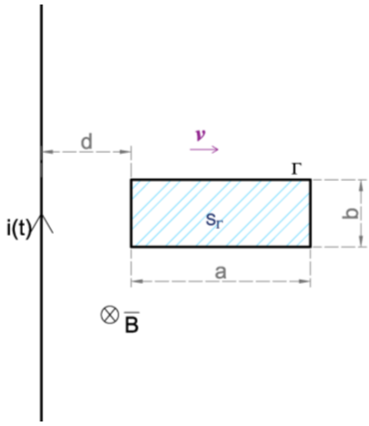


Fig. 3. Suprafața pe care trebuie evaluat fuxul magnetic

Metoda I. Se aplică formula de definiție a tensiunii electromotoare induse:

$$e_\Gamma(t) = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{4}$$

unde: Γ reprezintă conturul cadranului metalic, iar Φ_m este fluxul magnetic prin suprafața S_Γ delimitată de conturul Γ (a se vedea Fig. 3), creat de curentul care parcurge conductorul drept.

Acest fluxul magnetic se poate determina conform relației de definiție:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} \tag{5}$$

unde: S este suprafața prin care se calculează fluxul magnetic (în cazul de față suprafața S_Γ), iar $\overrightarrow{\mathrm{d}A}$ este vector normal la unitatea de suprafață infinitezimală dA.

Se precizează faptul că pentru problema studiata vectorii $\vec{B}$ și $\overrightarrow{dA}$ sunt paraleli și ca urmare produsul lor scalar devine:

$$\vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = B \cdot dA \cdot cos(0°) = B \cdot dA \tag{6}$$

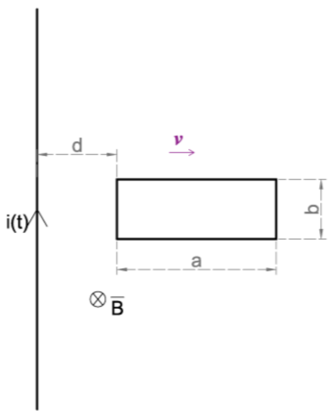


Fig. 2. Desen genera Cazul A.

Luând în considerare că inducția magnetică, $\vec{B}$, variază doar cu distanța de separație față de conductorul infinit lung, pentru a reduce efortul de calcul necesar evaluării integralei de suprafață (o integrală dublă), se definește o fâșie dA de grosime infinitezimală dr aflată la distanța r față de conductor (a se vedea Fig. 4).

Aria acestei fâșii infinitezimale este egală cu:

$$dA = b \cdot dr \tag{7}$$

Fiind o fâșie de grosime infinitezimală, se poate considera că toate punctele din spațiu care formează fâșia sunt la aceeași distanță față de conductor și ca urmare prezintă aceeași valoare a inducției magnetice, $\vec{B}$.

În consecință integrala dublă de suprafață aferentă evaluării fluxului magnetic se poate transforma într-o integrală simplă după r:

$$\Phi_m = \iint_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_{S_\Gamma} B \cdot dA \Rightarrow \int B(r) \cdot b \cdot dr \tag{8}$$

Pentru a acoperi toată suprafața S_Γ integrala de mai sus trebuie evaluată de la $r = d$ până la $r = d + a$, corespunzător deplasării fâșiei de grosime infinitezimale alese dintr-un capăt în altul a cadranului metalic:

$$\Phi_m = \iint_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_{d}^{d+a} B(r) \cdot b \cdot dr = \int_{d_0+v\cdot t}^{d_0+v\cdot t+a} \frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot b \cdot dr = \int_{d_0+v\cdot t}^{d_0+v\cdot t+a} \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot b \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot b \cdot sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{d_0+v\cdot t}^{d_0+v\cdot t+a} \frac{1}{r} \cdot dr \tag{9}$$

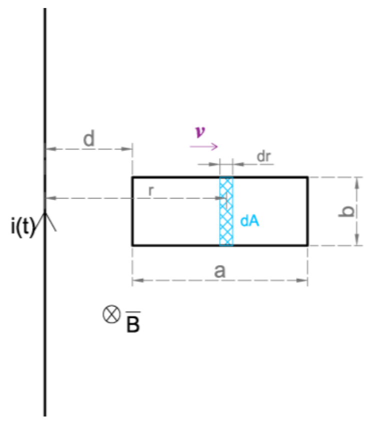


Fig. 4. Fâșia infinitezimală pentru care $\vec{B}$ se poate considera constant.

$$\Rightarrow \Phi_m = \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot b \cdot sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{d_0 + v \cdot t + a}{d_0 + v \cdot t}\right) \tag{10}$$

În continuare se introduce relația obținută a fluxului magnetic, ecuația (10), în formula de definiție a tensiunii electromotoare induse, ecuația (4) și se aplică tehnica derivări prin părți:

$$e_\Gamma(t) = -\frac{d}{dt}[\Phi_m(t)] = -\frac{d}{dt}[f(t)\cdot g(t)] = -[f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)] \tag{11}$$

unde:

$$f(t) = \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2}\cdot b\cdot sin(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi} \Rightarrow f'(t) = \frac{\mu_0\cdot I\sqrt{2}\cdot b\cdot\omega\cdot cos(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi} \tag{12}$$

respectiv

$$g(t) = ln\left(\frac{d_0 + v\cdot t + a}{d_0 + v\cdot t}\right) \tag{13}$$

Pentru a calcula derivata funcției $g(t)$ se aplică relațiile de derivare:

$$F'(u(t)) = F'\cdot u'(t) \tag{14}$$

$$\left(\frac{F}{G}\right)' = \frac{F'\cdot G - G'\cdot F}{G^2} \tag{15}$$

ca urmare:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d_0 + v\cdot t}{d_0 + v\cdot t + a}\cdot\frac{v\cdot(d_0 + v\cdot t) - v\cdot(d_0 + v\cdot t + a)}{(d_0 + v\cdot t)^2} \\ &= \frac{-v\cdot a}{(d_0 + v\cdot t)\cdot(d_0 + v\cdot t + a)} \end{aligned} \tag{16}$$

Așadar tensiunea electromotoare indusă în cadranul metalic o să fie dată de următoarea relație de calcul:

$$\begin{aligned} e_\Gamma(t) = -\Bigg[& \underbrace{\frac{\mu_0\cdot I\sqrt{2}\cdot b\cdot\omega\cdot cos(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi}}_{f'}\cdot\underbrace{ln\left(\frac{d_0 + v\cdot t + a}{d_0 + v\cdot t}\right)}_{g} \\ & + \underbrace{\frac{\mu_0\cdot I\sqrt{2}\cdot b\cdot sin(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi}}_{f}\cdot\underbrace{\frac{-v\cdot a}{(d_0 + v\cdot t)\cdot(d_0 + v\cdot t + a)}}_{g'}\Bigg] \end{aligned} \tag{17}$$

Formulă de calcul care se poate rescrie ca și:

$$e_\Gamma = -\frac{\mu_0 bI\sqrt{2}}{2\pi}\left[\omega cos(\omega t)\, ln\left(\frac{d_0 + vt + a}{d_0 + vt}\right) - sin(\omega t)\frac{va}{(d_0 + vt)(d_0 + vt + a)}\right] \tag{18}$$

În Fig. 5 se prezintă forma de undă a tensiunii electromotoare induse în cadranul metalic corespunzător datelor numerice din enunțul problemei. Se poate constata scăderea treptată a amplitudinii acestui semnal de tensiune o dată cu trecerea timpului (cu îndepărtarea cadranului de conductorul infinit lung sursă a câmpului magnetic):

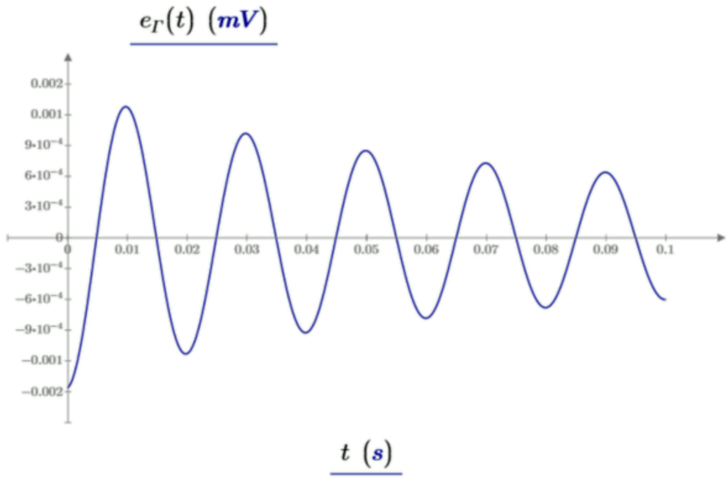


Fig. 5. Forma de undă a tensiunii electromotoare induse

Metoda II. Se aplică relația detaliată a tensiunii electromotoare induse, determinată în cadrul cursului, pe baza celor două componente: cea de transformare și cea de mișcare:

$$e_\Gamma(t) = e_{\Gamma_T}(t) + e_{\Gamma_m}(t) \tag{19}$$

unde: e_{Γ_T} este componenta de transformare a tensiunii electromotoare induse (ce s-ar induce în cadran dacă acesta ar fi fix și s-ar analiza fiecare poziție a cadranului ca o poziție fixă și fenomenul de deplasare în ansamblul ei), iar e_{Γ_m} este componenta de tensiune electromotoare datorată deplasării cadranului metalic:

$$e_{\Gamma_T}(t) = -\iint_{S_\Gamma} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \overrightarrow{dA} \tag{20}$$

$$e_{\Gamma_m}(t) = \int_\Gamma \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{ds} \tag{21}$$

în relația (21) $\overrightarrow{ds}$ reprezintă elementul de lungime tangent la conturul Γ al cadranului.

Pentru a determina componenta de transformare a tensiunii electromotoare induse se introduce relația inducției magnetice (2) în ecuația (20) și se aplică tehnica de transformare a integralei duble de suprafață în integrală simplă după r prezentată la metoda anterioară de rezolvare (a se vedea Fig. 4 și respectiv ecuația (8)):

$$e_{\Gamma_T}(t) = -\iint_{S_\Gamma} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot \overrightarrow{dA} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{dB(r)}{dt} \cdot dA = -\iint_{S_\Gamma} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 \cdot i(t)}{2 \cdot \pi \cdot r}\right) \cdot dA \tag{22}$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_T}(t) = -\int_{d_0+v\cdot t}^{d_0+v\cdot t+a} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2}\cdot \sin(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi\cdot r}\right)\cdot b\cdot dr$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_T}(t) = -\int_{d_0+v\cdot t}^{d_0+v\cdot t+a} \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2}\cdot \omega\cdot \cos(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi\cdot r}\cdot b\cdot dr$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_T}(t) = -\frac{\mu_0\cdot b\cdot I\sqrt{2}\cdot\omega\cdot cos(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi}\cdot ln\left(\frac{d_0+v\cdot t+a}{d_0+v\cdot t}\right) \qquad (23)$$

Se constată: componenta de transformare corespunde cu primul termen din relația tensiunii electromotoare induse obținute prin prima metodă de rezolvare prezentată (a se vedea ecuația (17)).

Pentru a evalua componenta de mișcare a tensiunii electromotoare induse se notează laturile cadranului ca în Fig. 6 și se descompune integrala pe fiecare latură în parte:

$$\int_{\Gamma} ds = \int_A^B ds + \int_B^C ds + \int_C^D ds + \int_D^A ds \qquad (24)$$

Aplicând regula mâinii drepte se determină că direcția produsului vectorial $(\vec{v}\times\vec{B})$ este paralelă cu direcția conductorului infinit lung și ca urmare integrala aferentă laturilor AB și respectiv CD are valoarea 0. Pe aceste laturi unghiul dintre $(\vec{v}\times\vec{B})$ și $\overrightarrow{ds}$ este de 90° și ca urmare produsul scalar $(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds}$ va fi nul:

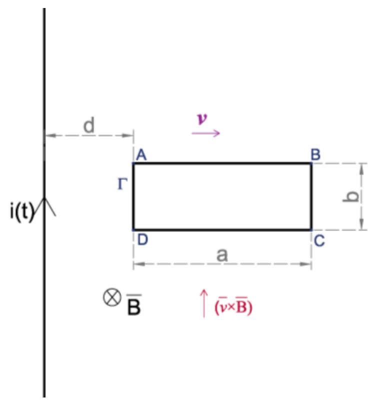


Fig. 6. Conturul Γ de integrare

$$e_{\Gamma_m}(t) = \underbrace{\int_A^B (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds}}_{=0} + \underbrace{\int_B^C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds}}_{\neq 0} + \underbrace{\int_C^D (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds}}_{=0} + \underbrace{\int_D^A (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds}}_{\neq 0} \qquad (25)$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_m}(t) = \int_B^C (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds} + \int_D^A (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\overrightarrow{ds} \qquad (26)$$

Termenii de sub integrală (v – viteza de deplasare a cadranului și respectiv B – inducția magnetică) având valori constante de-a lungul celor două laturi BC și DA ies de sub integrală, iar $\int ds$ reprezintă lungimea acestor laturi (lungime egală cu lățime b a cadranului). Se atrage atenția asupra faptului că de-a lungul laturii DC vectorul $\overrightarrow{ds}$ are sens opus față de sensul produsului vectorial $(\vec{v}\times\vec{B})$ și ca urmare integrala de-a lungul laturii BC o să aibă o valoare negativă.

$$\Rightarrow e_{\Gamma_m}(t) = \int_D^A \left|\vec{v} \times \vec{B}\right| \cdot ds - \int_C^B \left|\vec{v} \times \vec{B}\right| \cdot ds \tag{27}$$

Cele două integrale nu se anulează reciproc pentru că laturile DA și BC ale cadranului se găsesc la distanțe diferite față de conductorul infinit lung ($d_0 + vt$ și respectiv $d_0 + vt + a$) și ca urmare inducția magnetică B are valoare diferită de-a lungul acestor laturi:

$$\Rightarrow e_{\Gamma_m}(t) = \underbrace{v \cdot B(d_0 + vt) \cdot b}_{\int_D^A (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{ds}} - \underbrace{v \cdot B(d_0 + vt + a) \cdot b}_{\int_C^B (\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{ds}} \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow e_{\Gamma_m}(t) = v \cdot b \cdot \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot sin(\omega t)}{2 \cdot \pi \cdot (d_0 + v \cdot t)} - v \cdot b \cdot \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot sin(\omega t)}{2 \cdot \pi \cdot (d_0 + v \cdot t + a)}$$
$$= \frac{\mu_0 \cdot v \cdot b \cdot I\sqrt{2} \cdot sin(\omega t)}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{(d_0 + v \cdot t)} - \frac{1}{(d_0 + v \cdot t + a)}\right] \tag{29}$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_m}(t) = \frac{\mu_0 \cdot v \cdot b \cdot I\sqrt{2} \cdot sin(\omega t)}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{a}{(d_0 + v \cdot t)(d_0 + v \cdot t + a)} \tag{30}$$

Se constată că relația componentei de mișcare, ecuația (30), corespunde cu termenul al doilea din relația tensiunii electromotoare induse obținute prin prima metodă de rezolvare prezentată (a se vedea ecuația (17)). În consecință cele două metode prezentate sunt alternativ viabile.

În figura 7 se reprezintă forma de undă a celor două componente: cea de transformare și cea de mișcare în comparație cu forma de undă a tensiunii electromotoare totale induse, aferenta dalelor numerice din enunțul problemei. Se constantă ca pentru această problemă predomină componenta de transformare:

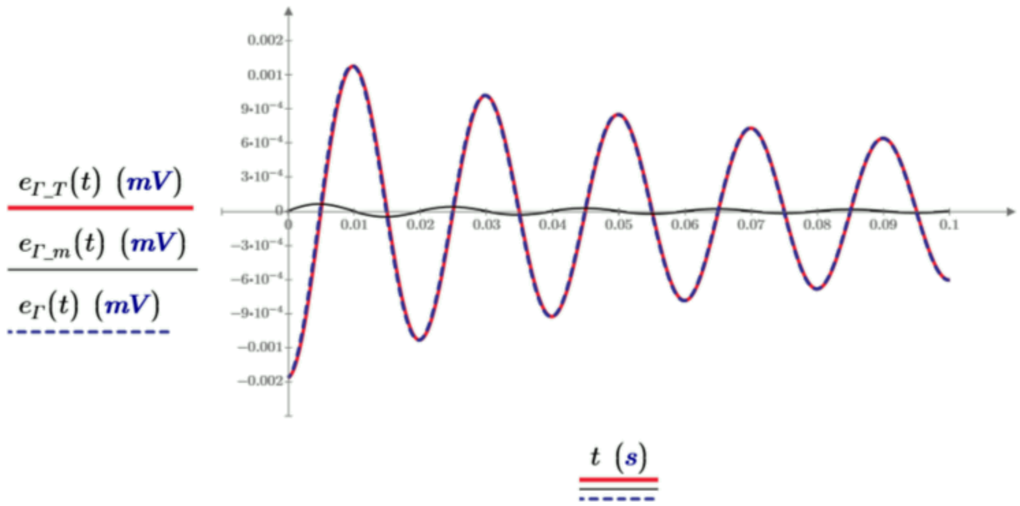


Fig. 7. Forma de undă a tensiunii electromotoare induse și celor două componente ale acesteia

b) Cadranul se deplasează paralel cu conductorul infinit lung, conform celor prezentate în fig. 8.

În acest caz, distanța de separație dintre conductorul infinit lung și cadran rămâne constantă în timp.

$$d = d_0 \tag{31}$$

Metoda I. Aplicând formula de definiție a tensiunii electromotoare induse, relația (4).

Pentru evaluarea fluxului magnetic prin suprafața, S_Γ, delimitata de conturul Γ al cadranului se aplică aceeași tehnică de transformare a integralei duble de suprafață în integrală simplă după r prezentată la *0* (a se vedea Fig. 4 și respectiv ecuația (8)):

$$\Phi_m = \iint\limits_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dA} = \int_{d}^{d+a} B(r) \cdot b \cdot dr = \int_{d_0}^{d_0+a} \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot b \cdot dr \tag{32}$$

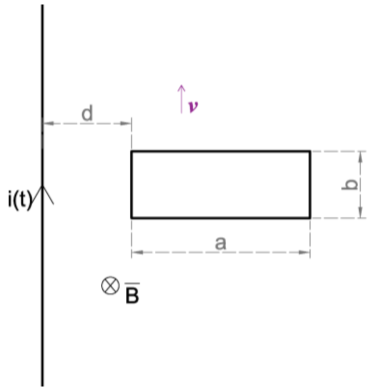


Fig. 8. Desen general Cazul b.

$$\Rightarrow \Phi_m = \frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot b \cdot sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{d_0 + a}{d_0}\right) \tag{33}$$

Introducând relația (33) în formula de definiție a tensiunii electromotoare induse, ecuația (4), se obține:

$$e_\Gamma(t) = -\frac{d}{dt}[\Phi_m(t)] = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot b \cdot sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{d_0 + a}{d_0}\right)\right] \tag{34}$$

$$\Rightarrow e_\Gamma(t) = -\frac{\mu_0 \cdot I\sqrt{2} \cdot b \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{d_0 + a}{d_0}\right) \tag{35}$$

În Fig. 9 se prezintă forma de undă a tensiunii electromotoare induse în cadranul metalic corespunzător datelor numerice din enunțul problemei. Se poate constata că în acest

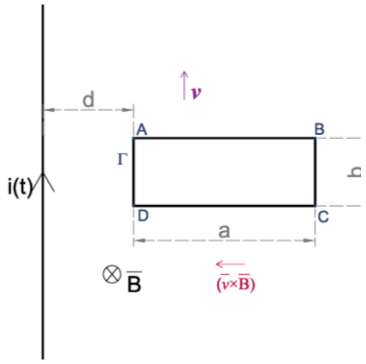


Fig. 10. Conturul Γ de integrare

caz amplitudinea tensiunii electromotoare induse rămâne constantă în timp, nu este afectată de deplasarea cadranului:

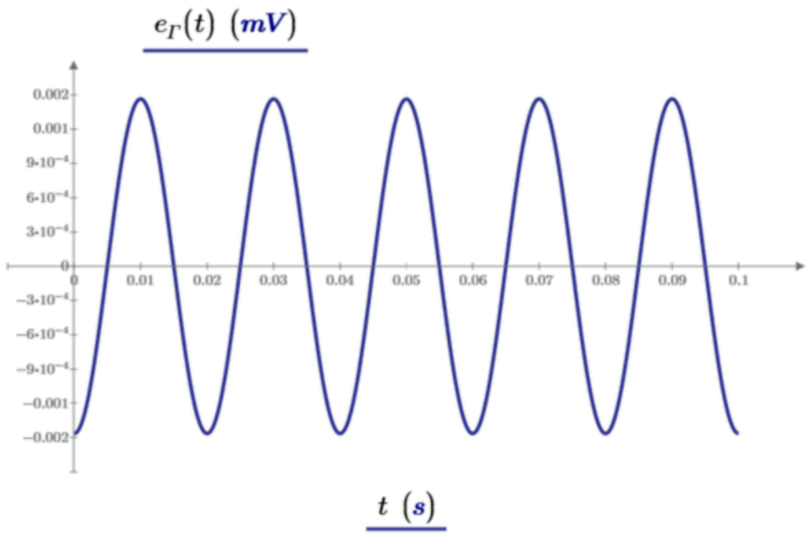


Fig. 9. Forma de undă a tensiunii electromotoare induse în Cazul B

Metoda II. Utilizând relația tensiunii electromotoare induse pe baza celor două componente de transformare și de mișcare, ecuația (19).

Pentru a determina componenta de transformare a tensiunii electromotoare induse se introduce relația inducției magnetice (2) în ecuația (20) și se aplică tehnica de transformare a integralei duble de suprafață în integrală simplă după r prezentată la metoda *0* (a se vedea Fig. 4 și respectiv ecuația (8)):

$$e_{\Gamma_T}(t) = -\iint_{S_\Gamma} \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\overrightarrow{dA} = -\iint_{S_\Gamma} \frac{dB(r)}{dt}\cdot dA = -\iint_{S_\Gamma} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0\cdot i(t)}{2\cdot\pi\cdot r}\right)\cdot dA \qquad (36)$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_T}(t) = -\int_{d_0}^{d_0+a} \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0\cdot I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi\cdot r}\right)\cdot b\cdot dr$$

$$\Rightarrow e_{\Gamma_T}(t) = -\frac{\mu_0\cdot b\cdot I\sqrt{2}\cdot\omega\cdot cos(\omega\cdot t)}{2\cdot\pi}\cdot ln\left(\frac{d_0+a}{d_0}\right) \qquad (37)$$

Pentru a evalua componenta de mișcare a tensiunii electromotoare induse se notează laturile cadranului ca în Fig. 10 și se descompune integrala pe fiecare latură în parte corespunzător celor prezentate în relația (24):

Aplicând regula mâinii drepte se determină că în acest caz produs vectorial $(\vec{v}\times\vec{B})$ este orientat perpendicular spre conductorul infinit lung (a se vedea Fig. 10). Ca urmare, integrala aferentă laturilor DA și respectiv BC vor avea valoarea 0. Pe aceste laturi unghiul dintre $(\vec{v} \times \vec{B})$ și $\overrightarrow{ds}$ este de 90° și în consecință produsul scalar $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{ds}$ va fi nul.

$$e_{\Gamma_m}(t) = \underbrace{\int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{ds}}_{\neq 0} + \underbrace{\int_B^C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{ds}}_{=0} + \underbrace{\int_C^D (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{ds}}_{\neq 0} + \underbrace{\int_D^A (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \overrightarrow{ds}}_{=0} \tag{38}$$

De-a lungul laturii AB vectorul $\overrightarrow{ds}$ are sens opus față de sensul produsului vectorial $(\vec{v} \times \vec{B})$ și ca urmare integrala de-a lungul acestei laturii o să aibă o valoare negativă:

$$e_{\Gamma_m}(t) = \int_C^D |\vec{v} \times \vec{B}| \cdot ds - \int_B^A |\vec{v} \times \vec{B}| \cdot ds \tag{39}$$

Pentru cazul studiat (deplasarea cadranului pe direcție paralelă cu conductorul infinit lung), termenii de sub cele două integrale (viteza de deplasare a cadranului $\vec{v}$ și respectiv inducția magnetică $\vec{B}$) iau aceleași valori de-a lungul celor două laturi de integrare și ca urmare cele două integrale se anulează reciproc, componenta de mișcare a tensiunii electromotoare induse este nulă.

În consecință în acest al doilea caz studiat avem doar componentă indusa prin transformare pentru tensiunea electromotoare indusă (a se vedea și :

$$e_\Gamma(t) = e_{\Gamma_T}(t) \tag{40}$$

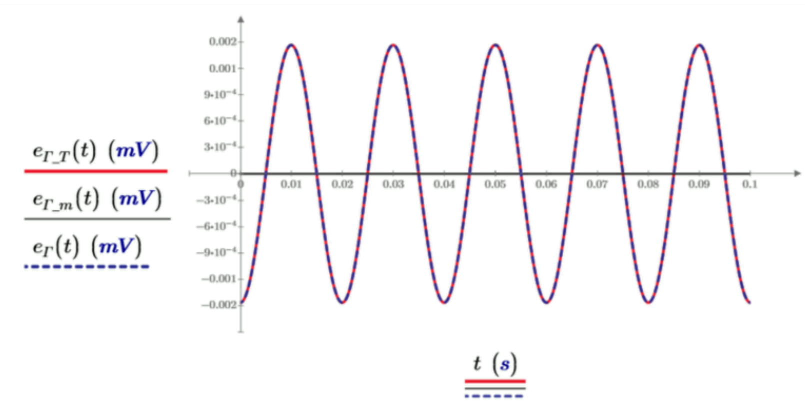


Fig. 11. Forma de undă a tensiunii electromotoare induse și celor două componente ale acesteia în Cazul B studiat.

Problema 8.

În apropierea unui conductor infinit lung parcurs de un curent i_1 la distanța c este amplasat un cadran metalic de formă

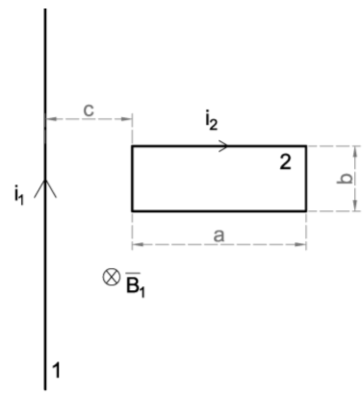


Fig. 12. Cadran metalic în vecinătatea unui conductor drept infinit lung parcurs de un curent i(t).

dreptunghiulară (lungime a și lățime b) parcurs de curentul i_2, a se vedea Fig. 12).

Să se determine:

a) Inductivitatea mutuală dintre cadran și conductor;

b) Forța magnetică ce acționează asupra cadranului;

Rezolvare:

a) Calculul inductivității mutuale:

Inductivitatea mutuală dinte conductorul infinit lung (*obiectul 1* din Fig. 12) și cadran (*obiectul 2* din Fig. 12) se poate determina pe baza relației de definiție a inductivității:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{m2}}{i_1} \tag{1}$$

unde prin L_{12} s-a notat inductivitatea mutuală (conductor-cadran), prin Φ_{m2} s-a notat fluxul magnetic creat de curentul i_1 care trece prin conductor prin suprafața transversală închisă de conturul Γ al cadranului.

Conform cu cele prezentate la problema anterioară, cazul B, fluxul magnetic Φ_{m2} creat de curentul $i_1(t)$ poate fi calculat în felul următor:

$$\Phi_{m2} = \iint_{S_\Gamma} \overrightarrow{B_1} \cdot \overrightarrow{dA} = \iint_{S_\Gamma} B_1 \cdot dA = \int_c^{c+a} \frac{\mu_0 \cdot i_1}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot b \cdot dr \tag{2}$$

$$\Rightarrow \Phi_{m2} = \frac{\mu_0 \cdot i_1 \cdot b}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \tag{3}$$

Prin urmare inductivitatea mutuală conductor – cadran va fi:

$$L_{12} = \frac{\Phi_{m2}}{i_1} = \frac{\mu_0 \cdot b}{2 \cdot \pi} \cdot ln\left(\frac{c+a}{c}\right) \tag{4}$$

b) Evaluarea forței magnetice ce acționează asupra cadranului:

Forța magnetică ce acționează asupra cadranului poate fi determinată pe baza energiei magnetice a sistemului analizat conform cu:

$$F_m = \frac{dW_m}{dx} \tag{5}$$

unde: F_m este forța magnetică, W_m este energia magnetică a sistemului iar x este direcția pe care ar avea loc deplasarea obiectelor din sistem ca efect al acțiunii forței magnetice.

În cazul nostru forța magnetică ar avea tendința de a apropia (a atrage) sau a îndepărtă (a respinge) cadranul de conductor în funcție de sensul curenților $i_1(t)$ și respectiv $i_2(t)$, așadar de a modifica distanța de separație dintre cele două obiecte. Așadar direcția după care ar trebui evaluată derivata energiei magnetice este direcția lui c:

$$F_m = dW_m/dc \tag{6}$$

Energia magnetică a sistemului poate fi determinată astfel:

$$W_m = \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(L_{jk}\cdot i_j\cdot i_k\right) = \frac{1}{2}\cdot L_{11}\cdot i_1^2 + \frac{1}{2}\cdot L_{22}\cdot i_2^2 + L_{12}\cdot i_1\cdot i_2 \tag{7}$$

unde L_{11} este inductivitatea proprie a conductorului, L_{22} este inductivitatea proprie a cadranului, iar L_{12} este inductivitatea mutuală dintre conductor și cadran.

Luând în considerare faptul ca inductivitățile proprii L_{11} și L_{22}, respectiv curenții i_1 și i_2 nu depind de distanța de separație c dintre conductor și cadran și ca urmare sunt constante după direcția de derivare:

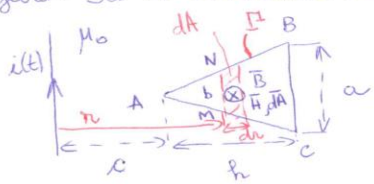
$$\begin{aligned} F_m = \frac{dW_m}{dc} &= \frac{d}{dc}\left[\frac{1}{2}\cdot L_{11}\cdot i_1^2 + \frac{1}{2}\cdot L_{22}\cdot i_2^2 + L_{12}\cdot i_1\cdot i_2\right] \\ &= \underbrace{\frac{d}{dc}\left[\frac{1}{2}\cdot L_{11}\cdot i_1^2\right]}_{=0} + \underbrace{\frac{d}{dc}\left[\frac{1}{2}\cdot L_{22}\cdot i_2^2\right]}_{=0} + \underbrace{\frac{d}{dc}\left[L_{12}\cdot i_1\cdot i_2\right]}_{\neq 0} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \mathrm{F_m} = \frac{d}{dc}\left[\frac{\mu_0\cdot \mathrm{b}}{2\cdot\pi}\cdot\ln\left(\frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{\mathrm{c}}\right)\cdot \mathrm{i_1}\cdot \mathrm{i_2}\right] &= \frac{\mu_0\cdot \mathrm{b}\cdot \mathrm{i_1}\cdot \mathrm{i_2}}{2\cdot\pi}\cdot\frac{d}{dc}\left[\ln\left(\frac{\mathrm{c}+\mathrm{a}}{\mathrm{c}}\right)\right] \\ &= \frac{\mu_0\cdot \mathrm{b}\cdot \mathrm{i_1}\cdot \mathrm{i_2}}{2\cdot\pi}\cdot\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{c}+\mathrm{a}}\cdot\frac{\mathrm{c}-(\mathrm{c}+\mathrm{a})}{\mathrm{c}^2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow F_m = -\frac{\mu_0\cdot b\cdot i_1\cdot i_2}{2\cdot\pi}\cdot\frac{a}{(c+a)\cdot c} \tag{9}$$

Din relația anterioară rezulta faptul că forța magnetică este negativa, deci acționează a. i. sa micsoreze distanța de separație dintre cele doua conductoare.

9. Se consideră un fir conductor infinit lung, parcurs de un curent electric variabil în timp, $i(t) = I_{max}\cdot \sin \omega t$. El este coplanar cu un cadru metalic conductor, de forma și dimensiunile din figură. Să se determine tensiunea electromotoare indusă în cadru.



MN – de lungime b

Câmpul magnetic H la o distanță r față de un fir conductor infinit lung parcurs de un curent electric este

$$|\overline{H}| = \frac{i}{2\pi r} \Rightarrow \overline{B} = \mu_0 \cdot \overline{H} \Rightarrow |\overline{B}| = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r}$$

Se aplică legea inducției electromagnetice (Faraday):

$$\boxed{e_\Gamma = -\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \overline{B}\cdot \overline{dA}} \quad \text{sau} \quad e_\Gamma = -\frac{d\phi_{S_\Gamma}}{dt}$$

În această problemă nu există obiecte în mișcare, deci tensiunea electromotoare se va induce prin transformare. Conturul Γ este cadrul ~~dreptunghiular~~ triunghiular ABC, iar suprafața S_Γ este suprafața delimitată de acest triunghi.

$$\phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \underbrace{\overline{B} \cdot \overline{dA}}_{\substack{\overline{B} \parallel \overline{dA} \\ (\text{desen})}} = \iint_{S_\Gamma} B \cdot dA = \iint_{S_\Gamma} \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} \cdot dA$$

Elementul de arie $dA = dr \cdot b$ (mărimea integrată $\frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ variază doar pe direcție orizontală, nu și pe direcție verticală, de aceea elementul de arie dA poate fi scris direct ca $dA = b \cdot dr$ → reprezintă aria hașurată în desen cu roșu, considerată a avea o formă dreptunghiulară fiindcă dr e f. f. mic, $dr \to 0$)

$$\Rightarrow \phi_{S_\Gamma} = \int_c^{c+h} \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} \cdot b \cdot dr$$

Limitele de integrare se aleg astfel încât să luăm în considerare aria triunghiului ABC (r variază de la c până la $c+h$).

Se remarcă faptul că lungimea b (segmentul MN) nu este constant pentru întregul triunghi, ci depinde de lungimea lui r (la ce distanță ne aflăm față de firul conductor atunci când determinăm vectorul $\overline{H}$ sau $\overline{B} = \mu_0 \overline{H}$).

$$\triangle AMN \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{\text{înălțime triunghi } AMN}{\text{înălțime triunghi } ACB} = \frac{r-c}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{r-c}{h} \Rightarrow b = \frac{a \cdot (r-c)}{h}$$

$$\Rightarrow \phi_{S_\Gamma} = \int_c^{c+h} \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi r} \cdot \frac{a \cdot (r-c)}{h} \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot a}{2\pi h} \int_c^{c+h} \frac{r-c}{r} \cdot dr =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot a \cdot i}{2\pi h} \cdot \int_c^{c+h} \left(1 - \frac{c}{r}\right) dr = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot i}{2\pi h} \cdot \left(r - c \cdot \ln r\right) \Big|_c^{c+h} =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot a \cdot i}{2\pi h} \left(c - c \cdot \ln \frac{c+h}{c}\right) = \frac{\mu_0 \cdot a \cdot c \cdot i}{2\pi h} \cdot \left(1 - \ln \frac{c+h}{c}\right)$$

$$\Rightarrow e_\Gamma = -\frac{d\phi_{S_\Gamma}}{dt} = -\frac{\mu_0 \cdot a \cdot c}{2\pi h} \cdot \left(1 - \ln \frac{c+h}{c}\right) \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\boxed{e_\Gamma = -\frac{\mu_0 \cdot a \cdot c}{2\pi h} \left(1 - \ln \frac{c+h}{c}\right) \cdot I_{max} \cdot \omega \cdot \cos \omega t}$$

În continuare se va stabili sensul tensiunii electromotoare induse pe baza legii lui Lenz: Sensul de parcurgere al conturului Γ ($A \to B \to C$) s-a stabilit a.î. învârtind burghiul drept în acest sens, el să înainteze în sensul lui $\bar{B}$ (sau $\bar{H}$), a.î. $\bar{B}$ și $d\bar{A}$ (elementul de arie are sensul dat de înaintarea burghiului) să aibă același sens. În această situație, dacă $e_\Gamma > 0 \Rightarrow e_\Gamma$ are același sens ca și sensul ales pentru conturul Γ. Dacă $e_\Gamma < 0 \Rightarrow$ sensul e_Γ este invers față de sensul de parcurgere a lui Γ.

Pentru această problemă, dacă $h < e = 2,71828\ldots$ (baza logaritm natural)

$\Rightarrow e_\Gamma < 0 \Rightarrow e_\Gamma$ e în sensul invers lui Γ

Dacă $h > e = 2,71828\ldots \Rightarrow e_\Gamma > 0 \Rightarrow e_\Gamma$ e în sensul lui Γ