

Tehnologii avansate de proiectare a circuitelor electrice și electronice

S.I. dr. ing. Mihaela CREȚU
Mihaela.Cretu@ethm.utcluj.ro



CURS I

RECAPITULARE

Modelarea numerică a circuitelor electrice

Cuprinsul cursului

- Elemente de bază ale circuitelor model
 - ✓ Elemente dipolare;
 - ✓ Elemente ideale diport. Surse comandate;
 - ✓ Cazuri tipice de inconsistență a modelelor.
- Elemente de topologie a circuitelor electrice
 - ✓ Grafuri de conexiune. Definiții.
 - ✓ Descrierea topologiei prin matrice de conexiune.
 - ✓ *Matricea de descriere a grafului*
 - ✓ *Matricea de incidență laturi-noduri*
 - ✓ *Matricea de incidență laturi-secțiuni*
 - ✓ *Matricea de incidență laturi-bucle*
 - ✓ Algoritm de construire sistematică a arborelui normal.

CAPITOLUL 1

ELEMENTE DE BAZĂ ALE CIRCUITELOR MODEL

Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

1.1 Elemente dipolare [1]

Rezistorul:

Invariabil în timp

Linier: $u = R \cdot i$

Nelinier: Comandat în curent

$u = u(i)$
(termistor, tiristor)

Comandat în tensiune

$i = i(u)$
(dioda redresoare)

Variabil în timp (parametric)

Linier: $u(t) = R(t) \cdot i(t)$ (contact închis/deschis, potențiometru)

Nelinier: Comandat în curent $u(t) = u(i(t), t)$ (tiristor)

Comandat în tensiune $i(t) = i(u(t), t)$

Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

Bobina:

Invariabilă în timp

Liniară: $\phi = L \cdot i \Rightarrow u = L \cdot \frac{di}{dt}$

Bobina în aer (solenoid)

Nelinară: $\phi = \phi(i) \Rightarrow u = \frac{d\phi}{dt}$

Bobina cu miez feromagnetic

Variabilă în timp (parametrică)

Liniară: $\phi(t) = L(t) \cdot i(t) \Rightarrow u(t) = L(t) \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot \frac{dL(t)}{dt}$

Bobina cu miez feromagnetic nesaturat reglabil

Nelinară: $\phi(t) = \phi(i(t), t) \Rightarrow u(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d\phi(i)}{di} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{d\phi(t)}{dt}$

Bobina de reactanță cu întrefier reglabil

Perechi de bobine cuplate magnetic

Fluxul total al unei bobine are două componente:

- o componentă proprie;
- o componentă creată de curentul ce parcurge cealaltă bobină.

Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

Condensatorul:

Invariabil în timp

Linier: $q = C \cdot u \Rightarrow i = C \cdot \frac{du}{dt}$

Condensator etalon

Nelinier: $q = q(u) \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$

Condensator real

Variabil în timp (parametric)

Linier: $q(t) = C(t) \cdot u(t) \Rightarrow i(t) = C(t) \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t) \cdot \frac{dC(t)}{dt}$

Condensator cu armătură vibrantă, variabil

Nelinier: $q(t) = q(u(t), t) \Rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(u)}{du} \cdot \frac{du(t)}{dt} + \frac{dq(t)}{dt}$

Surse ideale independente

- **De tensiune ($u(t)=-e(t)$ – independentă de sensul și valoare crt., dar corelată cu sensul de referință al tens. la borne)**
- **De curent ($i(t)=j(t)$ – independentă de sensul și valoarea tensiunii la borne)**

Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

1.2 Elemente ideale diport. Surse comandate liniare [2]

- Sunt utilizate pentru modelarea unor dispozitive electrice și electronice;
- Sunt constituite din două laturi izolate galvanic între ele:
 - Latura de comandă, poate fi reprezentată de:
 - Un scurtcircuit ($u_1=0$);
 - O latură deschisă ($i_1=0$).
 - Latura comandată, poate conține:
 - O sursă de curent ($j_2 \neq 0$);
 - O sursă de tensiune ($e_2 \neq 0$).

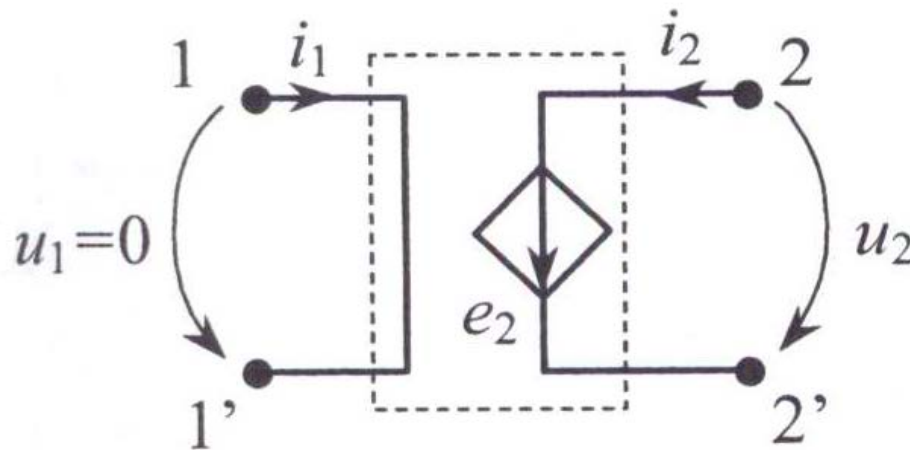
Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

Cele patru tipuri de surse comandate sunt:

- Surse neomogene

A. Sursa de tensiune comandată în curent [2]

- Latura de comandă: $u_1=0$
- Latura comandată: $u_2 = -e_2 = -R_{21} i_1$
(R_{21} reprezintă rezistența de transfer sau transrezistența)



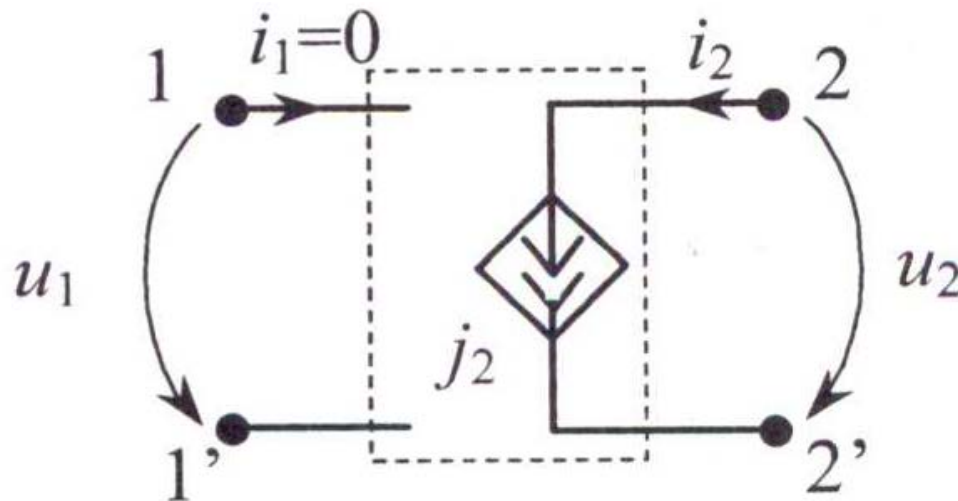
Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

Cele patru tipuri de surse comandate sunt:

- Surse neomogene

B. Sursa de curent comandată în tensiune [2]

- Latura de comandă: $i_1=0$
- Latura comandată: $i_2 = j_2 = -G_{21} u_1$
(G_{21} reprezintă conductanța de transfer sau transconductanța)

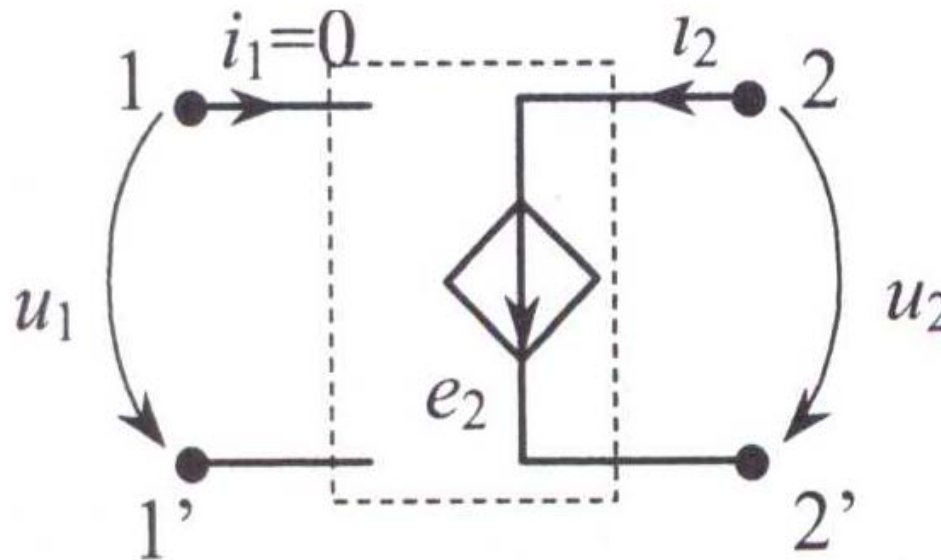


Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

- Surse omogene

C. Sursa de tensiune comandată în tensiune [2]

- Latura de comandă: $i_1=0$
- Latura comandată: $u_2 = -e_2 = -A_{21} u_1$
(A_{21} reprezintă factor de transfer în tensiune)

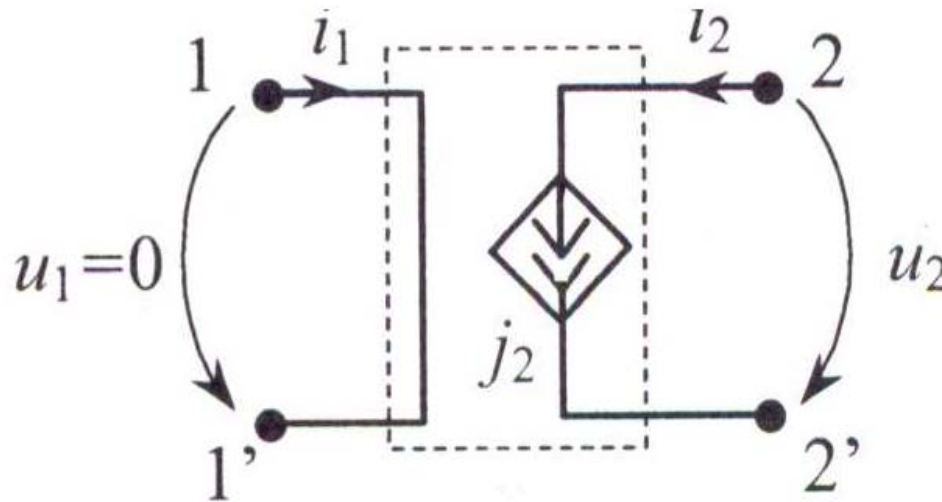


Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

- Surse omogene

D. Sursa de curent comandată în curent [2]

- Latura de comandă: $u_1=0$
- Latura comandată: $i_2 = j_2 = B_{21} i_1$
(B_{21} reprezintă factor de transfer în curent)



Capitolul 1. Elemente de bază ale circuitelor model

Observații [2]:

- **Porțile de comandă ale surselor comandate în curent sunt scurtcircuitate, care pot fi modelate prin surse ideale independente de tensiune nulă;**
 - **Porțile de comandă ale surselor comandate în tensiune sunt laturi deschise, care pot fi modelate prin surse ideale independente de curent nul.**
- ❖ **Cuplajele magnetice între bobine pot fi modelate prin scheme echivalente cu surse comandate (surse de tensiune comandate în tensiune)**

1.3. Cazuri tipice de inconsistență a modelelor [1]

Soluția oricărei probleme de analiză trebuie să satisfacă sistemul de ecuații, care reprezintă modelul matematic al circuitului, bazat pe teoremele lui Kirchhoff.

Criteriile de consistență (de existență a soluției) sunt:

- **Un circuit care conține cel mult o buclă de tip E nu are soluție (nu satisface Teorema a doua a lui Kirchhoff decât în cazuri cu totul particulare);**
- **Un circuit care conține cel mult un nod de tip J nu are soluție (nu satisface Teorema întâi a lui Kirchhoff decât în cazuri cu totul particulare).**

CAPITOLUL 2

ELEMENTE DE TOPOLOGIE A CIRCUITELOR ELECTRICE

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

2.1 Grafuri de conexiune. Definiții

- **TOPOLOGIE:** modul de interconectare a elementelor unui circuit.
- **LATURA:** este o porțiune de circuit fără ramificații
 - În sens larg: conține un singur element dipolar;
 - În sens restrâns: conține două sau mai multe elemente dipolare înseriate. *(numărul de laturi ale circuitului se notează cu l)*
- **NODUL:** este punctul de intersecție a cel puțin trei laturi. Gradul unui nod indică numărul de laturi incidente în el.
 - În sens larg: are gradul egal cel puțin cu 1;
 - În sens restrâns: are gradul egal cel puțin cu 3. *(numărul de noduri ale circuitului se notează cu n)*

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

- **BUCLA:** este un contur închis format din laturi ale circuitului (*numărul de bucle ale circuitului se notează cu b*).
- **OCHIUL:** este o buclă ce nu conține laturi interioare.
- O descriere simplă a topologiei este posibilă cu ajutorul **GRAFULUI DE CONEXIUNE**, care se obține asociind fiecărei laturi a circuitului, în sens larg, un arc de curbă orientat în sensul convențional al curentului.
- **SUBGRAFUL:** este o porțiune a unui graf care nu conține toate elementele sale.
- **DOUĂ SUBGRAFURI** se numesc **COMPLEMENTARE** dacă nu au nici o latură comună și împreună conțin toate nodurile și toate laturile grafului.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

- Subgraful care conține 2 noduri cu grad egal cu 1, toate celelalte având gradul 2, se numește CALE.
- Graful care conține cel puțin o cale între oricare două noduri ale sale se numește GRAF CONEX.
- ARBORELE asociat unui graf este un subgraf conex care îndeplinește următoarele condiții:
 - Conține toate nodurile grafului;
 - Nu conține bucle.
- Laturile arborelui se numesc RAMURI (*numărul de ramuri este egal cu numărul de noduri minus unu, $r = n-1$*).
- COARBORELE este subgraful complementar al arborelui.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

- **Laturile coarborelui se numesc COARDE** (*numărul de coarde este egal cu numărul de bucle al circuitului, $b = c = l - n + 1$*)
- **ARBORELE NORMAL îndeplinește anumite condiții.**
- **În general, unui circuit i se pot asocia mai mulți arbori normali.**
- **Dacă un circuit nu îndeplinește condițiile fundamentale de consistență, nu i se poate asocia nici un arbore normal.**

Un arbore normal trebuie să conțină [2]:

- toate sursele independente de tensiune;
- toate porțile comandate ale surselor de tensiune comandate;
- toate porțile de comandă ale surselor comandate în curent;
- toate condensatoarele neliniare comandate în tensiune cu caracteristică nemonotonă;
- un număr maxim posibil de condensatoare liniare;
- toate rezistoarele neliniare comandate în tensiune cu caracteristica nemonotonă;
- un număr minim posibil de bobine liniare;

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

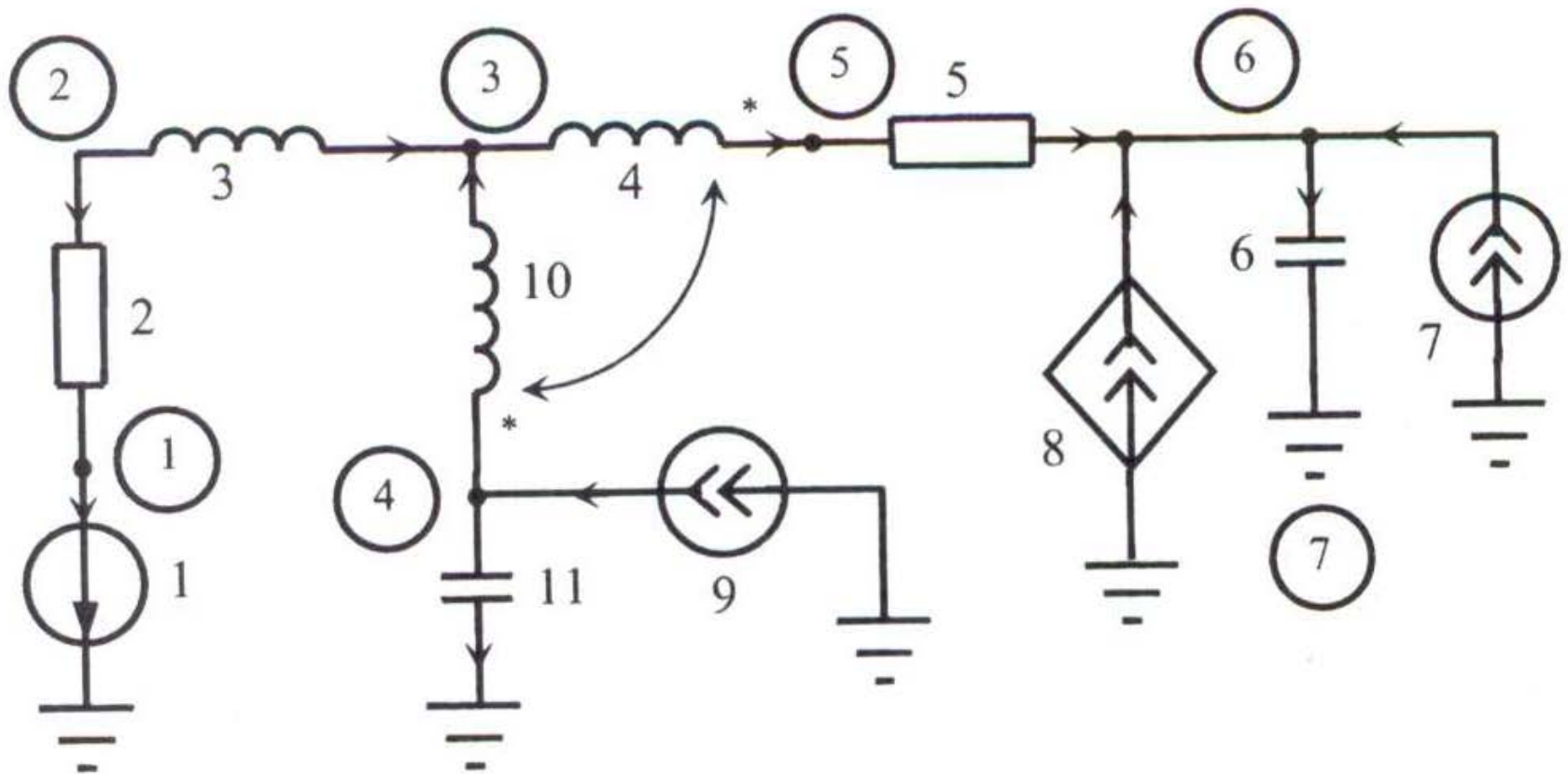
Un arbore normal nu trebuie să conțină [2]:

- rezistoare neliniare comandate în curent cu caracteristica nemonotonă;
- nici o bobină neliniară comandată în curent cu caracteristica nemonotonă;
- porți de comandă ale surselor comandate în tensiune;
- porți comandate ale surselor de curent comandate;
- surse ideale independente de curent;

Poate conține oricâte rezistoare liniare sau neliniare cu caracteristica monotonă.

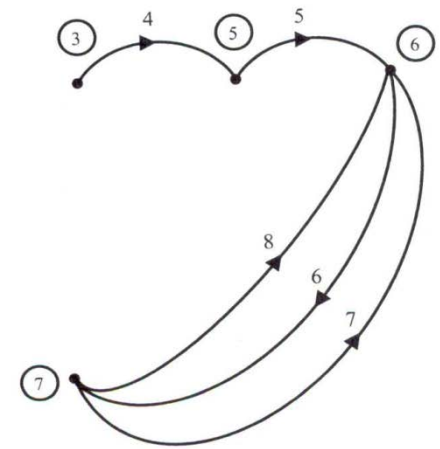
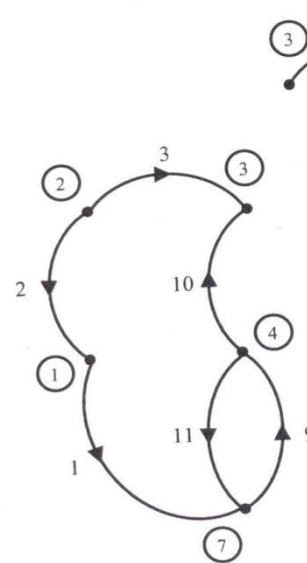
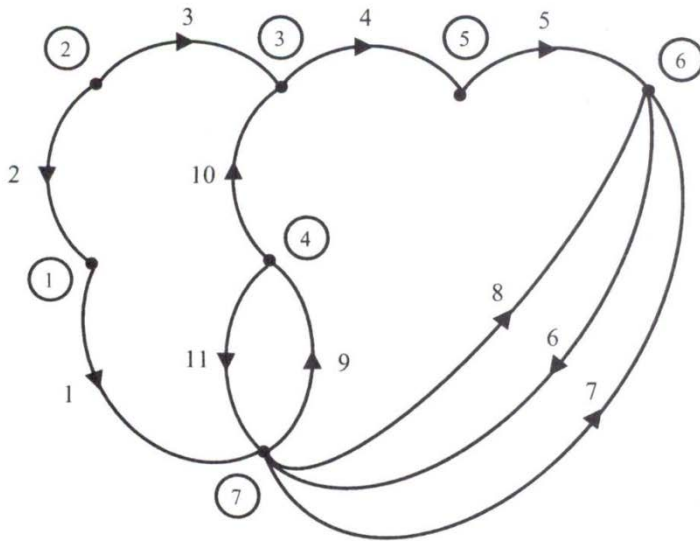
Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Exemplu de circuit [2]:



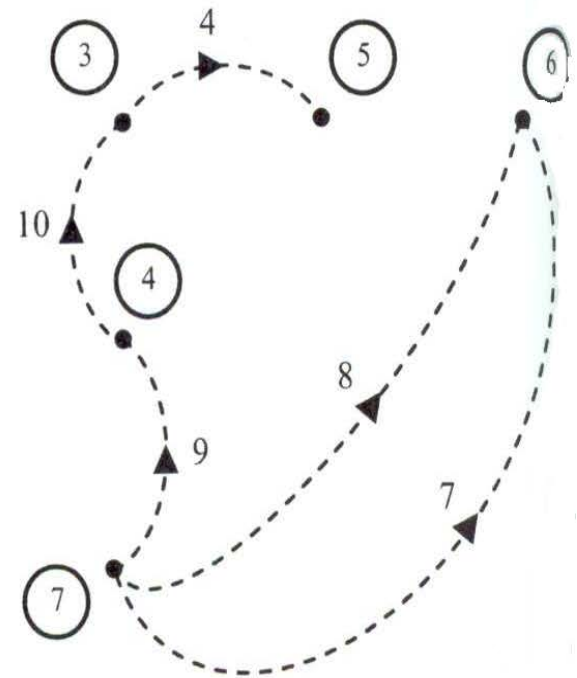
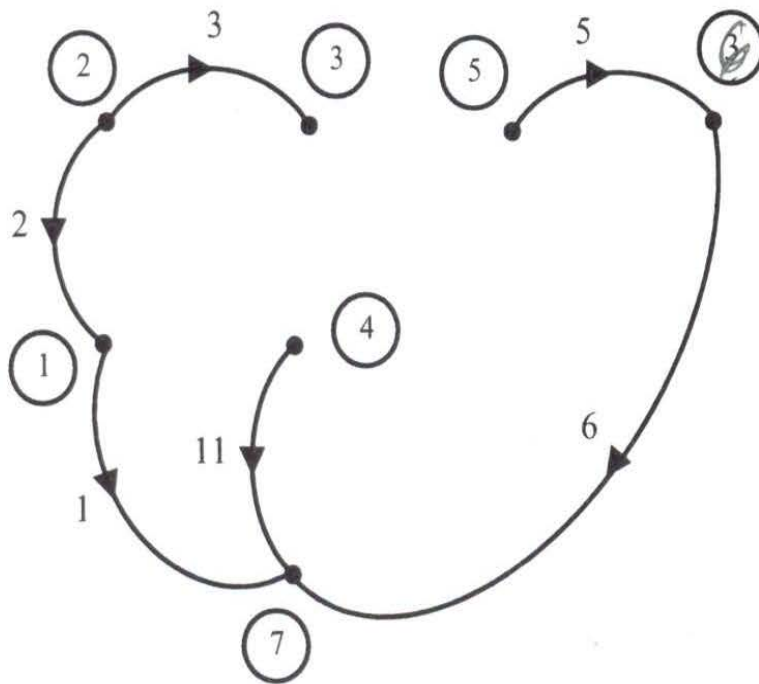
Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Graful și subgrafuri ale circuitului:



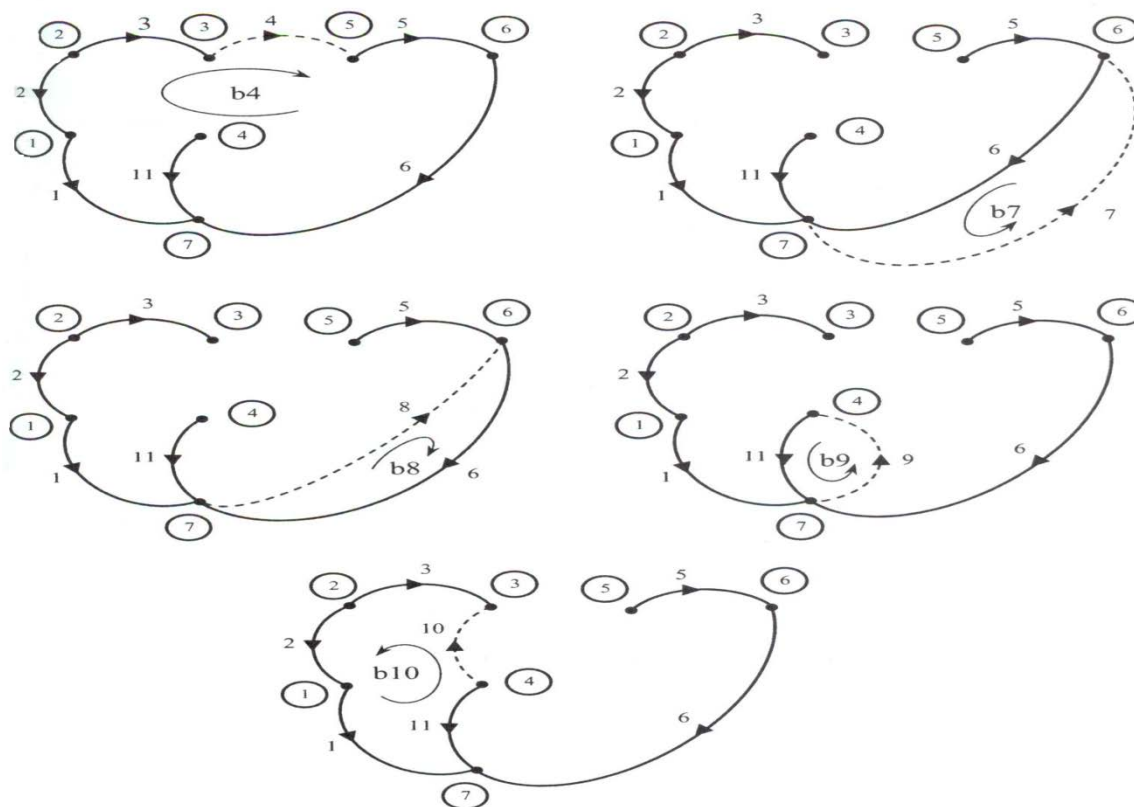
Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Arborele normal al circuitului și co-arborele său:



Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

- Prin adăugarea unei coarde la arbore se formează o **BUCLĂ INDEPENDENTĂ**. Bucla se indexează cu numărul coardei care-i aparține și i se asociază același sens cu cel al coardei.
- Totalitatea buclelor independente formează un **SISTEM COMPLET DE BUCLE INDEPENDENTE**.



Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

2.2 Descrierea topologiei prin matrice de conexiune

- Permite stocarea informației într-un spațiu de memorie restrâns
- Utilă în sistematizarea algoritmilor de construire a modelelor matematice

2.2.1. Matrice de descriere a grafului circuitului (MDGC) [2]

- În SPICE, fiecărui element de circuit îi este alocată o linie de text ce concentrează toată informația referitoare la poziția elementului în circuit, parametrii și ecuațiile caracteristice.
- Pentru acces rapid la date este utilă codificarea informației sub formă matricială
 - Numărul de coloane = Numărul de laturi ale circuitului (l)
 - Numărul de linii ≥ 4 (în funcție de configurația circuitului)

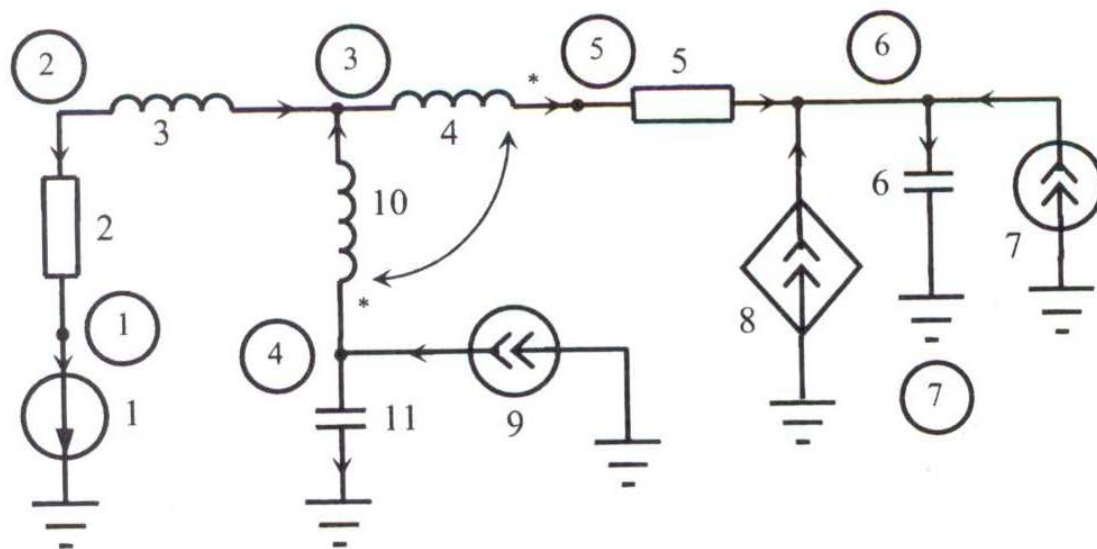
Construirea MDGC [2]:

1. Prima linie conține numărul de ordine al laturii;
2. A doua linie conține codul numeric asociat elementului de bază care ocupă latura respectivă;
3. Liniile 3 și 4 conțin numerele de ordine ale nodurilor inițial, respectiv final, pentru sensul de referință ales pentru latură;
4. Linia 5 conține indexul porții pereche pentru surse comandate, respectiv indexul bobinei pereche pentru cuplaje magnetice. Pentru restul elementelor dipolare, elementul corespondent de pe această linie ia valoarea 0. În cazul existenței cuplajelor magnetice multiple se adaugă linii suplimentare, cu indecșii bobinelor cuplate.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Cod Element [2]	Elementul de circuit [2]
1	Sursa ideală independentă de tensiune
2	Poarta comandată a unei surse de tensiune comandate
3	Poarta de comandă a unei surse comandate în curent
4	Condensator neliniar comandat în tensiune cu caracteristica nemonotonă
5	Condensator liniar sau neliniar cu caracteristica strict monotonă
6	Rezistor neliniar comandat în tensiune cu caracteristica nemonotonă
7	Rezistor liniar cu caracteristica strict monotonă
8	Rezistor neliniar comandat în curent cu caracteristica nemonotonă
9	Bobina liniară sau neliniară cu caracteristica strict monotonă
10	Bobina neliniară comandată în curent cu caracteristica nemonotonă
11	Poarta de comandă a unei surse comandate în tensiune
12	Poarta comandată a unei surse de curent comandate
13	Sursa ideală independentă de curent

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice



$$MDGC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 7 & 9 & 9 & 7 & 5 & 13 & 12 & 11 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 4 & 4 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 6 & 6 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 9 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Observații:

- Această matrice oferă informația completă asupra topologiei circuitului;
- Pe baza ei se poate reconstitui graful de conexiune.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

2.2.2 Matricea de incidență laturi-noduri [2]

- Are un număr de linii egal cu numărul nodurilor
- Are un număr de coloane egal cu numărul laturilor circuitului

$$A_0 = [a_{ij}], \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, l}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{daca } i \text{ este nodul initial al laturii } j \\ 0, & \text{daca latura } j \text{ nu este incidenta la nodul } i \\ -1, & \text{daca } i \text{ este nodul final al laturii } j \end{cases}$$

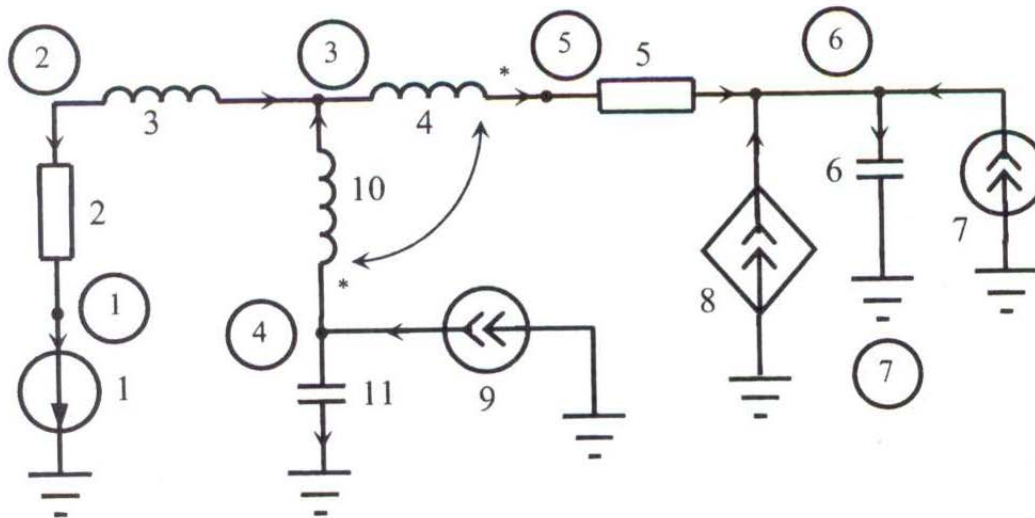
Observații:

- Suma elementelor oricărei coloane este 0, deci liniile matricei nu sunt liniar independente
 - Orice linie reprezintă suma celorlalte $n-1$, deci rangul matricei e $n-1$. Pentru descrierea completă a incidenței laturi-noduri sunt suficiente $n-1$ noduri ale circuitului
- $$A = [a_{ij}], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, l}$$

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

$$A_0 =$$

	$l1$	$l2$	$l3$	$l4$	$l5$	$l6$	$l7$	$l8$	$l9$	$l10$	$l11$
$n1$	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n2$	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$n3$	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	-1	0
$n4$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	1
$n5$	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
$n6$	0	0	0	0	-1	1	-1	-1	0	0	0
$n7$	-1	0	0	0	0	-1	1	1	1	0	-1



Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Observație: Este utilă partiționarea matricii după ramuri, respectiv coarde $A=[A_r, A_c]$

$$A = \begin{array}{c|cccccc|ccccc} & l1 & l2 & l3 & l5 & l6 & l11 & l4 & l7 & l8 & l9 & l10 \\ \hline n1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ n4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ n5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n6 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_r} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_c}$

Teorema I a lui Kirchhoff se scrie matricial: $A \cdot i = 0_{(n-1),1}$ unde

$i = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_l]^t$ reprezintă vectorul curenților laturilor

Deci:

$$\begin{bmatrix} A_r & A_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_r \\ i_c \end{bmatrix} = A_r \cdot i_r + A_c \cdot i_c = 0_{(n-1),1} \Rightarrow i_r = -A_r^{-1} \cdot A_c \cdot i_c$$

Observație: Matricea A_r este întotdeauna pătrată și nesingulară, deci inversabilă, datorită modului de construire a arborelui normal.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Matricea de incidență laturi-noduri servește și la exprimarea tensiunilor prin potențialele nodurilor.

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{v}$$

Unde:

$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_l]^t$ reprezintă vectorul tensiunilor laturilor

$\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n-1}]^t$ reprezintă vectorul potențialelor nodurilor, din care s-a exclus potențialul nodului eliminat din matricea $\mathbf{A}_0$.

Acel nod este considerat ca referință pentru potențiale.

2.2.3 Matricea de incidență laturi-secțiuni [2]

Definiție: O suprafață închisă care intersectează o singură dată o singură ramură a arborelui normal se numește *secțiune fundamentală*. Sensul ramurii intersectate impune sensul de referință pentru traversarea secțiunii. Numărul ramurii este identic cu indexul secțiunii.

Matricea de incidență laturi-secțiuni:

- Are un număr de linii egal cu numărul secțiunilor fundamentale
- Are un număr de coloane egal cu numărul laturilor circuitului

$$Q = [q_{ij}], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, l}$$

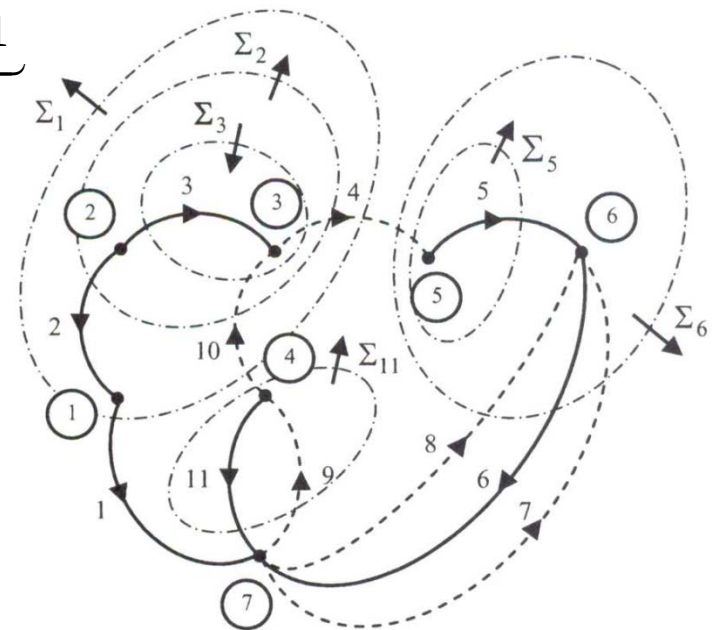
Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

$$Q = [q_{ij}], \quad i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, l}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{daca latura } j \text{ traverseaza sectiunea } i \text{ in acelasi sens} \\ & \text{cu sensul de referinta} \\ 0, & \text{daca latura } j \text{ nu traverseaza sectiunea } i \\ -1, & \text{daca latura } j \text{ traverseaza sectiunea } i \text{ in sens contrar} \\ & \text{sensului de referinta} \end{cases}$$

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

	$I1$	$I2$	$I3$	$I5$	$I6$	$I11$	$I4$	$I7$	$I8$	$I9$	$I10$
$\Sigma1$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
$\Sigma2$	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
$\Sigma3$	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	1
$\Sigma5$	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0
$\Sigma6$	0	0	0	0	1	0	-1	-1	-1	0	0
$\Sigma11$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	1
<i>ramuri (matrice $1_{(n-1),(n-1)}$)</i>							<i>coarde</i>				



Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Observație: Pentru descrierea completă a incidențelor laturilor la secțiuni este suficientă partiția coardelor, care se mai numește și *matricea incidențelor esențiale*, sau *matricea de incidență ramuri-coarde*.

$$Q = \left[1_{(n-1),(n-1)} \mid D \right], \quad D_{(n-1),b}$$

Teorema I a lui Kirchhoff se scrie matricial: $Q \cdot i = 0_{(n-1),1}$ unde

$i = [i_1 \ i_2 \ \dots \ i_l]^t$ reprezintă vectorul curenților laturilor

Deci:

$$\left[1_{(n-1),(n-1)} \mid D \right] \cdot \begin{bmatrix} i_r \\ i_c \end{bmatrix} = i_r + D \cdot i_c = 0_{(n-1),1}$$
$$\Rightarrow i_r = -D \cdot i_c$$

Folosind expresia curenților ramurilor obținută utilizând matricea A, rezultă că matricea incidențelor esențiale poate fi determinată pe baza partițiilor matricei de incidență laturi-noduri cu expresia:

$$D = (A_r)^{-1} \cdot A_c$$

2.2.4 Matricea de incidență laturi-bucle [2]

Matricea de incidență laturi-bucle:

- Are un număr de linii egal cu numărul buclelor independente
- Are un număr de coloane egal cu numărul laturilor circuitului

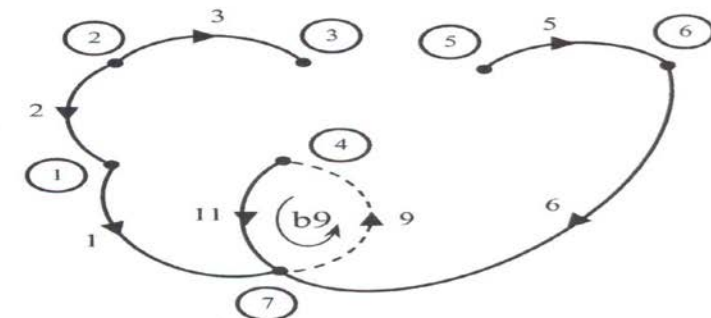
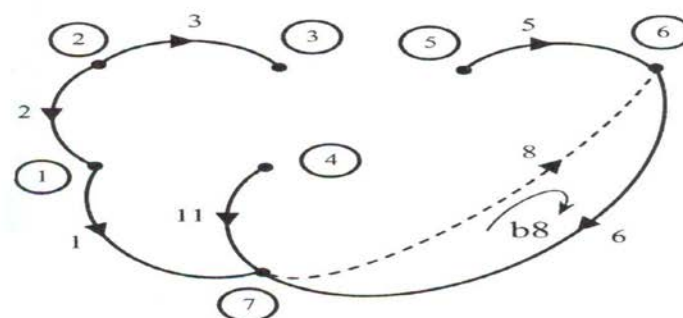
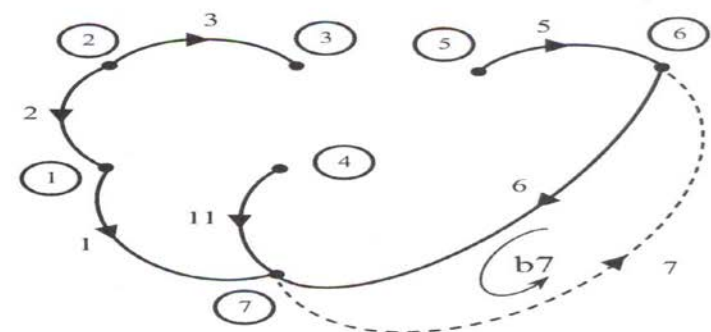
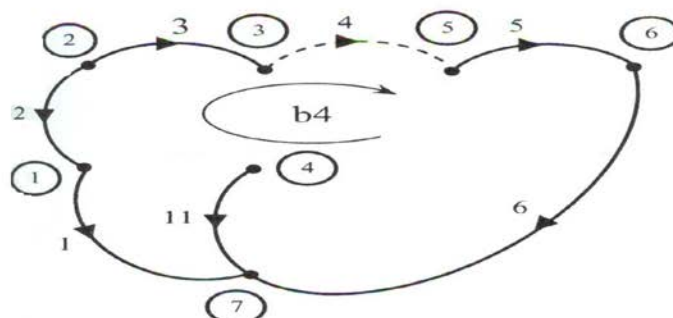
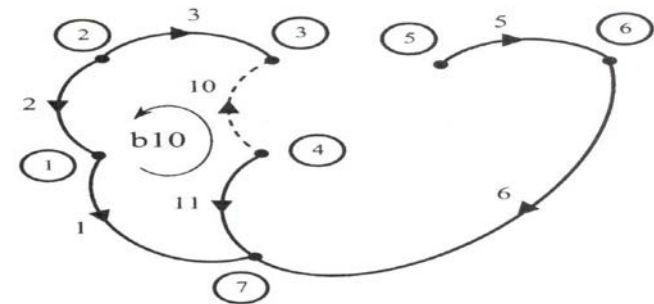
$$B = [b_{ij}], \quad i = \overline{1, b}, \quad j = \overline{1, l}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{daca latura } j \text{ apartine buclei } i \text{ si sensul ei coincide} \\ & \text{cu sensul conventional al buclei} \\ 0, & \text{daca latura } j \text{ nu apartine buclei } i \\ -1, & \text{daca latura } j \text{ apartine buclei } i \text{ si sensul ei este opus} \\ & \text{sensului conventional al buclei} \end{cases}$$

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

$$B = \begin{array}{c|cccccc|ccccc} & l1 & l2 & l3 & l5 & l6 & l11 & l4 & l7 & l8 & l9 & l10 \\ \hline b4 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b10 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ramuri
coarde (matrice $1_{b,b}$)



Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Observație: Pentru descrierea completă a incidențelor laturilor la bucle este suficientă partiția ramurilor, egală cu transpusa *matricei incidențelor esențiale* luată cu semn schimbat.

$$B = \left[-D^t \mid 1_{b,b} \right]$$

Teorema a II a lui Kirchhoff se scrie matricial: $B \cdot u = 0_{b,1}$

Unde $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_l]^t$ reprezintă vectorul tensiunilor laturilor

Deci:

$$\left[-D^t \mid 1_{b,b} \right] \cdot \begin{bmatrix} u_r \\ u_c \end{bmatrix} = -D^t \cdot u_r + u_c = 0_{b,1}$$
$$\Rightarrow u_c = D^t \cdot u_r$$

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Observație: Matricea de conexiune laturi-bucle este ortogonală atât față de matricea laturi-secțiuni, cât și față de matricea laturi-noduri.

Relațiile care exprimă ortogonalitatea sunt:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}^t = \mathbf{0}_{(n-1),(n-1)}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}^t = \mathbf{0}_{b,b}$$

Respectiv:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^t = \mathbf{0}_{(n-1),(n-1)}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{0}_{b,b}$$

Folosind partiționările adecvate, primele relații din fiecare set se demonstrează astfel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = -\mathbf{D} + \mathbf{D} = \mathbf{0}_{(n-1),(n-1)}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}_r \cdot \mathbf{D} + \mathbf{A}_c = -\mathbf{A}_r \cdot (\mathbf{A}_r)^{-1} \cdot \mathbf{A}_c + \mathbf{A}_c = \mathbf{0}_{(n-1),(n-1)}$$

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

2.3. Algoritm de construire sistematică a arborelui normal [2]

- Prezintă o importanță deosebită datorită conexiunii strânse existente între arbore, matricile de incidență și modelul matematic bazat pe teoremele lui Kirchhoff

Pașii algoritmului sunt următorii:

1. Se generează matricea de descriere a grafului de conexiune;
2. Se ordonează matricea de descriere a grafului după elementele liniei 2, în ordinea crescătoare a codurilor numerice ale elementelor, prin permutări între coloane;

$$MDGO = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 2 & 5 & 3 & 4 & 10 & 9 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 9 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 5 & 2 & 3 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 1 & 6 & 3 & 5 & 3 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 4 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

3. Se construiește matricea de incidență laturi-noduri prin inspectarea coloanelor *MDGO*. În matricea de incidență laturi-noduri astfel construită, ordinea coloanelor coincide cu cea din matricea de descriere ordonată, iar ordinea liniilor corespunde ordinii crescătoare a indexării nodurilor 1, 2...n. Prin eliminarea ultimei linii se obține matricea de incidență laturi-noduri redusă.

	<i>l1</i>	<i>l6</i>	<i>l11</i>	<i>l2</i>	<i>l5</i>	<i>l3</i>	<i>l4</i>	<i>l10</i>	<i>l9</i>	<i>l8</i>	<i>l7</i>
<i>n1</i>	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
<i>n2</i>	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
<i>n3</i>	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
<i>n4</i>	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0
<i>n5</i>	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
<i>n6</i>	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1

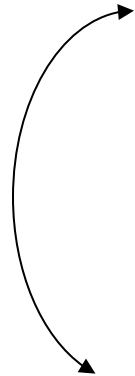
Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

4. Se identifică primele $n-1$ coloane liniar independente, de la stânga spre dreapta, în matricea creată anterior. Dacă există un arbore normal, atunci aceste coloane corespund laturilor lui, astfel încât identificarea coloanelor liniar independente din această matrice e echivalentă cu identificarea arborelui. Acest lucru se realizează prin combinații liniare între linii, care conduc la o formă superior triunghiulară a matricei.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

- a) Se aduce pe poziția a_{11} un element nenul prin permutarea a două linii, dacă este necesar. Poziția liniei 1 va fi apoi păstrată pe toată durata calculului. Coloana 1 este deci prima coloană independentă;
- b) Se urmărește anularea celorlalte elemente de pe coloana 1, aflate sub a_{11} . Dacă este necesar, linia 1 se adună cu altă linie;
- c) Se aduce pe poziția a_{22} un element nenul prin permutarea a două linii, fără a modifica poziția liniei fixată anterior. Dacă nu este posibilă aducerea unui element nenul pe poziția a_{22} , el se aduce pe coloana următoare, a_{23} sau următoarele. Se fixează linia 2, primul ei element nenul este pivotul care marchează a doua coloană liniar independentă.

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice



	$l1$	$l6$	$l11$	$l2$	$l5$	$l3$	$l4$	$l10$	$l9$	$l8$	$l7$
$n1$	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$n2$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
$A = n3$	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
$n4$	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0
$n5$	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
$n6$	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Se inversează liniile 2 și 6 pentru a aduce pe poziția a_{22} un element nenul – pivotul celei de-a doua ramuri

		$l1$	$l6$	$l11$	$l2$	$l5$	$l3$	$l4$	$l10$	$l9$	$l8$	$l7$
$n1$		1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$n6$		0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1
$A = n3$		0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
$n4$		0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0
$n5$		0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
$n2$		0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

	$l1$	$l6$	$l11$	$l2$	$l5$	$l3$	$l4$	$l10$	$l9$	$l8$	$l7$
$n1$	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$n6$	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1
$A = n3$	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
$n4$	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0
$n5$	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
$n2$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Se inversează liniile 3 și 4 pentru a aduce pe poziția a_{33} un element nenul – pivotul celei de-a treia ramuri

	$l1$	$l6$	$l11$	$l2$	$l5$	$l3$	$l4$	$l10$	$l9$	$l8$	$l7$
$n1$	①	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$n6$	0	①	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1
$A = n4$	0	0	①	0	0	0	0	1	-1	0	0
$n3$	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
$n5$	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
$n2$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

	$l1$	$l6$	$l11$	$l2$	$l5$	$l3$	$l4$	$l10$	$l9$	$l8$	$l7$
$n1$	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$n6$	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1
$A = n4$	0	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0
$n3$	0	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0
$n5$	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0
$n2$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Pe poziția a_{44} se aduce pivotul următoarei ramuri prin permutarea liniilor corespunzătoare lui $n3$ și $n2$

	$l1$	$l6$	$l11$	$l2$	$l5$	$l3$	$l4$	$l10$	$l9$	$l8$	$l7$
$n1$	(1)	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
$n6$	0	(1)	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1
$A = n4$	0	0	(1)	0	0	0	0	1	-1	0	0
$n2$	0	0	0	(1)	0	1	0	0	0	0	0
$n5$	0	0	0	0	(1)	0	-1	0	0	0	0
$n3$	0	0	0	0	0	(-1)	1	-1	0	0	0

Capitolul 2. Elemente de topologie ale circuitelor electrice

Pe pozițiile a_{55} și a_{66} există deja pivoții următoarelor ramuri, nemaifiind necesare combinații liniare pe liniile matricei.

Pașii algoritmului (continuare):

- d) Procedul se repetă până când elementul pivot se găsește pe linia $i=n-1$, sau toate elementele liniei i sunt nule ($i < n-1$);
- e) Coloanele liniar independente sunt marcate de pivoții stabiliți anterior. Ele arată componenta arborelui normal (în cazul circuitului exemplu, arborele normal are următoarele ramuri: $l1 \rightarrow l6 \rightarrow l11 \rightarrow l2 \rightarrow l5 \rightarrow l3$). După construirea arborelui normal se partiționează matricea A în forma $[A_r \ A_c]$ și apoi se pot calcula ușor matricile D , Q și B .

BIBLIOGRAFIE

- [1] Iordache M., Mandache L., “Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare”, Ed. Politehnica Press, București 2004, ISBN 973-8449-36-7.
- [2] Mandache L., Topan D., “Simularea circuitelor electrice. Algoritmi și programe de calcul”. Ed. Universitaria, Craiova, 2009.