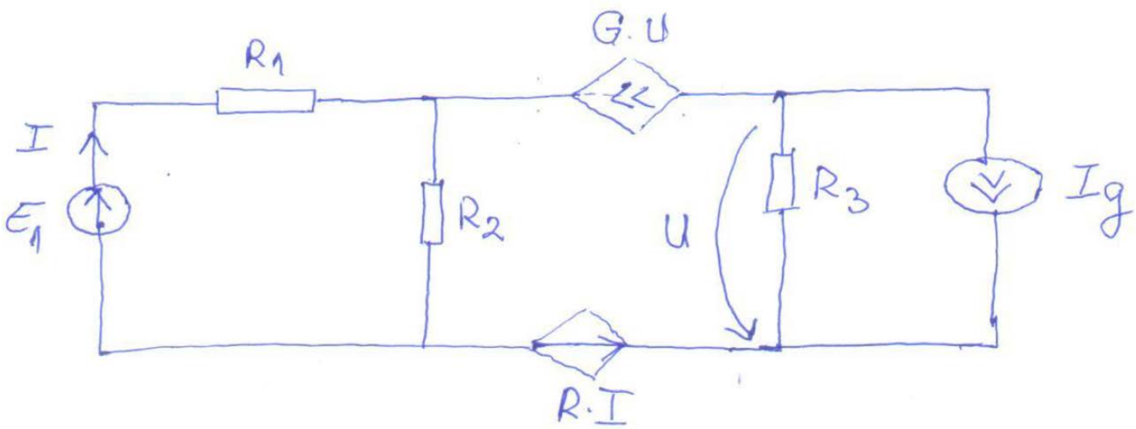
Modele matematice pentru circuite nereciproce în regim staționar

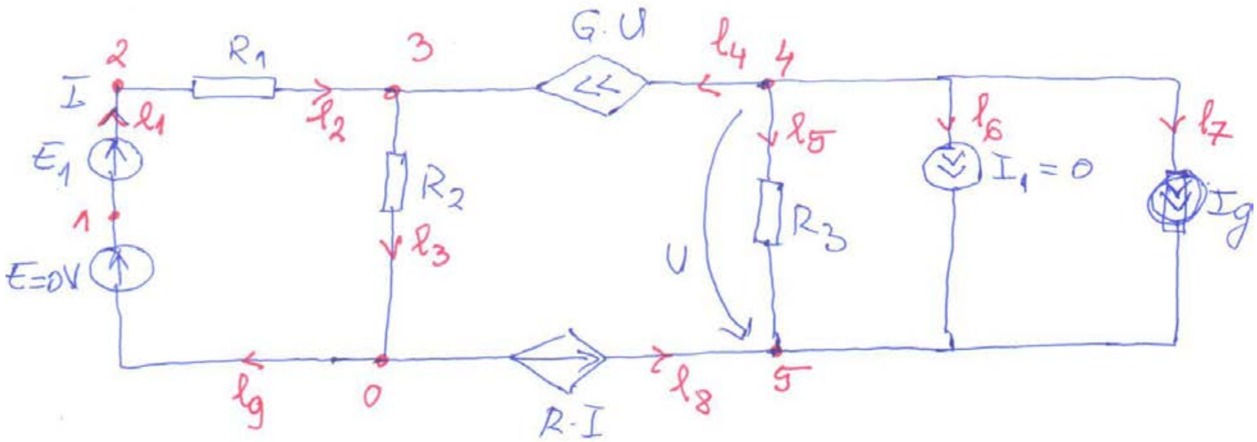
Exemplu de rezolvare

Circuite nereciproce = circuite cu surse comandate

Pentru sistematizarea modelelor matematice, se recomandă:

- Modelarea porților de comandă ale surselor comandate în tensiune prin surse ideale independente de curent nul;
- Modelarea porților de comandă ale surselor comandate în curent prin surse ideale independente de tensiune nulă;
- Partiționarea laturilor circuitului, în sens larg:
  l_p – laturi pasive;
  l_E – laturi cu curse independente de tensiune (care includ și porțile de comandă în curent);
  l_J - laturi cu curse independente de curent (care includ și porțile de comandă în tensiune);
  l_{Ec} – laturi cu surse de tensiune comandate;
  l_{Jc} – laturi cu surse de curent comandate.





E_1=10 V
R_1=5 Ω
R_2=20 Ω
R_3=10 Ω
G_c*U – sursă de curent comandată în tensiune; G=0,4
R_c*I – sursă de tensiune comandată în curent; R=2
I_g=5 A

- Se scrie matricea de descriere a grafului de conexiune (MDGC)

$$MDGC = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 7 & 7 & 12 & 7 & 11 & 13 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 9 & 8 \end{matrix}$$

- Se ordonează matricea MDGC crescător, în funcție de termenii liniei 2, obținându-se matricea ordonată (MDGO)

$$MDGO = \begin{matrix} 1 & 8 & 9 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 7 & 7 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 0 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 8 & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{matrix}$$

Se scrie matricea A, matricea de incidență laturi – noduri

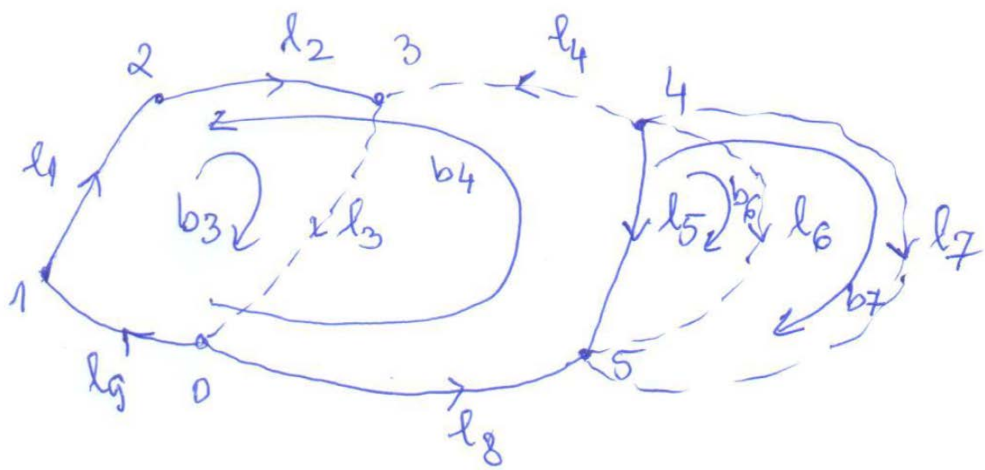
$$A_n = \begin{array}{c|ccccccccc} & l_1 & l_8 & l_9 & l_2 & l_3 & l_5 & l_6 & l_4 & l_7 \\ n_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ n_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Pentru construirea arborelui normal al circuitului se rescrie matricea A, conform teoriei explicată în cursul 1.

$$A_n = \begin{array}{c|ccccccccc} & l_1 & l_8 & l_9 & l_2 & l_3 & l_5 & l_6 & l_4 & l_7 \\ \hline n_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ n_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|ccccccccc} & l_1 & l_8 & l_9 & l_2 & l_3 & l_5 & l_6 & l_4 & l_7 \\ \hline n_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_5 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ n_1+n_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Din matricea normală (matricea A_n) ⇒ arborele circuitului este format din: l_1, l_8, l_9, l_2, l_5, iar din co-arbore fac parte laturile: l_3, l_6, l_4, l_7.

În continuare se construiește graful circuitului:



Apoi se scrie matricea B – matricea de incidență laturi – bucle

$$B = \begin{array}{c|ccccc|cccc} & l_1 & l_2 & l_5 & l_8 & l_9 & l_3 & l_4 & l_6 & l_7 \\ \hline b_3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_7 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

După definirea acestora, în continuare se partiționează matricile după l_p, l_E, l_J, l_{Ec}, l_{Jc}. (vezi fișierul MathCad).

1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

$$\begin{bmatrix} A_p & A_E & A_{Jc}\cdot G_c & A_{Ec} & 0_{(n-1),l_{Jc}} \\ B_p\cdot R & -B_{Ec}\cdot R_c & B_J & 0_{b,l_{Ec}} & B_{Jc} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_p \\ I_E \\ U_J \\ I_{Ec} \\ U_{Jc} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -A_J\cdot J \\ B_E\cdot E \end{bmatrix}$$

unde R=matricea rezistențelor din circuit (matrice pătratică)

J=matricea surselor de curent din circuit (matrice coloană)

E= matricea surselor de tensiune din circuit (matrice coloană)

R_c=matricea rezistențelor de transfer ale surselor comandate în curent, de dimensiune l_{Ec}xl_E

G_c=matricea conductanțelor de transfer ale surselor comandate în tensiune, de dimensiune l_{Jc}xl_J

Rezolvarea MathCad

Metode matriciale de rezolvare a circuitelor nereciproce în regim staționar

1. Metoda Teoremelor lui Kirchhoff

$$A:=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{Jc}:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O_1:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad O_b:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_p:=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_E:=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_J:=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{Ec}:=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_p:=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_E:=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{Ec}:=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_J:=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_c := \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{Jc} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad R := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad J := \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad E := \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad G_c := \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N := \operatorname{augment}\left(A_p, A_E, A_{Jc} \cdot G_c, A_{Ec}, O_1\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M := \operatorname{augment}\left(B_p \cdot R, -B_{Ec} \cdot R_c, B_J, O_b, B_{Jc}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -10 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P := \operatorname{stack}(N, M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -10 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R := \operatorname{stack}\left(\operatorname{augment}\left(-A_J \cdot J\right), \left(B_E \cdot E\right)\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \\ 10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X := P^{-1} \cdot R = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ -1 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ -10 \\ -10 \\ -4 \\ -17.2 \end{bmatrix}$$

$I_2 := 0.4$ $\quad I_1 := 0.4$ $\quad U_6 := -10$ $\quad I_8 := -4$

$I_3 := 0.4$ $\quad I_9 := 0.4$ $\quad U_7 := -10$ $\quad U_4 := -17.2$

$I_5 := -1$

2. Metoda nodală modificată

$$\begin{bmatrix} A_p \cdot G \cdot A_p^t + A_{Jc} \cdot G_c \cdot A_J^t & A_E & A_{Ec} \\ A_E^t & 0_{l_E, l_E} & 0_{l_E, l_{Ec}} \\ A_{Ec}^t & R_c & 0_{l_{Ec}, l_{Ec}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ I_E \\ I_{Ec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot J \\ -E \\ 0_{l_{Ec},1} \end{bmatrix}$$

unde G=matricea conductanțelor din circuit (matrice pătratică, inversa matricii rezistențelor).

Rezolvare în MathCad

2. Metoda Nodală Modificată

$$R := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad G := R^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad O_{lExlE} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O_{lExlEc} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_p^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad O_{lEcxlEc} := \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad O_{lEcx1} := \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$Q := A_p \cdot G \cdot A_p^{T} + A_{Jc} \cdot G_c \cdot A_J^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$W := \text{augment}\left(Q, A_E, A_{Ec}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T := \text{augment}\left(A_E^{T}, O_{lExlE}, O_{lExlEc}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S := \text{augment}\left(A_{Ec}^{T}, R_c, O_{lEcxlEc}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N := \mathrm{stack}(W, T, S) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M := \mathrm{stack}\left(-A_J \cdot J, -E, O_{lEcx1}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 5 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Nec := N^{-1} \cdot M = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 8 \\ -10.2 \\ -0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$V_1 := 0$ $\quad V_5 := -0.2$

$V_2 := 10$ $\quad I_1 := 0.4$

$V_3 := 8$ $\quad I_9 := 0.4$

$V_4 := -10.2$ $\quad I_8 := -4$

Ceilalti curenti se afla rapid aplicand teorema potentialelor nodurilor, cunoscandu-se valoarea potentialului in fiecare nod

$$I_2 := \frac{(V_2 - V_3)}{5} = 0.4 \qquad I_3 := \frac{(V_3)}{20} = 0.4 \qquad I_5 := \frac{(V_4 - V_5)}{10} = -1 \qquad I_6 := 0 \qquad I_7 := 5$$

Caderea de tensiune pe sursa comandata de curent se afla simplu $V_4 - V_3$

Se observa o buna concordanta cu rezultatele obtinute prin prima metoda.

3. Metoda Hibridă

Metoda necesită construirea unui arbore normal și gruparea laturilor circuitului în sens larg, la fel ca în cazul metodei Teoremelor lui Kirchhoff.

Pentru rezolvarea circuitelor utilizând această metodă se folosește matricea incidențelor esențiale, matricea D, care se partiționează după aceeași logică:

$$D = \begin{array}{c|ccc} a \backslash c & l_{pc} & l_{Jc} & l_J \\ \hline l_{pa} & D_{RR} & D_{RJc} & D_{RJ} \\ l_{Ec} & D_{EcR} & D_{EcJc} & D_{EcJ} \\ l_E & D_{ER} & D_{EJc} & D_{EJ} \end{array}$$

Matricea D se poate obține din matricea B. $B = \begin{bmatrix} -D^T & 1_{bxb} \end{bmatrix}$

Modelul matematic al metodei, adaptat circuitului exemplu:

$$\begin{bmatrix} D_{RR} & G_{pa} & D_{RJc} \cdot B_c & D_{RJc} \cdot G_c \\ R_{pc} & -D^t_{RR} & D^t_{EcR} \cdot R_c & D^t_{EcR} \cdot A_c \\ D_{ER} & 0 & \left(1 + D_{EJc} \cdot B_c\right) & D_{EJc} \cdot G_c \\ 0 & -D^t_{RJ} & D^t_{EcJ} \cdot R_c & \left(1 + D^t_{EcJ} \cdot A_c\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{pc} \\ U_{pa} \\ I_E \\ U_J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{RJ} & 0 \\ 0 & D^t_{ER} \\ D_{EJ} & 0 \\ 0 & D^t_{EJ} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J \\ E \end{bmatrix}$$

G_{pa} – matricea conductanțelor laturilor pasive din arbore

R_{pc} – matricea rezistențelor laturilor pasive din co-arbore