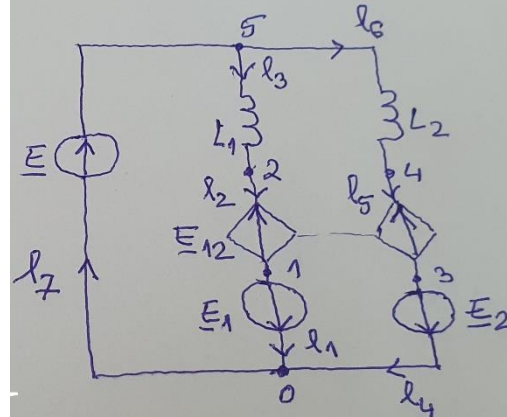
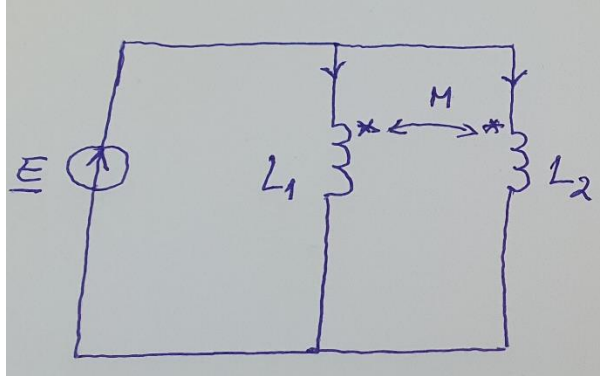


Modele matematice pentru circuite neregiproce în regim sinusoidal

Exemplu de rezolvare

Circuite neregiproce = circuite cu surse comandate

Vom lua ca exemplu modelarea cuplajelor magnetice prin surse comandate.



$$\underline{E}_{12} = j\omega M \cdot \underline{I}_4$$

$$\underline{E}_{21} = j\omega M \cdot \underline{I}_1$$

$$\omega L_1 = 20\pi [\Omega]$$

$$\omega L_2 = 50\pi [\Omega]$$

$$\omega M = 10\pi [\Omega]$$

$$\underline{E} = 220[V]$$

Se vor urma aceeași pași de rezolvare ca și în cazul circuitelor neregiproce în regim staționar.

Pentru sistematizarea modelelor matematice, se recomandă:

- Modelarea porților de comandă ale surselor comandate în tensiune prin surse ideale independente de curent nul;
- Modelarea porților de comandă ale surselor comandate în curent prin surse ideale independente de tensiune nulă;
- Partiționarea laturilor circuitului, în sens larg:
 - l_p – laturi pasive;
 - l_E – laturi cu surse independente de tensiune (care includ și porțile de comandă în curent);
 - l_J - laturi cu surse independente de curent (care includ și porțile de comandă în tensiune);
 - l_{Ec} – laturi cu surse de tensiune comandate;
 - l_{Jc} – laturi cu surse de curent comandate.
- Se scrie matricea de descriere a grafului de conexiune (MDGC)

$$\text{MDGC} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Se ordonează matricea MDGC crescător, în funcție de termenii liniei 2, obținându-se matricea ordonată (MDGO)

$$\text{MDGO} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 2 & 5 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 9 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Se scrie matricea A, matricea de incidență laturi – noduri

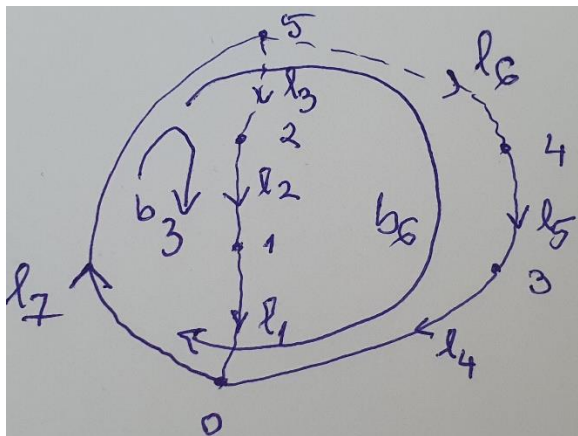
$$A_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} l_7 & l_2 & l_5 & l_1 & l_4 & l_3 & l_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pentru construirea arborelui normal al circuitului se rescrie matricea A, conform teoriei explicată în cursul 1.

$$A_n = \begin{matrix} & \begin{matrix} l_7 & l_2 & l_5 & l_1 & l_4 & l_3 & l_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n_5 \\ n_1 \\ n_3 \\ n_1 + n_2 \\ n_3 + n_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Din matricea normală (matricea A_n) $\Rightarrow$ arborele circuitului este format din: l_7, l_2, l_5, l_1, l_4 , iar din co-arbore fac parte laturile: l_3, l_6 .

În continuare se construiește graful circuitului:



Apoi se scrie matricea B – matricea de incidență laturi – bucle

$$B = \begin{array}{c} b_3 \\ b_6 \end{array} \begin{array}{ccccc|cc} l_1 & l_2 & l_4 & l_5 & l_7 & l_3 & l_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

După definirea acestora, în continuare se partiționează matricile după l_p , l_E , l_J , l_{Ec} , l_{Jc} . (vezi fișierul MathCad).

1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff (adaptată exemplului considerat)

$$\begin{bmatrix} A_p & A_E & A_{Ec} & 0_{(n-1) \times l_{Jc}} = 0 \\ B_p \cdot \underline{Z} & -B_{Ec} \cdot \underline{R}_c & 0_{b \times l_{Ec}} & B_{Jc} = 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_p \\ \underline{I}_E \\ \underline{U}_J = 0 \\ \underline{I}_{Ec} \\ \underline{U}_{Jc} = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot \underline{J} = 0 \\ B_E \cdot \underline{E} \end{bmatrix}$$

unde $\underline{Z}$ =matricea impedanțelor din circuit (matrice pătratică)

$\underline{J}$ =matricea surselor de curent din circuit (matrice coloană)

$\underline{E}$ = matricea surselor de tensiune din circuit (matrice coloană)

$\underline{R}_c$ =matricea rezistențelor de transfer ale surselor comandate în curent, de dimensiune $l_{Ec} \times l_E$

$\underline{G}_c$ =matricea conductanțelor de transfer ale surselor comandate în tensiune, de dimensiune $l_{Jc} \times l_J$

Rezolvarea MathCad

Metode matriciale de rezolvare a circuitelor neregulate în regim sinusoidal

1. Metoda Teoremelor lui Kirchhoff

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{Ec} := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_b := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_p := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{Ec} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Z := \begin{bmatrix} 20 & \pi \cdot 1i & 0 \\ 0 & 50 & \pi \cdot 1i \end{bmatrix}$$

$$R_c := \begin{bmatrix} 0 & -10 & \pi \cdot 1i & 0 \\ -10 & \pi \cdot 1i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 220 \end{bmatrix}$$

$$M := \text{augment}(A_p, A_E, A_{Ec}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N := \text{augment} (B_p \cdot Z, -B_{Ec} \cdot R_c, O_b) = \begin{bmatrix} 62.832i & 0 & 0 & 31.416i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 157.08i & 31.416i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P := \text{stack}(M, N) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 62.832i & 0 & 0 & 31.416i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 157.08i & 31.416i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_E \cdot E = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \end{bmatrix}$$

$$O_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V := \text{stack}(O_1, B_E \cdot E) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 220 \\ 220 \end{bmatrix}$$

$$Nec := P^{-1} \cdot V = \begin{bmatrix} -3.112i \\ -0.778i \\ -3.112i \\ -0.778i \\ -3.89i \\ -3.112i \\ -0.778i \end{bmatrix} \quad \text{unde} \quad \begin{array}{ll} I_3 := -3.112i & I_4 := -0.778i \\ I_6 := -0.778i & I_7 := -3.89i \\ I_1 := -3.112i & I_2 := -3.112i \\ & I_5 := -0.778i \end{array}$$

2. Metoda nodală modificată (adaptată exemplului considerat)

$$\begin{bmatrix} A_p \cdot \underline{Y} \cdot A_p^t & A_E & A_{Ec} \\ A_E^t & 0_{l_E, l_E} & 0_{l_{Ec}, l_{Ec}} \\ A_{Ec}^t & R_c & 0_{l_{Ec}, l_{Ec}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V} \\ \underline{I}_E \\ \underline{I}_{Ec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot \underline{J} \\ -\underline{E} \\ 0_{l_{Ec}, 1} \end{bmatrix}$$

unde $\underline{Y}$ =matricea admitanțelor din laturile circuitului (matrice pătratică, inversa matricii impedanțelor).

Rezolvare în MathCad

2. Metoda Nodală Modificată

$$Z := \begin{bmatrix} 20 \pi \cdot 1i & 0 \\ 0 & 50 \pi \cdot 1i \end{bmatrix} \quad Y := \begin{bmatrix} \frac{1}{20 \pi \cdot 1i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50 \pi \cdot 1i} \end{bmatrix}$$

$$O_{l_{ExlE}} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{l_{ExlEc}} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O_{l_{EcxlEc}} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S := \text{augment}(A_p \cdot Y \cdot A_p^T, A_E, A_{Ec}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.016i & 0 & 0 & 0.016i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.006i & 0.006i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.016i & 0 & 0.006i & -0.022i & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R := \text{augment}(A_E^T, O_{l_{ExlE}}, O_{l_{ExlEc}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T := \text{augment}(A_{Ec}^T, R_c, O_{l_{EcxlEc}}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31.416i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -31.416i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Created with PTC Mathcad Express. See www.mathcad.com

$$W := \text{stack}(S, R, T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -0.016i & 0 & 0 & 0.016i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.006i & 0.006i & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.016i & 0 & 0.006i & -0.022i & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -31.416i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -31.416i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O_{l_{Ecr1}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q := \text{stack}(O_1, E, O_{l_{Ecr1}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Necunoscute := W^{-1} \cdot Q = \begin{bmatrix} 0 \\ -24.444 \\ 0 \\ -97.778 \\ -220 \\ 3.112i \\ 0.778i \\ 3.89i \\ 3.112i \\ 0.778i \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} V_1 := 0 & I_1 := 3.112i \\ V_2 := -24.444 & I_4 := 0.778i \\ V_3 := 0 & I_7 := 3.89i \\ V_4 := -97.778 & I_2 := 3.112i \\ V_5 := -220 & I_5 := 0.778i \end{array}$$

Se observa o buna concordanta cu rezultatele obtinute prin prima metoda.

3. Metoda Hibridă (adaptată exemplului considerat)

Metoda necesită construirea unui arbore normal și gruparea laturilor circuitului în sens larg, la fel ca în cazul metodei Teoremelor lui Kirchhoff.

Pentru rezolvarea circuitelor utilizând această metodă se folosește matricea incidențelor esențiale, matricea D, care se partiționează după aceeași logică:

$$D = \begin{array}{c|ccc} a \setminus c & l_{pc} & l_{Jc} & l_J \\ \hline l_{pa} & D_{pp} & D_{pJc} & D_{pJ} \\ l_{Ec} & D_{Ecp} & D_{EcJc} & D_{EcJ} \\ l_E & D_{Ep} & D_{EJc} & D_{EJ} \end{array}$$

Matricea D se poate obține din matricea B. $B = \begin{bmatrix} -D^T & 1_{bxb} \end{bmatrix}$

Matricea D este:

$$D = \begin{bmatrix} l_3 & l_6 \\ l_1 & -1 & 0 \\ l_2 & -1 & 0 \\ l_4 & 0 & -1 \\ l_5 & 0 & -1 \\ l_7 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Modelul matematic al metodei, adaptat circuitului exemplu:

$$\begin{bmatrix} D_{pp} = 0 & \underline{Y}_a = 0 & D_{pJc} \cdot B_c = 0 & D_{pJc} \cdot G_c = 0 \\ \underline{Z}_c & -D_{pp}^t = 0 & D_{Ecp}^t \cdot R_c & D_{Ecp}^t \cdot A_c = 0 \\ D_{Ep} & 0 & (1 + D_{EJc} \cdot B_c) = 1 & D_{EJc} \cdot G_c = 0 \\ 0 & -D_{pJ}^t = 0 & D_{EcJ}^t \cdot R_c = 0 & (1 + D_{EcJ}^t \cdot A_c) = 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{pc} \\ \underline{U}_{pa} \\ \underline{I}_E \\ \underline{U}_J \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{pJ} = 0 & 0 \\ 0 & D_{Ep}^t \\ D_{EJ} = 0 & 0 \\ 0 & D_{EJ}^t = 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J} \\ \underline{E} \end{bmatrix}$$

Coarde pasive: l_3, l_6

Ramuri pasive: nu sunt

$\underline{Y}_a=0$ – matricea admitanțelor ramurilor pasive

$\underline{Z}_c$ – matricea impedențelor coardelor pasive

B_c, G_c, A_c, R_c – coeficienți ai surselor comandate, aici avem doar R_c

R_c – matricea rezistențelor de transfer

$$\underline{Z}_c = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & 0 \\ 0 & j\omega L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20\pi j & 0 \\ 0 & 50\pi j \end{bmatrix}; \quad R_c = \begin{bmatrix} 0 & -j\omega M & 0 \\ -j\omega M & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10\pi j & 0 \\ -10\pi j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deci modelul matematic al metodei devine:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{Z}_c & 0 & D_{Ecp}^t \cdot R_c & 0 \\ D_{Ep} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{pc} \\ 0 \\ \underline{I}_E \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D_{Ep}^t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{J} \\ \underline{E} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Ecuatia 1: $0 = 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \text{Ecuatia 2: } \underline{Z}_c \cdot \underline{I}_{pc} + D_{Ecp}^t \cdot R_c \cdot \underline{I}_E &= -D_{Ep}^t \cdot \underline{E} \\ \text{Ecuatia 3: } D_{Ep} \cdot \underline{I}_{pc} + \underline{I}_E &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{Z}_c & D_{Ecp}^t \cdot R_c \\ D_{Ep} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{pc} \\ \underline{I}_E \end{bmatrix} = -D_{Ep}^t \cdot \underline{E}$$

Ecuatia 4: $0 = 0$

$$D_{Ecp}^t \cdot R_c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot R_c = -R_c$$

$$-D_{Ep}^t \cdot \underline{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 220 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 20\pi j & 0 & 0 & 10\pi j & 0 \\ 0 & 50\pi j & 10\pi j & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I_3} \\ \underline{I_6} \\ \underline{I_1} \\ \underline{I_4} \\ \underline{I_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220 \\ 220 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cu soluția } \begin{bmatrix} \underline{I_3} \\ \underline{I_6} \\ \underline{I_1} \\ \underline{I_4} \\ \underline{I_7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.112i \\ -0.778i \\ -3.112i \\ -0.778i \\ -3.89i \end{bmatrix}$$

Restul curenților din circuit se determină simplu: $\underline{I_2} = \underline{I_1} = \underline{I_3} = -3.112i$
 $\underline{I_5} = \underline{I_4} = \underline{I_6} = -0.778i$