

Tehnologii avansate de proiectare a circuitelor electrice și electronice

S.I. dr. ing. Mihaela CREȚU
Mihaela.Cretu@ethm.utcluj.ro



CURS 4

CIRCUITE ANALOGICE LINIARE ÎN REGIM TRANZITORIU

Cuprinsul cursului 4

- ✓ Generalități
- ✓ Metode operaționale
- ✓ Modelarea cuplajelor magnetice
- ✓ Modele matematice pentru circuite reciproce în regim tranzitoriu
 - ✓ Metoda teoremelor lui Kirchhoff
 - ✓ Metoda nodală modificată
 - ✓ Metoda tensiunilor ramurilor pasive
 - ✓ Metoda curenților coardelor pasive
- ✓ Modele matematice pentru circuite neregiproce în regim tranzitoriu
 - ✓ Metoda teoremelor lui Kirchhoff
 - ✓ Metoda nodală modificată
 - ✓ Metoda hibridă

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

1.1. Generalități

- Regimurile tranzitorii în circuitele electrice sunt consecințe ale unor acțiuni exterioare voite, care conduc la modificări topologice sau variații ale unor parametri funcționali, perturbând astfel regimurile permanente. Durează până la stabilirea unui nou regim permanent.
- Pe parcursul regimurilor tranzitorii, mărimile electrice și magnetice sunt variabile în timp, astfel încât soluția generală a unei probleme de analiză de acest tip constă în funcții vectoriale de timp.
- Pentru un circuit cu l laturi, dintre care l_C laturi cu condensatoare și l_L laturi cu bobine, soluția generală a analizei conține:

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

- Curenții și tensiunile laturilor

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \dots \\ i_l(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_l(t) \end{bmatrix}$$

- Sarcinile condensatoarelor

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_{l_c}(t) \end{bmatrix}$$

- Fluxurile magnetice totale ale bobinelor

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \dots \\ \phi_{l_L}(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{cu } t \in [t_0, t_{\text{final}}]$$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Modelul matematic general se scrie astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot i(t) = 0_{(n-1),1} \\ B \cdot u(t) = 0_{b,1} \\ f(i, u, q, \varphi) = 0_{l,1} \\ \dot{q}(t) - i(t) = 0_{l_C,1} \\ \dot{\varphi}(t) - u(t) = 0_{l_L,1} \end{array} \right.$$

cu condițiile inițiale:

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t_0) = q_0 \\ \varphi(t_0) = \varphi_0 \end{array} \right.$$

S-au folosit notațiile simplificate pentru derivatele în raport cu timpul (exemplu: $\dot{q}(t)$ reprezintă derivata în raport cu timpul a sarcinii electrice)

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}, (l_E + l_J) \times 1$$

Vectorul surselor independente:

Setul variabilelor independente se poate restrânge la sarcinile condensatoarelor esențiale și fluxurile bobinelor esențiale.

Acestea se numesc *variabile de stare* și descriu complet funcționarea circuitului în orice moment al regimului tranzitoriu.

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Cazuri tipice de inconsistență a modelelor

1. Dacă circuitul conține bucle formate numai din condensatoare și (eventual) surse de tensiune independente sau comandate (bucle de tip CE), tensiunea unuia dintre condensatoare se exprimă, în baza celei de a doua TKH, în funcție de tensiunile celorlalte și (eventual) tensiunile surselor. ➡ Tensiunea acestui condensator nu este variabilă independentă, iar acest element de circuit se numește *condensator în exces*.

Acesta va fi amplasat în co-arbore, întrucât arborele nu trebuie să conțină bucle și în același timp, trebuie să conțină toate sursele de tensiune ale circuitului.

Toate celelalte condensatoare ale buclei rămân în arbore și se numesc *condensatoare esențiale*. (Oricare dintre condensatoarele unei bucle de tip CE poate fi considerat element în exces).

Cazuri tipice de inconsistență a modelelor

2. Dacă circuitul conține secțiuni intersectate numai de bobine și (eventual) surse de curent independente sau comandate (bucle de tip LJ), curentul uneia din bobine se exprimă, în baza primei TKH, în funcție de curenții celorlalte și (eventual) curenții surselor.  Curentul acelei bobine nu este variabilă independentă, iar acest element de circuit se numește *bobină în exces*.

Aceasta va fi amplasată în arbore, întrucât arborele trebuie să fie subgraf conex și să nu conțină nici o sursă de curent.

Toate celelalte bobine ale secțiunii rămân în co-arbore și se numesc *bobine esențiale*. (Oricare dintre bobinele unei secțiuni de tip LJ poate fi considerată element în exces).

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Numărul variabilelor de stare poate fi mai mic decât numărul total al elementelor cu memorie.

Vectorul de stare:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}$$

l_C - numărul laturilor cu condensatoare

l_L - numărul laturilor cu bobine

$u_C(t)$ - vectorul tensiunilor condensatoarelor esențiale

$i_L(t)$ - vectorul curenților bobinelor esențiale

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

4.2. Metode operaționale

- Modelele matematice cu sisteme de ecuații integro-diferențiale se substituie prin sisteme de ecuații algebrice cu coeficienți complecși;
- Operează cu mărimi imagine, fără semnificație fizică, asociate mărimilor electrice descrise prin funcții de timp (funcții de tip *original*, cărora li se asociază *transformata Laplace*):

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad \text{si} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

Metoda presupune construirea în prealabil a schemei operaționale a circuitului;

Notatii utilizate în practică:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}, \quad I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\}, \quad \Phi(s) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}, \quad Q(s) = \mathcal{L}\{q(t)\}.$$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Folosind indicele k pentru indexul laturii ocupate de elementul de bază, rezultă ecuațiile caracteristice pentru elementele de circuit:

- **Rezistoare liniare** $U_k(s) = R_k \cdot I_k(s)$ sau $I_k(s) = G_k \cdot U_k(s)$
- **Bobine liniare** $\Phi_k(s) = L_k \cdot I_k(s)$
- **Condensatoare liniare** $Q_k(s) = C_k \cdot U_k(s)$
- **Surse independente de tensiune** $U_k(s) = -E_k(s) = -\frac{E_k(s)^*}{s}$
- **Surse independente de curent** $I_k(s) = J_k(s) = \frac{J_k(s)^*}{s}$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

- **Porțile de comandă ale surselor comandate:**
 - În curent: $U_j(s) = 0$
 - În tensiune: $I_j(s) = 0$
- **Porțile comandate ale surselor de tensiune comandate:**
 - În curent: $U_k(s) = -R_{kj} \cdot I_j(s)$
 - În tensiune: $U_k(s) = -A_{kj} \cdot U_j(s)$
- **Porțile comandate ale surselor de curent comandate:**
 - În curent: $I_k(s) = B_{kj} \cdot I_j(s)$
 - În tensiune: $I_k(s) = G_{kj} \cdot U_j(s)$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Formele operaționale de evoluție ale elementelor acumulative de energie:

- Bobine liniare izolate:**

$$U_k(s) = s \cdot L_k \cdot I_k(s) - L_k \cdot i_k(0_-) \quad - \text{ sursa de tensiune operațională}$$

sau

$$I_k(s) = \frac{U_k(s)}{s \cdot L_k} + \frac{i_k(0_-)}{s}$$

- sursa de curent operațională

- Condensatoare liniare**

$$U_k(s) = \frac{I_k(s)}{s \cdot C_k} + \frac{u_k(0_-)}{s} \quad - \text{ sursa de tensiune operațională}$$

sau

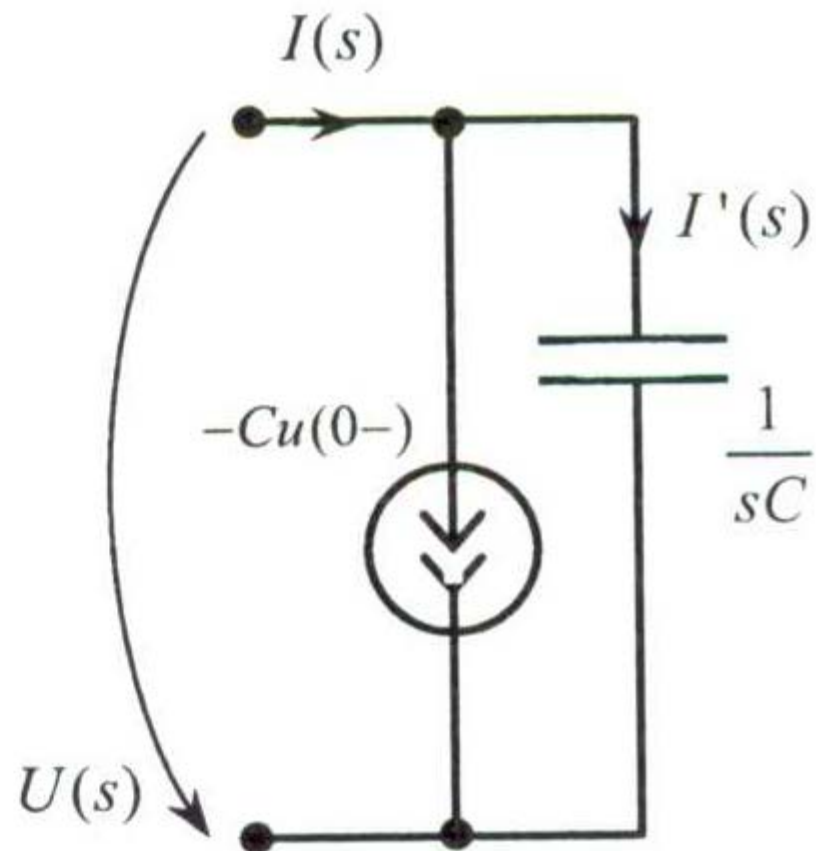
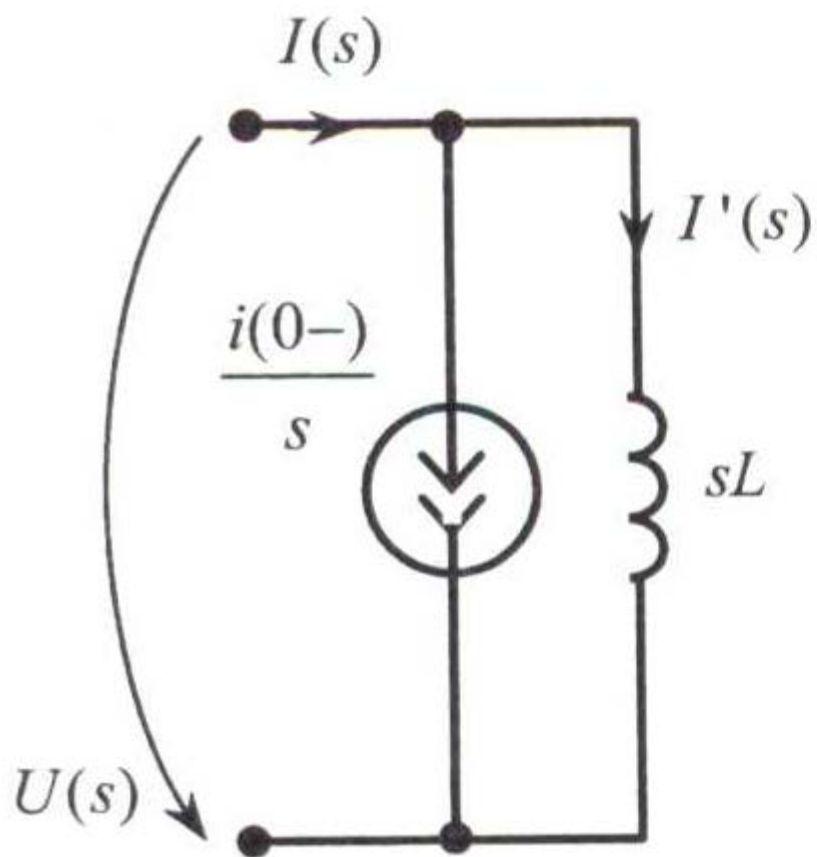
$$I_k(s) = s \cdot C_k \cdot U_k(s) - C_k \cdot u_k(0_-)$$

- sursa de curent operațională

Este avantajoasă modelarea condițiilor inițiale prin surse operaționale de curent, întrucât acestea nu impun creșterea numărului de noduri al schemei operaționale față de circuitul inițial.

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Modelarea condițiilor inițiale în schema operațională echivalentă prin surse de curent:



Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

<i>Original</i>	<i>Transformată</i>
$\delta(t)$	1
$\gamma(t)$	$\frac{1}{s}$
$\gamma(t)e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\gamma(t)\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\gamma(t)\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\gamma(t)\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\gamma(t)\operatorname{ch} at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\gamma(t)e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\gamma(t)e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\gamma(t)\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$\gamma(t)\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Forma generală a modelului matematic:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}(s) = \mathbf{0}_{(n-1),1} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}(s) = \mathbf{0}_{b,1} \\ \mathbf{Z}_k(s) \cdot \mathbf{I}_k(s) - \mathbf{U}_k(s) = \mathbf{0}_{l_p,1} \text{ sau } \mathbf{Y}_k(s) \cdot \mathbf{U}_k(s) - \mathbf{I}_k(s) = \mathbf{0}_{l_p,1} \\ \mathbf{U}_E(s) = -\mathbf{E}_{l_E,1}(s) \text{ si } \mathbf{I}_J(s) = \mathbf{J}_{l_J,1}(s) \\ \mathbf{U}_{Ec}(s) = -\mathbf{E}_c(s) = -[\mathbf{A}_c \quad \mathbf{R}_c] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_J(s) \\ \mathbf{I}_E(s) \end{bmatrix} \\ \mathbf{I}_{Jc}(s) = \mathbf{J}_c(s) = [\mathbf{G}_c \quad \mathbf{B}_c] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_J(s) \\ \mathbf{I}_E(s) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

După determinarea soluțiilor se calculează mărimile instantanee prin efectuarea transformatei Laplace inverse (cu formule specifice de inversiune).

4.3. Modelarea cuplajelor magnetice:

Se face utilizând surse comandate în domeniul operațional.
Pentru cuplaje magnetice pozitive avem formulele:

$$\begin{cases} U_k(s) = s \cdot L_k \cdot I_k(s) - L_k \cdot i_k(0_-) + s \cdot L_{kj} \cdot I_j(s) - L_{kj} \cdot i_j(0_-) \\ U_j(s) = s \cdot L_j \cdot I_j(s) - L_j \cdot i_j(0_-) + s \cdot L_{jk} \cdot I_k(s) - L_{jk} \cdot i_k(0_-) \end{cases}$$

Pentru a evita schemele echivalente de tip serie, cu surse de tensiune, care introduc noduri suplimentare, se folosește modelarea cu surse de curent:

$$\begin{cases} I_k(s) = Y_{kk}(s) \cdot U_k(s) - J_{kj}(s) + \frac{i_k(0_-)}{s} \\ I_j(s) = Y_{jj}(s) \cdot U_j(s) - J_{jk}(s) + \frac{i_j(0_-)}{s} \end{cases}$$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Notațiile folosite indică:

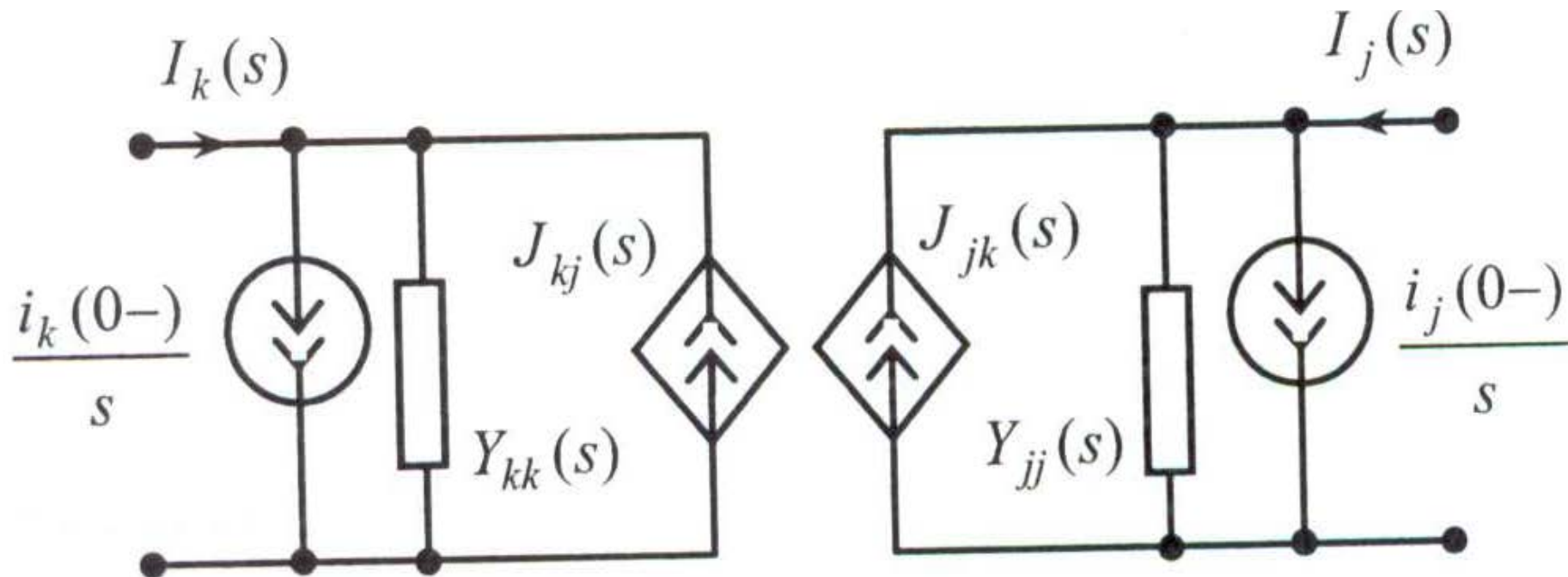
$$Y_{kk}(s) = \frac{L_j}{s(L_k L_j - L_{kj} L_{jk})} \quad ; \quad Y_{jj}(s) = \frac{L_k}{s(L_k L_j - L_{kj} L_{jk})}$$

$$Y_{kj}(s) = \frac{L_{kj}}{s(L_k L_j - L_{kj} L_{jk})} \quad ; \quad Y_{jk}(s) = \frac{L_{jk}}{s(L_k L_j - L_{kj} L_{jk})}$$

$$J_{kj}(s) = Y_{kj}(s) \cdot U_j(s) \quad ; \quad J_{jk}(s) = Y_{jk}(s) \cdot U_k(s)$$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

Modelarea cuplajelor simple în domeniul operațional:



4.4. Modele matematice pentru circuite reciproce funcționând în regim tranzitoriu

4.4.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

$$\begin{bmatrix} A_p & A_E & 0_{(n-1),l_J} \\ B_p \cdot Z(s) & 0_{b,l_E} & B_J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_p(s) \\ I_E(s) \\ U_J(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot J(s) \\ B_E \cdot E(s) \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{bmatrix} A_p \cdot Y(s) & 0_{(n-1),l_J} & A_E \\ B_p & B_J & 0_{b,l_E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_p(s) \\ U_J(s) \\ I_E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot J(s) \\ B_E \cdot E(s) \end{bmatrix}$$

4.4.2. Metoda nodală modificată

$$\begin{bmatrix} A_p \cdot Y(s) \cdot A_p^t & A_E \\ A_E^t & 0_{l_E, l_E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(s) \\ I_{E(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot J(s) \\ -E(s) \end{bmatrix}$$

4.4.3 . Metoda tensiunilor ramurilor pasive

$$\left(D_{pp} \cdot Y_{pc}(s) \cdot D_{pp}^t + Y_{pa}(s) \right) \cdot U_{pa}(s) = D_{pp} \cdot Y_{pc}(s) \cdot D_{Ep}^t \cdot E(s) - D_{pJ} \cdot J(s)$$

4.4.4 . Metoda curenților coardelor pasive

$$\left(Z_{pc}(s) + D_{pp}^t \cdot R_{pa}(s) \cdot D_{pp} \right) \cdot I_{pc}(s) = -D_{Ep}^t \cdot E(s) - D_{pp}^t \cdot Z_{pa}(s) \cdot D_{pJ} \cdot J(s)$$

4.5. Modele matematice pentru circuite neregiproce funcționând în regim tranzitoriu

4.5.1. Metoda teoremelor lui Kirchhoff

$$\begin{bmatrix} A_p & A_E + A_{Jc} \cdot B_c & A_{Jc} \cdot G_c & A_{Ec} & 0_{(n-1), l_{Jc}} \\ B_p \cdot Z(s) & -B_{Ec} \cdot R_c & B_J - B_{Ec} \cdot A_c & 0_{b, l_{Ec}} & B_{Jc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_p(s) \\ I_E(s) \\ U_J(s) \\ I_{Ec}(s) \\ U_{Jc}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot J(s) \\ B_E \cdot E(s) \end{bmatrix}$$

Curs 4. Circuite analogice liniare în regim tranzitoriu

4.5.2 . Metoda nodală modificată

$$\begin{bmatrix} A_p \cdot Y(s) \cdot A_p^t + A_{Jc} \cdot G_c \cdot A_J^t & A_E + A_{Jc} \cdot B_c & A_{Ec} \\ A_E^t & 0_{l_E, l_E} & 0_{l_{Ec}, l_{Ec}} \\ A_{Ec}^t + A_c \cdot A_J^t & R_c & 0_{l_{Ec}, l_{Ec}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V(s) \\ I_E(s) \\ I_{Ec}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_J \cdot J(s) \\ -E(s) \\ 0_{l_{Ec}, 1} \end{bmatrix}$$

4.5.3. Metoda hibridă

$$\begin{bmatrix} D_{RR} & Y_{pa}(s) & D_{RJc} \cdot B_c & D_{RJc} \cdot G_c \\ Z_{pc}(s) & -D_{RR}^t & D_{EcR}^t \cdot R_c & D_{EcR}^t \cdot A_c \\ D_{ER} & 0 & (1 + D_{EJc} \cdot B_c) & D_{EJc} \cdot G_c \\ 0 & -D_{RJ}^t & D_{EcJ}^t \cdot R_c & (1 + D_{EcJ}^t \cdot A_c) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{pc}(s) \\ U_{pa}(s) \\ I_E(s) \\ U_J(s) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{RJ} & 0 \\ 0 & D_{ER}^t \\ D_{EJ} & 0 \\ 0 & D_{EJ}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J(s) \\ E(s) \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Iordache M., Mandache L., “Analiza asistată de calculator a circuitelor analogice neliniare”, Ed. Politehnica Press, București 2004, ISBN 973-8449-36-7.
- [2] Mandache L., Topan D., “Simularea circuitelor electrice. Algoritmi și programe de calcul”. Ed. Universitaria, Craiova, 2009.