Mihai Nedelcu **Horațiu Mociran**

METODA ELEMENTELOR FINITE

- *îndrumător de laborator* –

U.T.PRESS
CLUJ-NAPOCA, 2016
ISBN 978-606-737-202-1

Cu-vânt înainte!

Prezentul îndrumător
Oferă sprijin și-ajutor
Studenților Masteranzi
Ai Facultății de Construcții,
În lupta lor fără egal
De-a modela cât mai real
Comportamentul structural.
Elementele Finite
Domină nestingherite
Analiza structurală.
Inginerii proiectanți
Folosesc noapte și zi,
Programe pe calculator
Bazate pe Metoda lor.
Lucrez corect? Lucrez cu spor?
Se-ntreabă orice începător
În Sap, Consteel, Axis, Robot...
Îndrumătorul face tot!

...posibilul să îndeplinească
Aceste clare obiective:
1. Noțiuni introductive
În teoria liniară
(care-i plăcută și ușoară);
2. Studenții vor crea
Într-un limbaj de programare,
Aplicații ce rezolvă
O bară comprimată,
O grindă cu zăbrele,
Un cadru plan, o șaibă...
Vedeți, simple probleme,
Dar care programate
Pun bine în relief
Cum funcționează un software
Complex bazat pe
MEF.

Autorii mulțumesc
Referentului științific,
Vă urează să aveți
Studiu vesel și prolific,
Iar ca ultim comentariu:
Știința este esențială!
Exprimarea ei în versuri
La examen – opțională.

Cuprins

Algoritmul MEF pentru calculul structural liniar

Teoria e plăcere
Lapte cald cu stropi de miere
Dar nu tăbărâți din prima!
Aprindeți treptat lumina,
Fără maximă prudență
Cauzează dependență...

Principiul Metodei Elementelor Finite (MEF) constă în aproximarea oricărei mărimi continue printr-un model discret, realizat din compunerea unor funcții continue, definite local pe un număr finit de subdomenii (Elemente Finite).

MEF poate fi formulată alegând ca necunoscute deplasările, eforturile (tensiunile), sau o combinație a acestora. În această lucrare se utilizează formularea în deplasări, cea mai utilizată în calculul structural.

Pentru prezentarea algoritmului de calcul, se studiază cazul simplu al unei bare drepte (Fig. I.1), acționată de o forță p uniform distribuită în lungul barei. Se consideră numai deplasarea $u(x)$ paralelă cu axa barei.

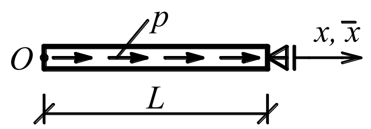


Fig. I.1: Bara acționată de încărcare axială

Fig. I.2 prezintă discretizarea domeniului și anume împărțirea barei în 3 subdomenii (segmente) de lungime l denumite Elemente Finite (EF), iar punctele care împart domeniul se vor numi noduri.

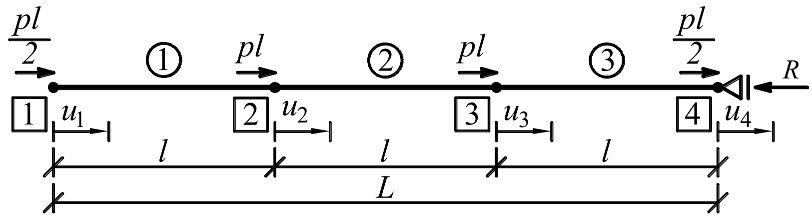


Fig. I.2: Discretizarea în Elemente Finite

Fig. I.3 prezintă un singur EF cu sistemul local de coordonate Ox care în cazul analizat este paralel cu sistemul global de coordonate $O\overline{x}$ (originea O coincide cu nodul i).

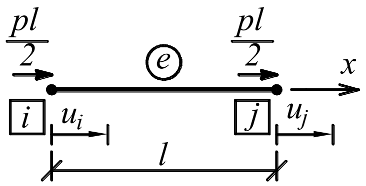


Fig. I.3: Elementul Finit

Deplasarea $u(x)$ a unui punct curent pe un EF (unde $x \in (x_i, x_j)$), se poate aproxima prin interpolare între deplasările nodale u_i și u_j utilizând frecvent funcții polinomiale. Cea mai simplă interpolare este cea liniară:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \tag{I.1}$$

Ecuația anterioară poate fi rescrisă în formulare matriceală după cum urmează:

$$u = \{1 \quad x\}\begin{Bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{Bmatrix} \tag{I.2}$$

sau introducând notațiile $\boldsymbol{U_x} = \{1 \quad x\}$ și $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2\}^T$

$$\underline{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U_x \alpha}} \tag{I.3}$$

Obs: Relațiile subliniate prezintă caracter general putând fi aplicate oricărui tip de EF destinat calculului structural.

Scriind condițiile la limită, coeficienții polinomului de interpolare pot fi exprimați în funcție de deplasările pe direcțiile Gradelor de Liberate (GL) nodale care devin necunoscutele problemei. Gradele de Libertate ale unui sistem reprezinta numărul de parametri independenți care definesc *poziția nodurilor* în configurația deformată (deplasată).

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 l \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= u_i \\ \alpha_2 &= \left(u_j - u_i\right)/l \end{aligned} \tag{I.4}$$

sau introducând vectorul deplasărilor nodale $\boldsymbol{U_e} = \{u_i \quad u_j\}^T$

$$\boldsymbol{U_e} = \begin{Bmatrix}u_i \\ u_j\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 1 & l\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A\alpha} \quad \Rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U_e}} \tag{I.5}$$

Din Ec. (I.1) și (I.4), deplasarea curentă poate fi scrisă în funcție de deplasările nodale:

$$u(x) = u_i + \frac{u_j - u_i}{l}x \tag{I.6}$$

Aceeași relație se obține în formulare matriceală din Ec. (I.3) și (I.5) care au caracter general:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U_x A^{-1} U_e} = \{1 \quad x\}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}\boldsymbol{U_e} = \left\{1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l}\right\}\boldsymbol{U_e} = \{\Psi_i \quad \Psi_j\}\boldsymbol{U_e} \tag{I.7}$$

Se introduce *matricea de interpolare a deplasărilor (*denumită și *matricea funcțiilor de formă*) $\boldsymbol{\Psi} = \{\Psi_i \quad \Psi_j\}$, iar relația anterioară devine:

$$\underline{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Psi U_e}} \tag{I.8}$$

Vectorul deformație $\boldsymbol{\varepsilon}$ *pe EF*, conține în cazul de față doar deformația specifică liniară ε_x și cu ajutorul relațiilor de deformații (ecuațiile lui Cauchy) este definit prin:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{I.9}$$

și poate fi determinat în funcție de deplasările nodale utilizând Ec. (I.7):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x = \left\{\frac{d\Psi_i}{dx} \quad \frac{d\Psi_j}{dx}\right\}\boldsymbol{U_e} = \left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}\boldsymbol{U_e} = \frac{u_j - u_i}{l}\left(= \frac{\Delta l}{l}\right) \tag{I.10}$$

unde la expresia finală se putea ajunge prin derivare directă a Ec. (I.6).

Introducând matricea deformațiilor $\boldsymbol{B} = \left\{-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l}\right\}$, relația anterioară devine:

A fost mult? A fost cumplit?
A durut atât de tare?
Șapte pagini - mai nimic,
Și-acum...

Recapitulare

Relațiile subliniate din acest capitol au caracter absolut general, putând fi aplicate oricărui tip de EF destinat calculului liniar al structurilor, în consecință se rescriu mai jos pentru a oferi o vedere de ansamblu a MEF:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_x\boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}_e \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{U}_e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_e \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_e$$

$$\delta W = \delta L$$

$$\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Psi}\delta\boldsymbol{U}_e \qquad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\delta\boldsymbol{U}_e$$

$$\delta W_e = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}dV = \delta\boldsymbol{U}_e^{\,T}\boldsymbol{k}_e\boldsymbol{U}_e \qquad \boldsymbol{k}_e = \int_V \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}dV$$

$$\delta L_e = \int_V \boldsymbol{X}^t\delta\boldsymbol{u}dV + \int_S \boldsymbol{F}^t\delta\boldsymbol{u}dS = \delta\boldsymbol{U}_e^T\boldsymbol{P}_e \qquad \boldsymbol{P}_e = \int_V \boldsymbol{\Psi}^t\boldsymbol{X}dV + \int_S \boldsymbol{\Psi}^t\boldsymbol{F}dS$$

$$\delta W_e = \delta L_e \;\rightarrow\; \boldsymbol{P}_e = \boldsymbol{k}_e\boldsymbol{U}_e$$

$$\bar{\boldsymbol{U}}_e = \boldsymbol{R}_e^{\,T}\boldsymbol{U}_e \qquad \bar{\boldsymbol{P}}_e = \boldsymbol{R}_e^{\,T}\boldsymbol{P}_e \qquad \bar{\boldsymbol{k}}_e = \boldsymbol{R}_e^{\,T}\boldsymbol{k}_e\boldsymbol{R}_e$$

$$\boldsymbol{U}_{tot} = \left\{\bar{\boldsymbol{U}}_{e1} \;\; \bar{\boldsymbol{U}}_{e2} \;\; \dots \;\; \bar{\boldsymbol{U}}_{en}\right\}^T \qquad \boldsymbol{P}_{tot} = \left\{\bar{\boldsymbol{P}}_{e1} \;\; \bar{\boldsymbol{P}}_{e2} \;\; \dots \;\; \bar{\boldsymbol{P}}_{en}\right\}^T$$

$$\boldsymbol{k}_{tot} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{k}}_{e1} & & & \\ & \bar{\boldsymbol{k}}_{e2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\boldsymbol{k}}_{en} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \left\{\boldsymbol{u}_1 \;\; \boldsymbol{u}_2 \;\; \dots \;\; \boldsymbol{u}_m\right\}^T \qquad \boldsymbol{P} = \left\{\boldsymbol{P}_1 \;\; \boldsymbol{P}_2 \;\; \dots \;\; \boldsymbol{P}_m\right\}^T$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{P}_{tot} \qquad \boldsymbol{P}_{tot} = \boldsymbol{k}_{tot}\boldsymbol{U}_{tot} \qquad \boldsymbol{U}_{tot} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{k}_{tot}\boldsymbol{L}$$

$$\boldsymbol{P}_{redus} = \boldsymbol{K}_{redus}\boldsymbol{U}_{liber} \qquad \boldsymbol{U}_{liber} = \boldsymbol{K}_{redus}^{-1}\boldsymbol{P}_{redus}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K}_R\boldsymbol{U} - \boldsymbol{P}_R$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{tot} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{U}_{tot} \qquad \boldsymbol{\sigma}_{tot} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{U}_{tot}$$

Sfatul doctorului inginer: A se citi de trei ori pe zi, înainte (sau în loc) de fiecare masă!

Lucrările I și II - Noțiuni Introductive în Mediul de Programare Matlab

Se poate înțelege un vals fără să-l dansăm?
Se poate înțelege fotbalul fără să-l jucăm?
Se poate înțelege MEF fără să programăm?
Teoretic da.
Practic...

OBIECTIVELE LUCRĂRILOR

- familiarizarea cu mediul de programare MATLAB
- definirea și manipularea matricelor și vectorilor;
- calcule cu matrice și vectori;
- rezolvarea sistemelor de ecuații liniare;
- însușirea funcțiilor matematice uzuale (utilizate în cadrul disciplinei);
- elemente de grafică 2D și 3D;
- elemente de programare MATLAB.

Pentru îndeplinirea obiectivelor, se vor parcurge noțiunile de sintaxă și semantică MATLAB, precum și exemplele date în APPENDIX.

Lucrarea III – Aplicație MEF pentru o bară simplă

Viața vi se va schimba
Dacă-n MEF veți programa.
Fără alte explicații
Hai să scriem aplicații!

Să se afle deplasările nodale, reacțiunea și tensiunile normale longitudinale pentru bara descrisă în Fig. I.1. Caracteristicile structurii: interval a = 1000mm, modulul lui Young $E = 1000MPa$, aria secțiunii transversale $A = 100mm^2$, forța uniform distribuită $p = 1N/mm$.

```
%Se șterg toate variabilele din memorie (… am uitat tot!)
clear all;
%Se introduc datele de intrare:
%lungimea barei [mm]
lungime_bara=1000;
%Aria secțiunii transversale [mm^2]
Ae=100;
%modulul lui Young [N/mm^2]
E=1000;
%încărcarea axială uniform distribuită [N/mm]
p=1;
%număr EF pe bară
nrEF=3; (la început cât mai puține, ca să pricepem mai bine...)
%număr GL pe EF
nrGL_EF=2; (gradele de libertare, egalitate,  fraternitate...)
```

```
%număr noduri
nrnod=nrEF+1;
%număr GL
nrGL=nrnod;
%lungime EF
l=lungime_bara/nrEF;
%se construiește matricea Elementelor Finite
%inițializare
M_EF=zeros(nrEF,nrGL_EF+1);
%prima coloană conține denumirea EF
M_EF(:,1)=1:nrEF;
%a doua coloană conține primul nod al EF
M_EF(:,2)=1:nrEF;
%a treia coloană conține al doilea nod al EF
M_EF(:,3)=2:nrEF+1;
%se construiește matricea Gradelor de Libertate (pentru această aplicație, este identică cu matricea M_EF)
M_GL=M_EF;
%matricea de rigiditate a EF
```

(atenție mai jos la semne! Nu de circulație...)

```
ke=E*Ae/l*[1 -1;-1 1;];

%se construiește matricea de localizare L
```

(cine înțelege ce urmează acum va fii un programator extrem de bun)

```
L=zeros(nrGL_EF*nrEF,nrGL);

for i=1:nrEF
    for j=1:nrGL_EF
     L(j+(i-1)* nrGL_EF, M_GL(i,j+1))=1;
    end
end
```

```
nrnod=4

nrGL=4

l=333.33
```

(credeți-mă ce spun eu până aici a fost mai greu)

```
M_EF =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

(trageți cu ochiul și la Fig.I.2, așa... șmecherește)

```
M_EF =

     1     1     2
     2     2     3
     3     3     4


ke =

   300  -300
  -300   300


L =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
%afișare rezultate
(Aproape am terminat/Domnul fie lăudat!)
%coordonatele nodurilor în lungul barei
x=0:l:l*nrEF;
%afișare deplasări
subplot(1,2,1);
bar(x,U,1,'r');
axis tight; title('deplasari);
%afișare tensiuni sigma
subplot(1,2,2);
bar(x(1:nrEF)+l/2,sigma_ctEF,1);
axis tight; title('sigma');
hold on
plot(x,sigma,'color','r','Linewidth',2); (roşu am ales nuanţa / să-i pricepem importanţa)

axis tight; title('sigma');
legend('sigma pe EF,'sigma mediat',2);
 %Sfârșit!
```

%Epilog: Rulați aplicația anterioară de mai multe ori mărind de fiecare dată numărul de Elemente Finite. Comparați rezultatele!

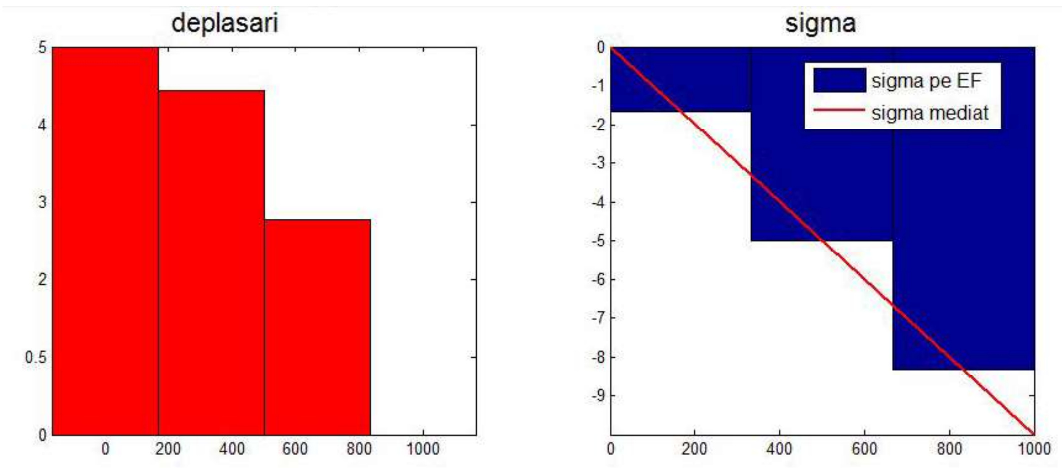


Fig. III.4: Deplasări nodale și tensiuni normale longitudinale

Temă!!! *(Acum se separă adulții de copii...)*

Adaptați aplicația anterioară pentru cazurile de încărcare și rezemare date mai jos ($P = 1kN$):

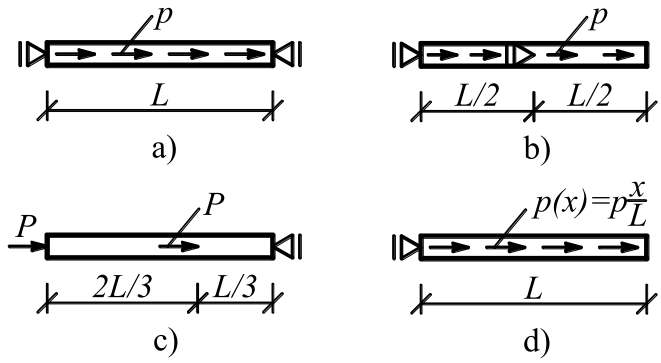


Fig. III.5: Temă 1 – bare încărcate axial

Lucrarea IV – Grinzi cu zăbrele

IV.1. Noțiuni teoretice

Pentru sănătatea d-voastră consumați zilnic trei pagini de teorie!

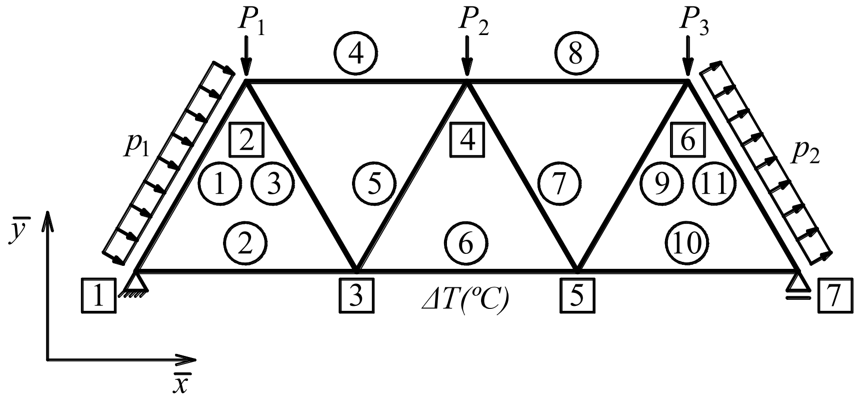


Fig. IV.1: Grinda cu zăbrele și 3 tipuri de încărcări

Mare parte din relațiile prezentate în primul capitol se aplică direct, după definirea elementului finit considerat în analiză. Pentru acest tip de structură, elementul finit este bara dublu articulată la capete prezentată în Fig. IV.2 împreună cu Gradele de Libertate.

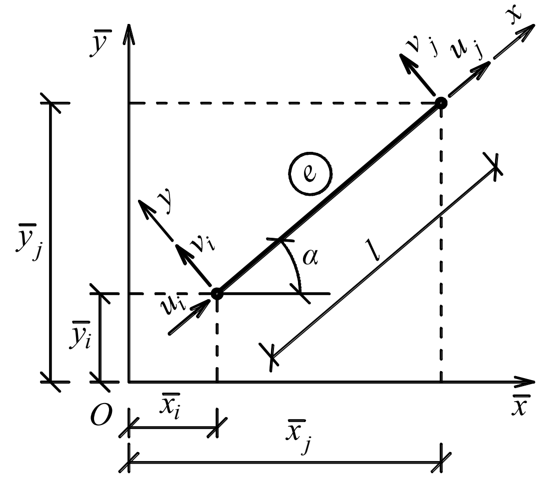


Fig. IV.2: Bara dublu articulată - GL

Fiecare bară este definită geometric de lungimea l și unghiul de înclinare α, care se calculează pe baza coordonatelor nodurilor ($\overline{x}_i, \overline{y}_i$ și $\overline{x}_j, \overline{y}_j$) în sistemul global de axe:

$$l = \sqrt{(\overline{x}_2 - \overline{x}_1)^2 + (\overline{y}_2 - \overline{y}_1)^2}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\overline{y}_2 - \overline{y}_1}{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}\right) \qquad \text{(II.1)}$$

Se observă cum sistemul local Oxy al barei nu este paralel cu sistemul global $O\overline{xy}$ ci este rotit cu unghiul de înclinare al barei α.

IV.2. Exemplu: grindă cu zăbrele plană

Hai că ne-a venit un chef
Să mai programăm în MEF!

Să se determine deplasările nodale, reacțiunile și forțele axiale din bare pentru grinda cu zăbrele acționată de forțe concentrate în noduri (Fig. IV.4). Caracteristicile structurii: interval $a = 1m$, modulul lui Young $E = 2.1e05MPa$, aria tălpilor $A_1 = 200mm^2$, aria diagonalelor $A_2 = 100mm^2$, forța concentrată $P = 100kN$.

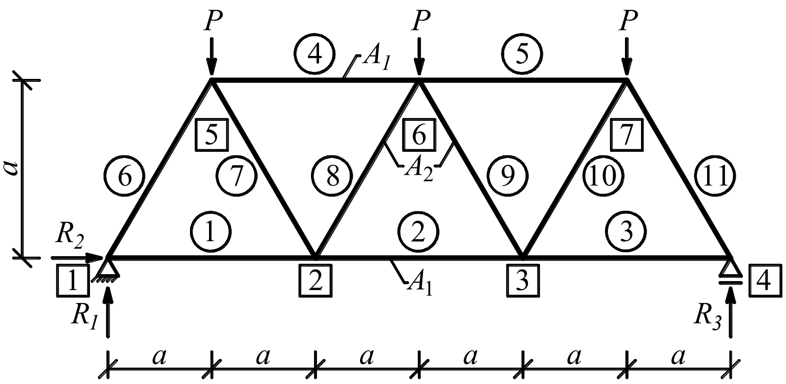


Fig. IV.4: a) Grindă cu zăbrele; b) Grade de Libertate

```
%Se șterg toate variabilele din memorie
???
```

Semnele de întrebare
Înseamnă că fiecare
Completează cu ce știe.
Mila Domnului să fie!

```
%Se introduc datele de intrare
%modulul lui Young [N/mm^2]
E=210000;
%se introduc coordonatele nodurilor [mm]
noduri=[1 0 0;2 2000 0;3 4000 0;4 6000 0;5 1000 1000;6 3000 1000;7 5000 1000;];
%ariile barelor (A1 - talpi, A2 - diagonale) [mm^2]
A1=200;
A2=100;
%se introduce matricea Elementelor Finite
%se introduc barele cu nodurile de capăt și aria fiecărei bare
M_EF=[1 1 2 A1;2 2 3 A1;3 3 4 A1;4 5 6 A1;5 6 7 A1;6 1 5 A2;7 5 2 A2;8 2 6 A2;9 6
3 A2;10 3 7 A2;11 7 4 A2;];
%se introduc încărcările concentrate în noduri pe x si y [N]
Pinc=[5 0 -100000;6 0 -100000;7 0 -100000;];
%se introduc deplasări nule în reazeme
nodrez=[1 1 1; 4 0 1;]; %nod 1 - GL blocat, 0 - GL liber
%număr GL pe nod
nrGL_nod=???; % deplasare pe x și deplasare pe y
%număr noduri pe EF
nrnodEF=???;
```

```
    hold on;
end
%titlul figurii
title('Forte axiale [kN]','FontSize',12);
axis equal;

% Sfârșit!
```

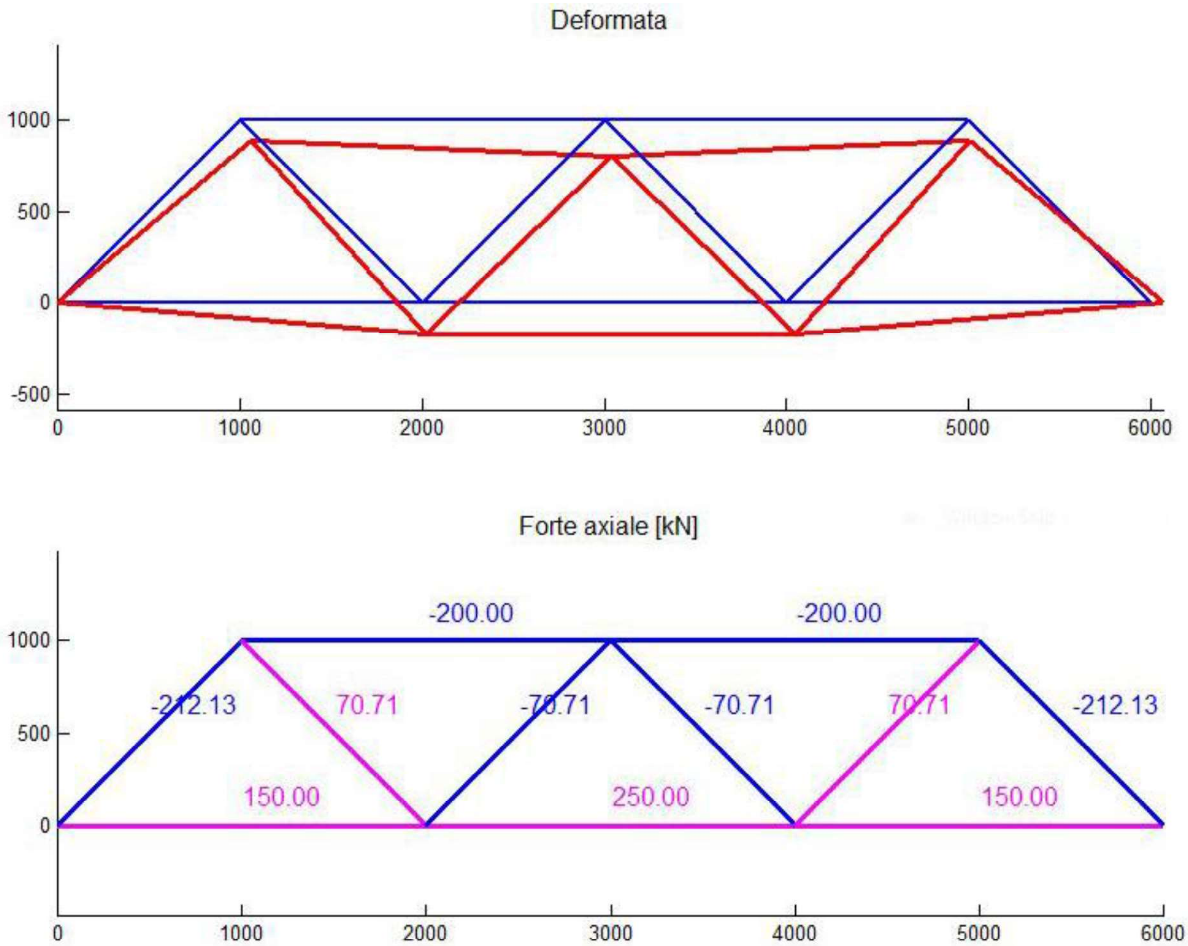


Fig. IV.5: Deformata și forțele axiale în bare

Temă!!! *(este clar că avem ceva cu voi)*

Adaptați aplicația anterioară pentru grinzile cu zăbrele de mai jos (p = 10*kN/m*, ΔT = +30°*C*) și verificați rezultatele utilizând un program de calcul comercial (ex. Sap2000):

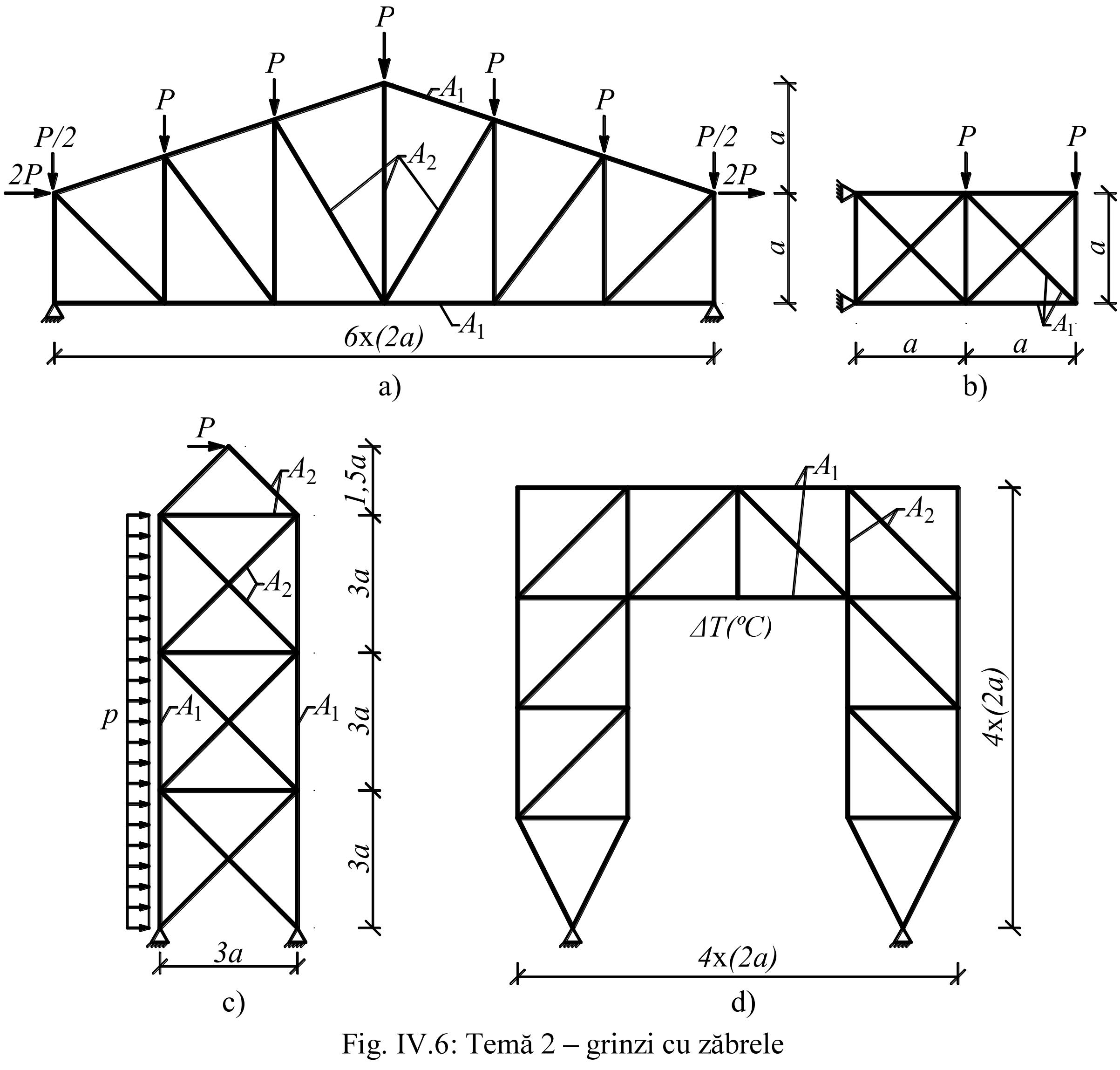


Fig. IV.6: Temă 2 – grinzi cu zăbrele

Obs: La curs s-au prezentat particularitățile încărcării distribuite pe bară și ale acționării prin diferență de temperatură.

Lucrarea V – Cadre plane

V.1. Noțiuni teoretice

Încă o călătorie
Prin superba teorie.

Dacă la grinzile cu zăbrele toate nodurile sunt considerate articulații, iar barele sunt supuse numai la forțe axiale, cadrele (plane sau spațiale) conțin legături continue între bare, considerate (într-o analiză simplificată) noduri rigide, iar barele pot fi supuse la toate eforturile secționale (forțe axiale, momente încovoietoare și de torsiune). În lucrarea de față se prezintă aplicarea MEF numai pentru cadrele plane, analiza având un grad de complexitate mai scăzut, dar formulările pot fi cu ușurință adaptate pentru cadrele spațiale.

Fig. V.1 prezintă un exemplu de cadru plan cu sistemele de coordonate global și local, și discretizarea în elemente finite (barele cadrului).

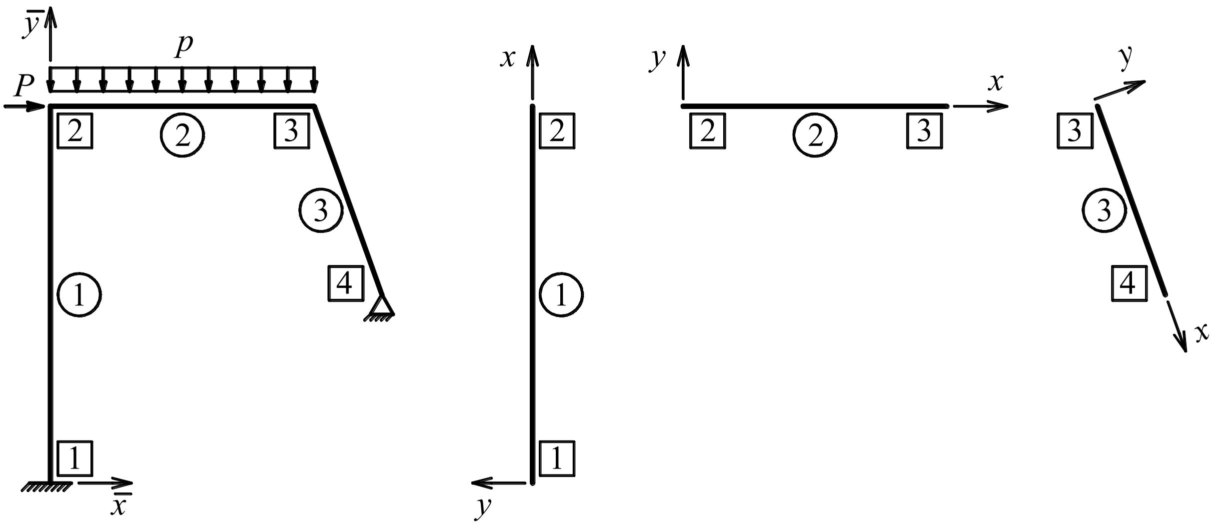


Fig. V.1: Cadru plan

Fig. V.2 prezintă Gradele de Libertate și eforturile considerate în nodurile unui EF.

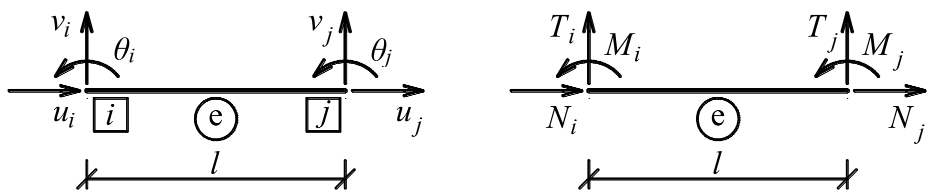


Fig. V.2: Elementul Finit – GL și eforturi nodale

Așadar, pentru cadre plane, vectorul deplasărilor nodale pe EF se scrie:

$$\boldsymbol{U}_e = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j\}^T \tag{III.1}$$

Obs: Față de cazul grinzilor cu zăbrele (Ec. (II.2)) se adaugă la GL rotirea nodului.

Vectorul eforturilor nodale pe EF se scrie:

V.2. Exemplu: cadru plan

Cu adevărat e şef
Cel ce stăpâneşte MEF!

Să se determine deplasările, reacțiunile și eforturile secționale în noduri pentru cadrul plan prezentat în Fig. V.4. Caracteristicile structurii: interval a = 6m, modulul lui Young E = 30000*MPa*, barele au secțiune dreptunghiulară 40x60*cm*, forța concentrată *P* = 40*kN*, forța uniform distribuită *p* = 20*kN/m*.

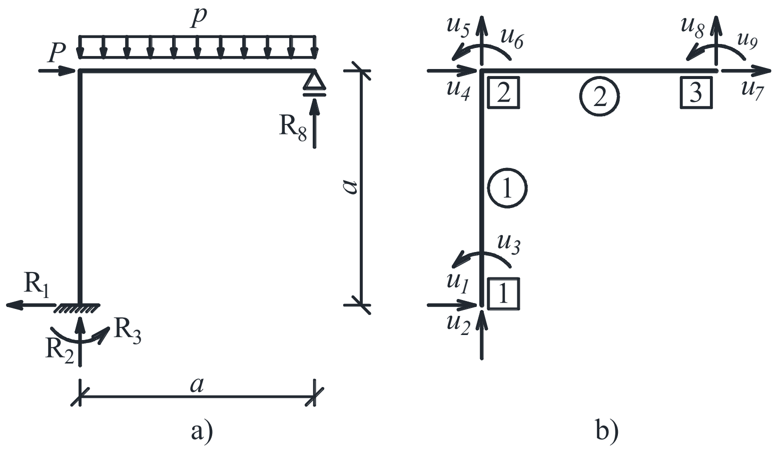


Fig. V.4: a) Cadru plan; b) Grade de Libertate

Datorită încărcării uniform distribuite pe bara 2, se calculează în prealabil încărcările nodale echivalente, prezentate în Fig. V.5 atât pe capăt de bară cât și pe nod (cu sens opus).

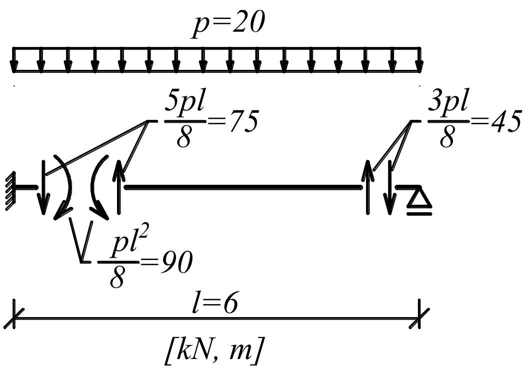


Fig. V.5: Încărcările nodale echivalente pentru bara 2

```
%Se șterg toate variabilele din memorie
???
%Se introduc datele de intrare
%modulul lui Young [kN/m^2]
E=3*10^7;
%aria barelor [m^2]
A=0.24;
%momentul de inerție al barelor [m^4]
```

% afișare rezultate

??? *(pam-param...)*

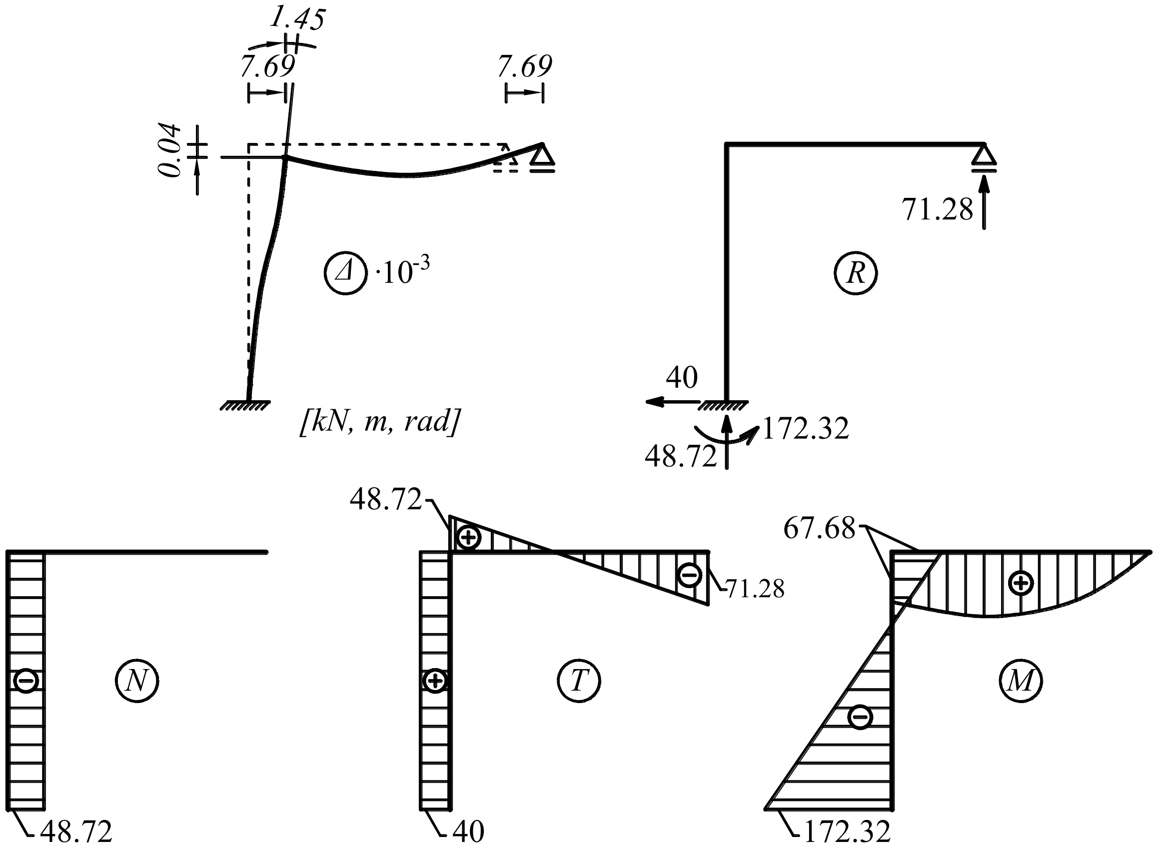
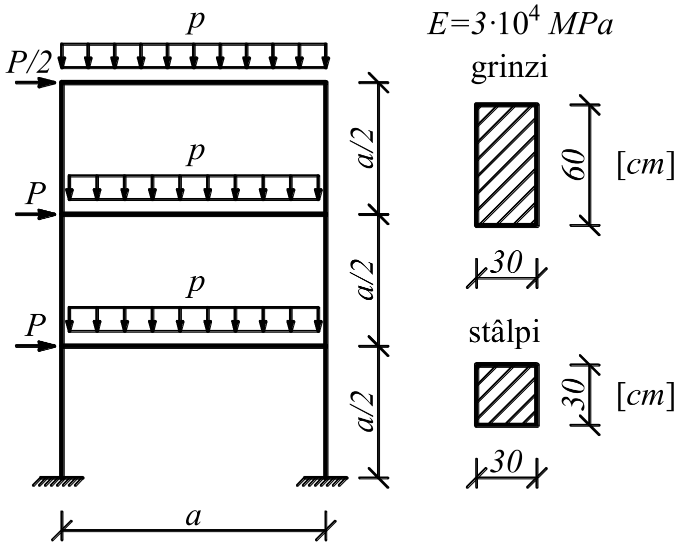


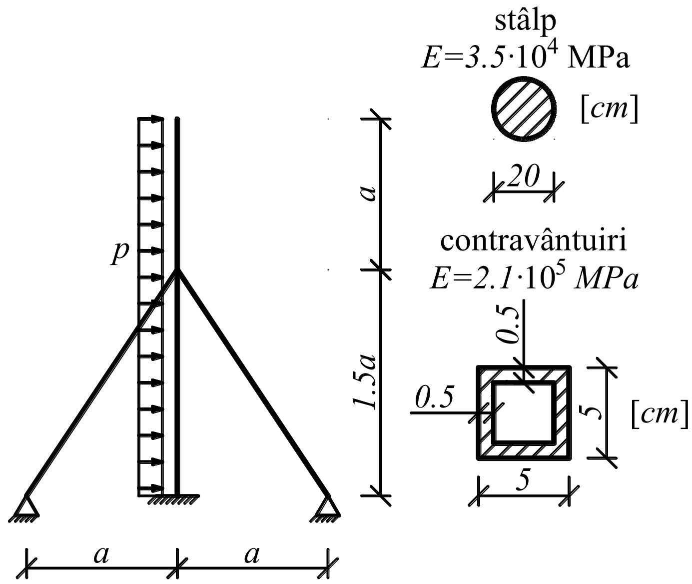
Fig. V.6: Deplasări, reacțiuni și diagrame de eforturi

Temă!!! *(asta e ultima picătură)*

Adaptați aplicația anterioară pentru cadrele de mai jos și verificați rezultatele utilizând un program de calcul comercial *(chiar dacă este desigur inferior aplicației scrise)*:



a)



b)

Lucrarea VI – elemente 2D aflate în starea plană de tensiune

VI.1. Noțiuni teoretice

Mamă te iubesc,
Dar nu ca pe MEF!

În cadrul Teoriei Elasticității s-a studiat această stare specială de solicitare, descrisă pe scurt după cum urmează: un corp deformabil liniar elastic, în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și de legătură, se află în *stare plană de tensiune* dacă tabloul tensiunilor este paralel cu un plan dat și identic în toate planele paralele cu planul respectiv. În această categorie intră elementele de construcții bidimensionale (2D) acționate pe contur de forțe distribuite uniform pe grosime, paralele cu suprafața mediană (vezi Fig. VI.1).

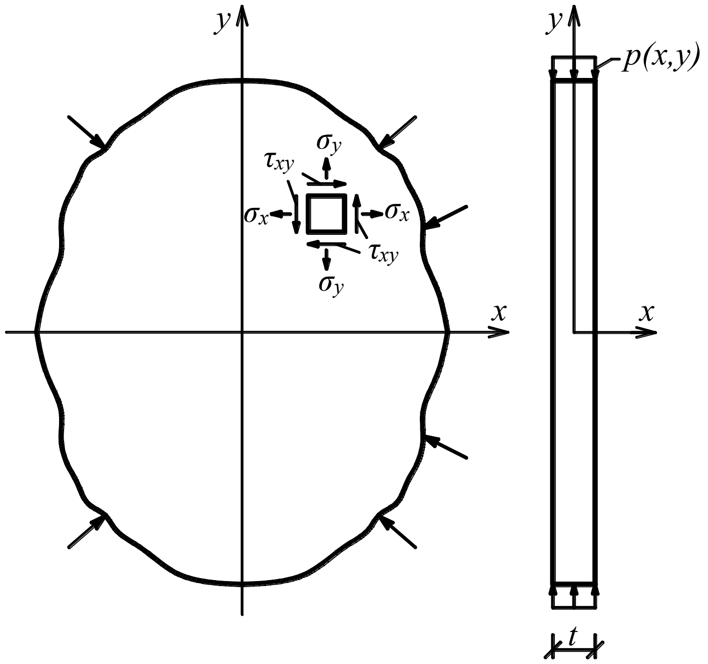


Fig. VI.1: Corp aflat în stare plană de tensiune

Tensorul tensiunilor se reduce la:

$$\boldsymbol{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{IV.1}$$

Relațiile constitutive între tensiuni și deformații specifice (provenite din legea generalizată a lui Hooke) se scriu:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{IV.2}$$

Pentru aplicarea MEF la starea plană de tensiune se alege Elementul Finit dreptunghiular, cu două GL pe nod și anume deplasările *u* și *v* din planul *xOy* (vezi Fig. VI.2). De multe ori este

VI.2. Exemplu: șaibă în consolă

La examen, țineți minte,
Vrednicul student se simte
Binecuvântat să aibă
De analizat o șaibă.

Să se determine deplasările, reacțiunile și tensiunile pentru consola scurtă acționată de o încărcare uniform distribuită p la partea superioară (Fig. VI.3) [5]. Caracteristicile structurii: $L = 1m$, $H = 2L$, modulul lui Young $E = 1000kN/m^2$, coeficientul lui Poison $\mu = 0.3$, forța uniform distribuită $p = 1kN/m$.

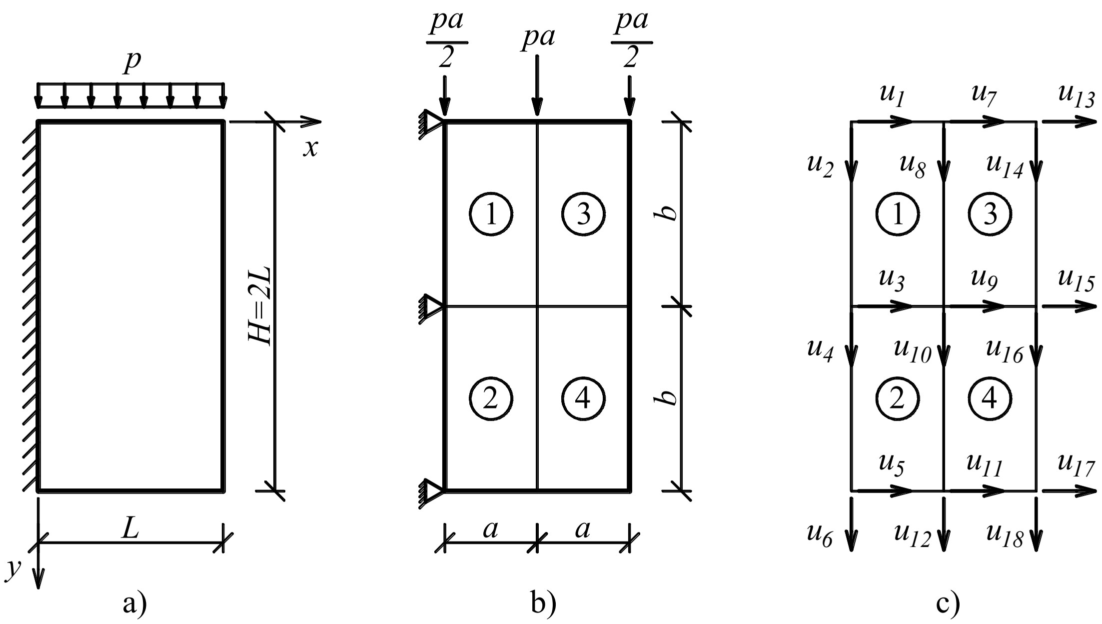


Fig. VI.3: a) Șaibă; b) Discretizare și forțe echivalente; c) Grade de Libertate

Obs: Sistemele de coordonate local și global sunt paralele, în consecință nu mai este necesară utilizarea matricei de rotație $\boldsymbol{R_e}$.

```
%Se șterg toate variabilele din memorie
???

%Se introduc datele de intrare

E=1000;       %modulul lui Young [kN/m^2]
miu=0.3;      %coeficientul lui Poisson
L=1;          %lungime consolă [m]
H=2*L;        %înălțime consolă [m]
t=1;          %grosime consolă [m]
p=1;          %încărcare [kN/m]
nrEFx=2;      %număr EF pe x
nrEFy=2;      %număr EF pe y
nrnodEF=4;    %număr noduri pe EF
nrGL_nod=2;   %număr GL pe nod
```

```
%a patra figură: tau_xy
subplot(2,2,4);
patch('Vertices',varfuri,'Faces',elemente,'FaceVertexCData',tauxy','FaceColor','interp');
title('tau_xy'); set(gca,'YDir','reverse'); axis equal tight;
colorbar('location','eastoutside');

%Sfârșit!

%Epilog: Rulați aplicația anterioară de mai multe ori îndesind de fiecare dată rețeaua de
EF. Comparați rezultatele!
```

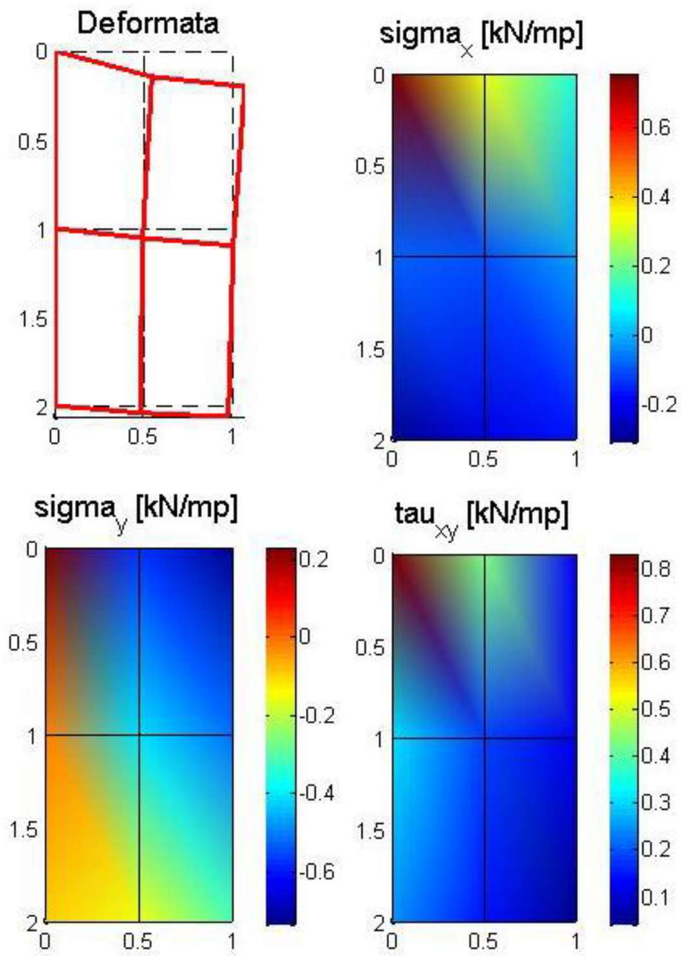


Fig. VI.4: Deformata și distribuția tensiunilor

Temă!!!

...ultima, dar nu fiți triști,
și nu mai protestați în cor,
ne vom lupta să vă mai dăm
vreo 10 la laborator.

Adaptați aplicația anterioară pentru șaibele de mai jos:

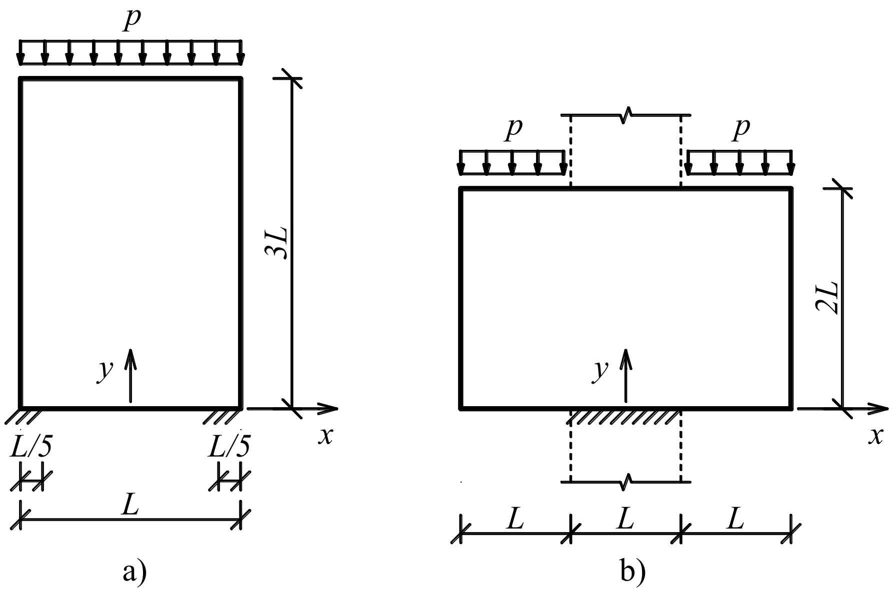


Fig. VI.5: Temă 4 – a) grindă perete; b) console scurte stâlp

Concluzie: Se poate trăi și fără MEF...
dar nu merită.

Bibliografie

1. Bia C., Ille V., Soare M.V., *Rezistența materialelor și Teoria elasticității,* E.D.P. ,1983.
2. Avram C., Bob C., Friedrich R., Stoian V., *Structuri din beton armat – Metoda Elementelor Finite, Teoria Echivalenţelor*, Editura Academiei RSR, 1984.
3. Bănuţ V., Popescu H., *Stabilitatea structurilor elastice*, Editura Academiei RSR, 1975.
4. Bănuţ V., *Calculul neliniar* al *structurilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.
5. Marţian I., *Teoria elasticităţii şi plasticităţii pentru constructori*, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 1999.
6. Panțel E., Bia C., *Metode numerice in proiectare - Metoda Elementelor Finite* - Litografia UTC-N, 1992.
7. Smith I.M., Griffiths D.V., *Programming the finite element method* - John Wiley, 2004.
8. Ziennkievicz O.C.,Taylor R.L., *The finite element method: Ist Basis and Fundamentals* - Butterworth-Heinemann, 2005.
9. Matlab Version 7.1.0246 *Documentation*, The Mathwork Inc., 2005.
10. http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/

Chiar dacă sunteți copleșiți
De-atâta MEF de calitate,
Nu-i cazul să ne mulțumiți.
Spor la-învățat și sănătate!

APPENDIX – Noțiuni introductive în mediul de programare MATLAB

1. Generalități

MATLAB (MATtrix LABoratory) este un limbaj de programare de înaltă performanţă, destinat calculului matematic, ştiinţific şi ingineresc. MATLAB este un produs al companiei americane The Mathworks Inc. şi este utilizat în peste 5000 de universităţi. Versiunea cea mai recentă este R2015b.

În Fig. A1 se prezintă interfața programului MATLAB.

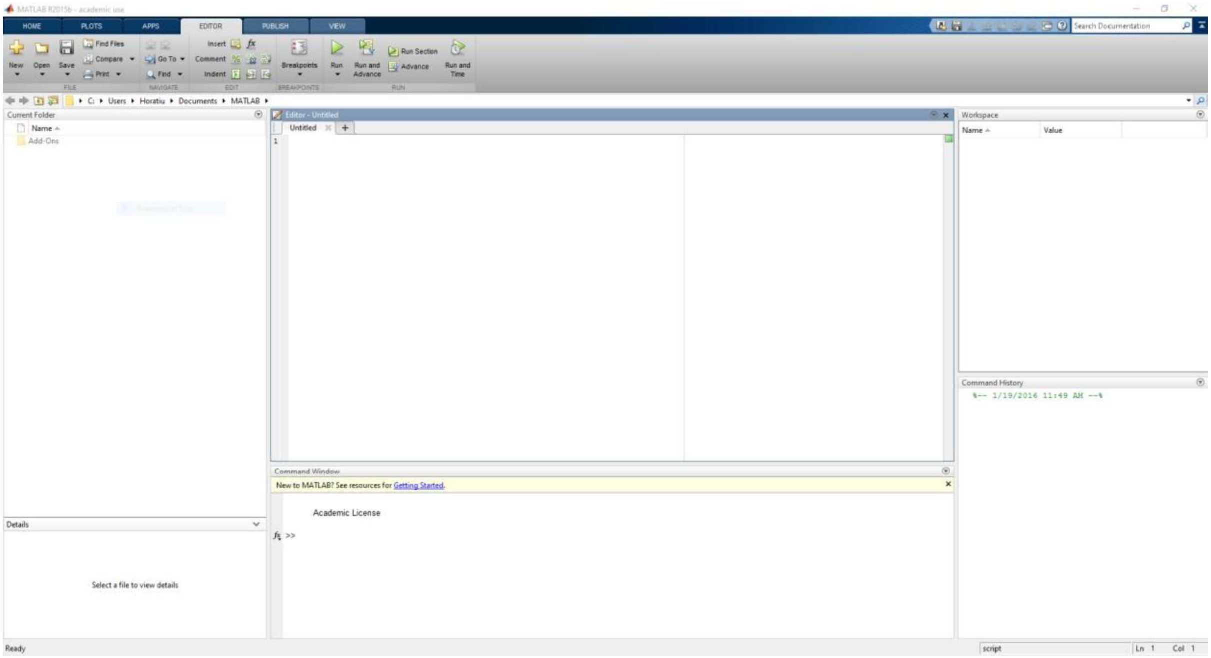


Fig. A1. Interfața MATLAB

Principalele ferestre ale MATLAB-ului sunt:

Current Folder (Directorul de lucru) - pemite afișarea și schimbarea directorului de lucru din sesiunea actuală;

Command Window (Fereastra de comenzi) – permite lansarea comenzilor;

Workspace (Spațiul de lucru) – permite vizualizarea variabilelor utilizate în sesiunea actuală;

Command History (Istoria comenzilor) – permite vizualizarea și relansarea comenzilor utilizate anterior, atât în sesiunea actuală cât și în cele anterioare;

Editor – permite crearea și editarea fișierelor Matlab.

2. Variabile

Instrucţiunile MATLAB sunt în general de forma:

variabilă=expresie

sau, simplificat:

expresie

Expresiile pot fi alcătuite din operatori sau alte caractere speciale, din funcţii şi nume de variabilă.

Dacă *expresiei* nu i se specifică în mod explicit un nume de *variabilă*, rezultatul acesteia va fi atribuit *variabilei ans*. În *variabila ans* se memorează valoarea ultimei *expresii* căreia nu i s-a atribuit un nume.

Instrucţiunile se termină în mod obişnuit prin apăsarea tastei enter. Dacă se doreşte executarea instrucţiunii, fără afişarea rezultatului pe ecran, ultimul caracter al acesteia este „ *;* ”.

Numele de variabile şi funcţii au ca prim caracter o literă, urmată de cifre, litere sau caracterul „ _ ”.

MATLAB-ul face distincţie între literele mari şi mici.

Exemple

❖ Să se atribuie variabilei *A*, rezultatul adunării dintre 5 şi 3.

$\gg A = 5 + 3$

$A =$

8

❖ Să se calculeze rezultatul împărţirii dintre 8 şi 10.

$\gg 8/10$

$ans =$

0.8000

3. Matrice și Vectori

3.1. Definirea matricelor

Elementul de bază cu care lucrează MATLAB-ul este matricea. Scalarii sunt matrice de dimensiune 1x1, iar vectorii sunt matrice de dimensiune 1x*n* sau *n*x1. Elementele unei matrice pot fi numere reale, complexe sau orice expresie MATLAB.

Definirea matricelor se face prin una dintre următoarele metode:

- introducerea explicită a elementelor acestora;
- generarea prin instrucţiuni şi funcţii;
- crearea de fişiere MATLAB (extensie mat.);
- încărcarea din fişiere de date externe.

La introducerea unei matrice ca o listă de elemente, trebuie respectate următoarele convenţii:

- elementele unei matrice sunt cuprinse între paranteze drepte „ [ ] ”;
- elementele unei linii se separă prin spaţii sau virgule;
- liniile se separă prin semnul punct şi virgulă „ ; ”.

$\gg B = sort(A)$

$B =$

$-4 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 7$

❖ Să se sorteze în ordine crescătoare elementele fiecărei coloane (matricea B) a matricei $A = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 80 \\ 2 & 135 & 32 \\ 18 & 76 & 29 \end{bmatrix}$. Să se sorteze în ordine descrescătoare elementele fiecărei coloane (matricea $B1$) a matricei A. Să se sorteze în ordine crescătoare elementele fiecărei linii (matricea $B2$) a matricei A.

$\gg A = [15 \quad 10 \quad 80; \quad 2 \quad 135 \quad 32; \quad 18 \quad 76 \quad 29];$

$\gg B = sort(A)$

$B =$

$$\begin{matrix} 2 & 10 & 29 \\ 15 & 76 & 32 \\ 18 & 135 & 80 \end{matrix}$$

$\gg B1 = sort(A,'descend')$

$B1 =$

$$\begin{matrix} 18 & 135 & 80 \\ 15 & 76 & 32 \\ 2 & 10 & 29 \end{matrix}$$

$\gg B2 = sort(A, 2)$

$B2 =$

$$\begin{matrix} 2 & 10 & 29 \\ 15 & 32 & 76 \\ 18 & 80 & 135 \end{matrix}$$

4. Rezolvarea Sistemelor de Ecuaţii Liniare

Un sistem de n ecuaţii liniare cu *n* necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

poate fi scris sub formă matriceală:

$A \cdot X = B$

unde:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - matricea coeficienţilor necunoscutelor;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ - matricea necunoscutelor;

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ - matricea termenilor liberi.

Soluţiile sistemului pot fi obţinute în MATLAB utilizând una din instrucţiunile:

$X = B/A$ – împărţire la dreapta

$X = A\backslash B$ – împărţire la stânga

$X = inv(A) \cdot B$

Împărţirea la stânga este efectuată de MATLAB mai rapid decât împărţirea la dreapta.

Exemplu

❖ Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ x - 6y = 4 \end{cases}$$

Se scrie sistemul sub formă matriceală:

$A \cdot X = B$

unde:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\gg A = [4 \quad -3; \quad 1 \quad -6];$

$\gg B = [9; \quad 4];$

$\gg X = A\backslash B$

$X =$

$$\begin{matrix} 2.0000 \\ -0.3333 \end{matrix}$$

5. Funcţii Matematice Uzuale

<u>Funcţii pentru ridicarea la putere, extragerea radicalului, calculul logaritmului şi al exponenţialei</u>

$$\begin{matrix} 0 & 1.0472 \\ 0.5236 & 1.5708 \end{matrix}$$

$\gg B = acosd(X)$

$B =$

$$\begin{matrix} 90 & 30 \\ 60 & 0 \end{matrix}$$

$\gg B1 = acos(X)$

$B =$

$$\begin{matrix} 1.5708 & 0.5236 \\ 1.0472 & 0 \end{matrix}$$

$\gg C = atand(X)$

$C =$

$$\begin{matrix} 0 & 40.8934 \\ 26.5651 & 45.0000 \end{matrix}$$

$\gg C1 = atan(X)$

$C1 =$

$$\begin{matrix} 0 & 0.7137 \\ 0.4636 & 0.7854 \end{matrix}$$

$\gg D = acotd(X)$

$D =$

$$\begin{matrix} 90 & 49.1066 \\ 63.4349 & 45.0000 \end{matrix}$$

$\gg D1 = acot(X)$

$D1 =$

$$\begin{matrix} 1.5708 & 0.8571 \\ 1.1071 & 0.7854 \end{matrix}$$

6. Reprezentări Grafice

Pentru a deschide o fereastră grafică se utilizează funcţia *figure*, care se apelează cu una dintre sintaxele:

figure – deschide o nouă fereastră grafică, cu proprietăţi prestabilite, care devine fereastra curentă. Titlul figurii create este un număr întreg, cunoscut sub numele de identificator al figurii.

figure(*h*) – în cazul în care fereastra grafică cu identificatorul h există, ea devine fereastra curentă. Altfel, se creează fereastra grafică cu identificatorul h, unde h trebuie să fie un număr întreg.

h = figure – deschide o nouă fereastră grafică şi returnează identificatorul acesteia.

Funcţia *clf* şterge toate elementele grafice din figura curentă. Se apelează cu una dintre sintaxele:

clf – șterge toate elementele grafice ale căror identificatori nu sunt ascunși

clf (*'reset'*) – șterge elementele grafice indiferent de starea identficatorilor

Funcţia *close* se utilizează pentru a închide o fereastră grafică. Se apelează cu una dintre sintaxele:

close – închide fereastra grafică curentă

close(h) – închide fereastra grafică cu identificatorul *h*

close all – închide toate ferestrele grafice

Pentru reprezentări grafice în coordonate carteziene se utilizează funcţia *plot*, care se apelează cu una dintre sintaxele:

plot(X,Y)- reprezintă grafic datele din *Y* în funcţie de valorile corespunzătoare din *X*.

Dacă *X* şi *Y* sunt vectori, aceştia trebuie să aibă aceeaşi lungime. În acest caz, se reprezintă grafic *Y* în funcţie de *X*.

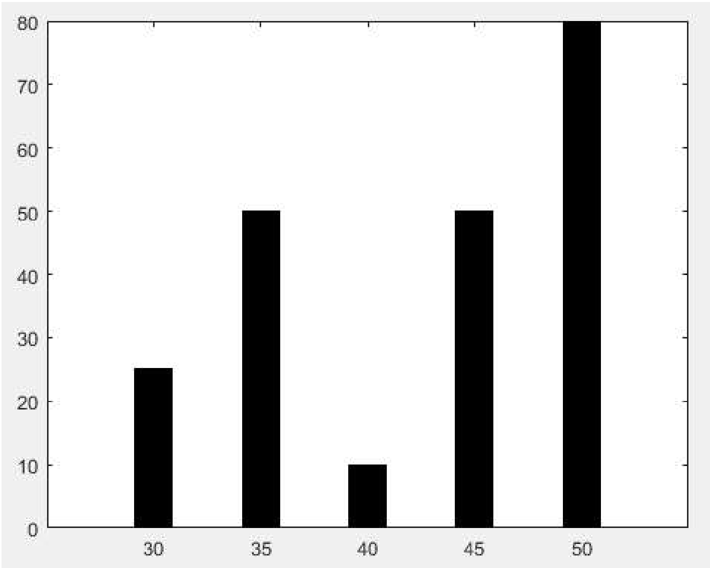
❖ Să se reprezinte grafic cu bare elementele aceluiași vector y, în pozițiile indicate de vectorul $x = [30 \quad 35 \quad 40 \quad 45 \quad 50]$. Fiecare bară se va reprezenta cu o lățime egală cu 35% din cea prestabilită.

$\gg\ x = 30{:}5{:}50$

$\gg y = [25 \quad 50 \quad 10 \quad 50 \quad 80];$

$\gg figure$

$\gg bar(x, y, 0.35)$



Pentru desenarea liniilor se poate folosi funcţia line, care se apelează cu sintaxa:

line(*X, Y)* – desenează liniile definite de vectorii *X* şi *Y* în sistemul de axe curent. Dacă *X* şi *Y* sunt matrice de aceeaşi dimensiune, se trasează câte o linie pentru fiecare coloană.

Exemplu

❖ Să se reprezinte grafic triunghiul care are vârfurile de coordonate (4,8), (2,3) și (7,1).

$\gg line([4 \quad 2 \quad 7 \quad 4], [8 \quad 3 \quad 1 \quad 8]);$

A treia lege a lui GREER

Un program pentru calculator face ceea ce îi spui tu să facă, iar nu ceea ce vrei tu să facă.