

1 Proiectarea filtrelor numerice

1.1 Echivalentul numeric al filtrelor analogice

Procedura de obținere a unei implementări numerice (digitale) a unui filtru analogic constă în următoarele etape:

- Obținerea reprezentării în spațiul stărilor pentru circuitul analogic;
- Calculul funcției de transfer prin aplicarea transformatei Laplace asupra ecuației matriceale de stare;
- Obținerea echivalentului numeric prin discretizarea funcției de transfer;
- Obținerea relației recurente prin aplicarea transformatei Z inverse;
- Implementarea relației recurente într-un mediu de programare (bazat pe C++) adiacent plăcii de dezvoltare utilizate

Exemplu

Se consideră următorul circuit cu componente analogice, din Figura 1 :



Figura 1 Realizarea practică a circuitului analogic

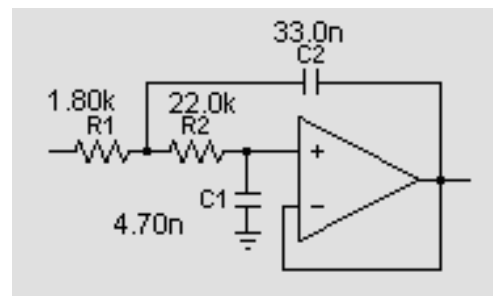


Figura 2 Structura teoretică a circuitului

Reprezentarea în spațiul stărilor se obține eliminând curenții din expresiile obținute după aplicarea legilor lui Kirchhoff pentru fiecare ochi, respectiv nod de rețea:

$$R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) + x_1(t) = u(t) \text{ (ochiul 1)}$$

$$R_2 i_2(t) = x_2(t) \text{ (ochiul 2)}$$

$$x_1(t) = y(t) \text{ (ochiul 3)}$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \text{ (nodul 1)}$$

Realizarea de stare obținută este de forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + bu &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = cx + du &= (0 \quad 1)x + (0)u \end{aligned}$$

Din realizarea obținută, (A,b,c,d) se obține funcția de transfer:

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b + d = \frac{\frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{R_2 C_2}}{s^2 + \frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) s + \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{R_2 C_2}}$$

Pentru stabilirea tipului filtrului (banda de trecere) se poate trasa diagrama Bode în mediul de simulare Matlab. În Figura 3 se observă caracteristica de modul și de fază din care se citește frecvența de tăiere $\omega_t = 2kHz$, cu banda de trecere $BW=(0, \omega_t]$.

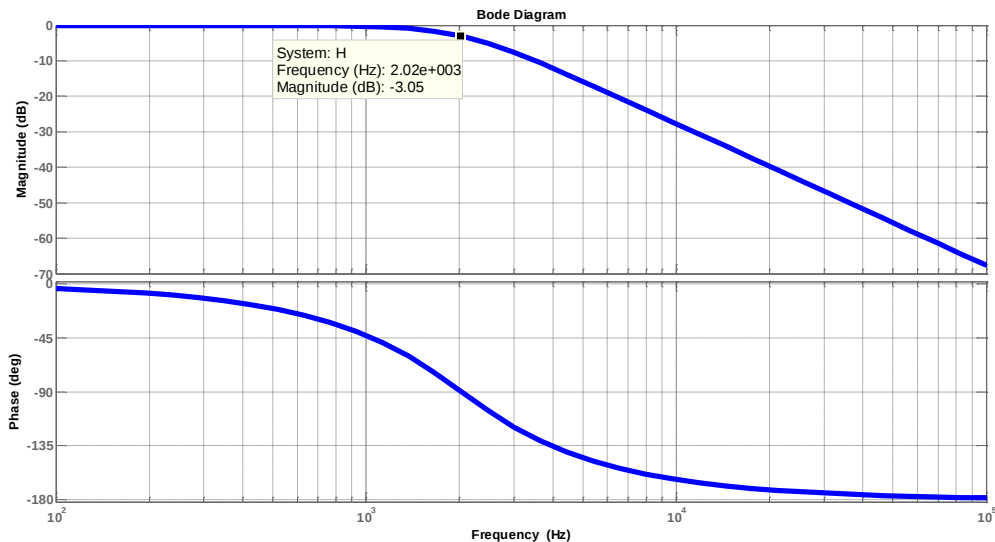


Figura 3 Diagrama Bode a circuitului din Fig. 2

Zona de interes practică a frecvențelor este de la 100Hz la 10kHz.

Funcția de transfer obținută după înlocuirea parametrilor este de forma:

$$H(s) = \frac{1.628144761607044 * 10^8}{s^2 + 0.000182124273033 * 10^8 s + 1.628144761607044 * 10^8}$$

Modul de discretizare trebuie să țină cont de:

- Frecvența semnalelor de intrare
- Banda de trecere a circuitului
- Frecvența de lucru a procesorului numeric de semnal utilizat (16MHz)
- Numărul de operații alocate pentru execuție pe durata unui eșantion

Utilizând mediul Matlab, după discretizare cu funcția `c2d` prin metoda trapezelor (`tustin`) și perioadă de eșantionare $T_e=1/f_e$, cu frecvența de eșantionare $f_e=32Khz$, echivalentul numeric rezultă de forma:

$$H(z) = \frac{0.030015150303194 z^2 + 0.060030300606389 z + 0.030015150303194}{z^2 - 1.450180075534062 z + 0.570240676746840} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Relația recurentă se obține aplicând transformata Z inversă asupra relației:

$$b_2 U(z) + b_1 U(z)z^{-1} + b_0 U(z)z^{-2} = Y(z) + a_1 Y(z)z^{-1} + a_0 Y(z)z^{-2} \quad | \mathcal{Z}^{-1}\{\}$$

Rearanjând termenii pentru a evidenția valoarea curentă a ieșirii y_k în funcție de valorile trecute ale ieșirii ($y_{k-1}, \dots$), valorile trecute și/sau prezente ale intrării ($u_k, u_{k-1}, \dots$) și coeficienții echivalentului numeric ($b_0, b_1, \dots$), formula recurentă rezultă de forma:

$$y_k = b_2 u_k + b_1 u_{k-1} + b_0 u_{k-2} - a_1 y_{k-1} - a_0 y_{k-2}$$

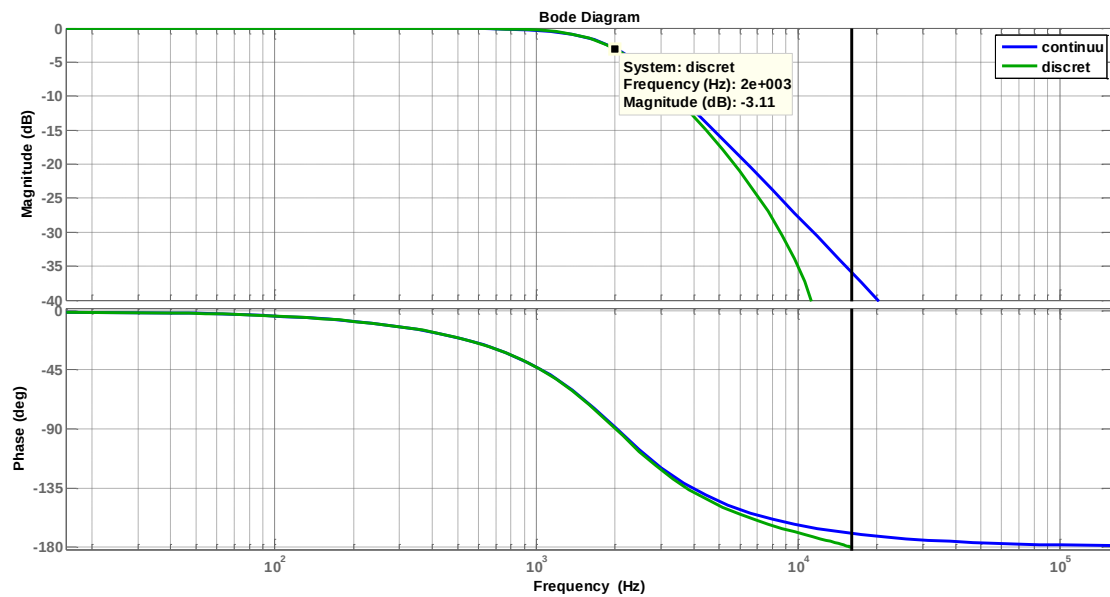


Figura 4 Diagrama Bode a echivalentului discret

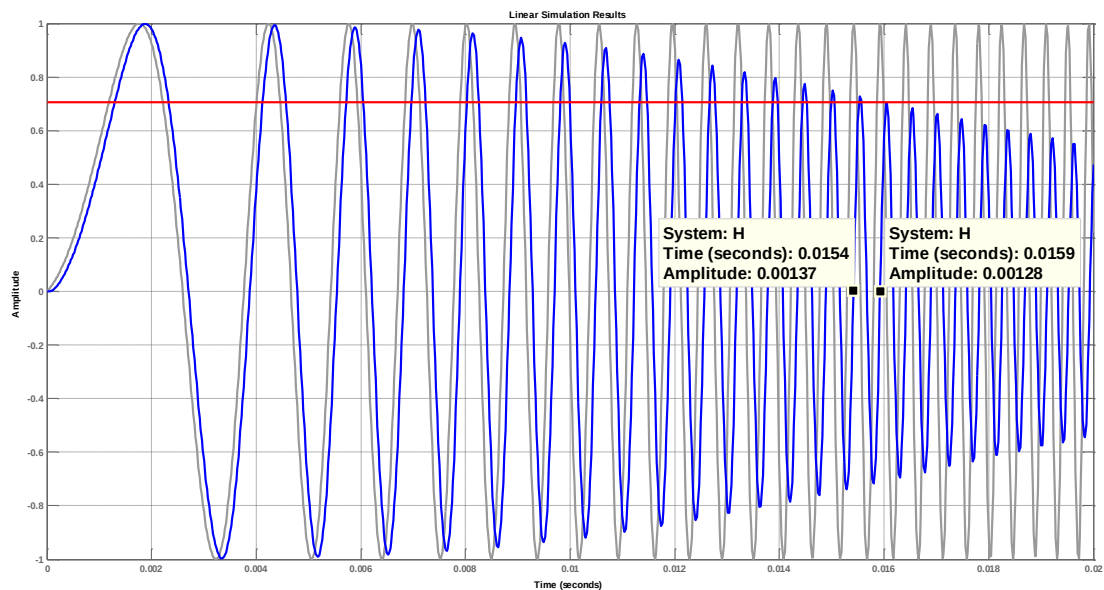
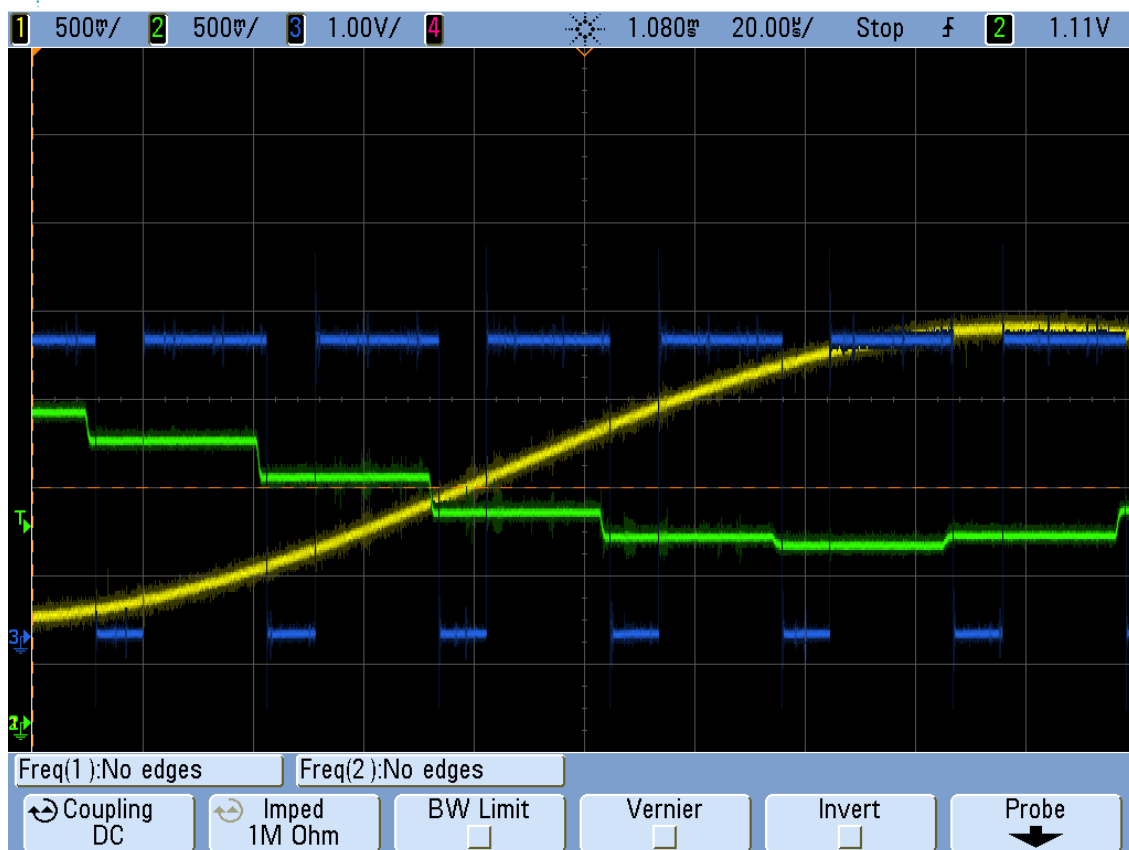
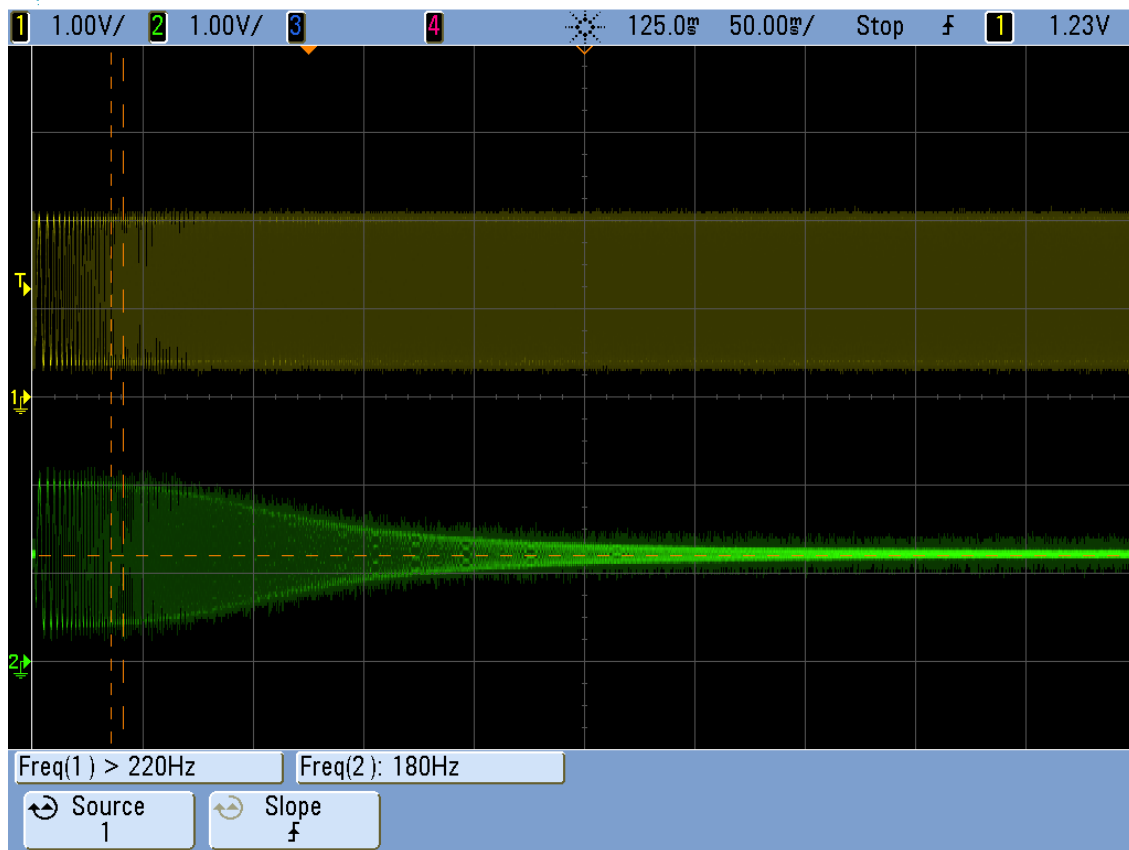


Figura 5 Răspunsul circuitului la semnal VCO (Voltage Control Oscillator)

Din Figura 5 rezultă frecvența de tăiere $f_t = 1/(0.0159 - 0.0154) = 1/(50\text{ms}) = 2\text{kHz}$.



Cerințe

Selecția unui kit de dezvoltare bazat pe DSP (Digital Signal Processor) în care să se precizeze:

- Firma producătoare
- Performanțele procesorului
- Perifericele procesorului
 - Performanțele perifericelor
- Prețul de achiziție
- Mediul de dezvoltare a aplicațiilor pentru procesorul selectat [integrated development environment (IDE)]