

Megjegyzés a villamos gép mágneses terét leíró kifejezéshez

Comment on the Expression Describing the Magnetic Field of the Electrical Machine

Dr. Tóth Ferenc¹, Dr. Szabó Loránd²

¹ Miskolci Egyetem, Magyarország

² Kolozsvári Műszaki Egyetem, Románia

Abstract: *The application of the finite element method is more and more popular in analyzing the physical processes (sizing, fault detection, EMC, etc.) of the electrical machines. In the community of specialists it is popular to look for the solution of the Maxwell equation for such field computation within a given boundary condition. In the case of the numerical calculation of the space computation instead of the field described by the \mathbf{E} and \mathbf{B} vectors secondary variables are applied to express the relations. In the paper we would like to comment on the so called Ampér's law.*

Összefoglaló: *A végelem módszer egyre szélesebb körben alkalmazzák a villamos gépekben végbemenő fizikai folyamatok elemzésére (méretezés, hibajelenségek kimutatása, EMC, stb.). Szakmai körökben az is közismert, hogy ilyen térszámításoknál rendszerint az Maxwell-egyenletek megoldását keresik adott peremfeltétel esetén. A térszámítások numerikus számításánál a nem közvetlenül a teret leíró \mathbf{E} és \mathbf{B} vektorokkal dolgoznak, hanem ún. segédváltozókkal fejezik ki az összefüggéseket. A következőkben az ún. Amper-törvény felírásához fűznénk észrevételeket.*

1. ALAPÖSSZEFÜGGÉSEK

Ismeret, hogy az elektromágneses teret (mezőt) öt vektor- és egy skalár mennyiséggel lehet jellemezni, ezek a következők:

- a villamos (elektromos) térerősség: \mathbf{E} [V/m];
- a mágneses térerősség: \mathbf{H} [A/m];
- a villamos (elektromos) fluxus sűrűség: \mathbf{D} [Cb/m²]
- a mágneses indukció: \mathbf{B} [T]
- az áramsűrűség: \mathbf{J} [A/m²]
- a villamos (elektromos) töltés: ρ [Cb/m³]

A fentiekben felsorolt öt vektor közötti kapcsolat, a három ún. anyagállandóval jellemezhető lineárisnak tekinthető viszonyok esetén:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

ahol ε [F/m] a permittivitás, μ [H/m] a permeabilitás, σ [S/m] a fajlagos villamos vezetés.

A fenti mennyiségekkel az elektromágneses teret leíró egyenleteket Maxwell foglalta rendszerbe, mely egyenletek differenciális alakja az alábbi:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad (5)$$

A mágneses tér számításánál a mágneses indukció vektort szokás a mágneses vektorpotenciállal kifejezni, mint ismert

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} . \quad (6)$$

A (6)-nak a (2)-be való helyettesítése, valamint rendezés után kapjuk, hogy

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0 , \quad (7)$$

amiből következik, hogy a villamos térerősség és az \mathbf{A} vektorpotenciál időszerinti deriváltjának összege kifejezhető egy φ skalárpotenciál gradienseként:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi , \quad (8a)$$

vagy \mathbf{E} -re rendezve:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} . \quad (8b)$$

Amennyiben a vizsgált objektum (vezető) \mathbf{v} sebességgel mozog egy \mathbf{B} indukciójú mágneses térben, akkor az objektummal együttmozgó koordináta rendszerben a (8b) egyenlet módosított formája:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (8c)$$

Ezek után rátérhetünk a (3) egyenlet részletesebb elemzéséhez. Az (1), (6) és (8b) figyelembe vételével az un. Amper-törvény az alábbi módon írható elő:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = -\sigma\left(\operatorname{grad}\varphi + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) \quad (9)$$

Megállapítható, hogy a (9) alatt szereplő egyenletben két ismeretlen: az \mathbf{A} vektorpotenciál és a φ skalárpotenciál szerepel, ezért szükség van egy másik egyenlet felírására is. Tekintsük most a primer rész (induktor) vezetőjében folyó áram értékét, amely az (1) és a (8b) segítségével az alábbi módon írható fel:

$$I_1 = \int_S \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S -\sigma[\operatorname{grad}\varphi + (\partial\mathbf{A}/\partial t)] \cdot \mathbf{n} dS . \quad (10)$$

Vizsgáljuk meg először a stacioner állapotot, ekkor a $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$:

$$I_1 = \sigma \int_{S_1} (-\operatorname{grad}\varphi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (11)$$

Továbbá stacioner állapotra érvényes, hogy $\operatorname{div}\mathbf{J}_1 = 0$, azaz írható, hogy:

$$\operatorname{div}\sigma(-\operatorname{grad}\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0 \quad (12)$$

A (12) egyenletnél a Coulomb mérték választással ($\text{div } \mathbf{A} = 0$) élve, kapjuk az un Laplace-egyenletet:

$$\text{div} \cdot \mathbf{grad} \varphi = \Delta \varphi = 0. \quad (13)$$

vagyis a φ második deriváltja 0, akkor az első derivált konstans. Kétdimenziós (x - y síkú) esetet tekintve, ha egy tömör homogén Δl hosszúságú vezetóre u feszültséget kapcsoltunk, amiből is $E_u = u / \Delta l$, vagyis $\mathbf{grad} \varphi = (-u / \Delta l) \cdot \mathbf{e}_z$.

Tehát a (11)-ben szereplő $\mathbf{grad} \varphi$ kifejezhető a vezetóre kapcsolt feszültséggel, és így a (11) egyenlet:

$$I_1 = \sigma \int_{S_1} \frac{u}{l \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\sigma \cdot u}{l} \cdot S_1 = \sigma \cdot (-\mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} S_1 \quad (14)$$

A (11) és (14) összehasonlításával belátható, hogy:

$$\int_{S_1} (-\mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} dS = S_1 (-\mathbf{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} \quad (15)$$

A (15) eredményét a (10)-be helyettesítve, rendezés után kapjuk:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{I_1}{S_1 \cdot \mathbf{n}} = -\sigma \cdot \mathbf{grad} \varphi - \frac{\sigma}{S_1} \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (16)$$

Meg kell említenünk, hogy a (16) egyenlet eredménye nagyon kedvező. Egyrészt a (16)-ban szereplő I_1 / S_1 érték gyakorlati tapasztalatok alapján felvehető (tervezési) érték. A vezeték túlmelegedésének elkerülése céljából előírják a megengedhető áramsűrűség értéket, pl. rézvezetóre ez az érték: kb. $2 \div 6 \text{ A/mm}^2$. Réz vezetónél $\sigma_{Cu} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ -rel számolva, (a megengedhető áramsűrűséget figyelembe véve) ez az érték (villamos térerősség) kb. $0,035 \div 0,105 \text{ V/m}$ adódik. Ez azt jelenti, hogy a rézvezető 1m hosszú szakaszára kb. $U = 35 \div 105 \text{ mV}$ kapcsolható, anélkül, hogy az túlmelegedne. Másrészt a (16)-ból $-\sigma \cdot \mathbf{grad} \varphi$ -t kifejezve és a (9)-be helyettesítve:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_1 + \sigma \left[-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{1}{S_1} \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \right] \quad (17)$$

A forrás-áramsűrűség fogalmát használó irodalmak a (9) alatti primer részre vonatkozó Ampert-törvény az alábbi egyenlettel adják meg:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s \quad (18)$$

ahol, \mathbf{J}_s az un. forrás-áramsűrűség, (ennek megadásával írják elő a mágneses teret gerjesztő áramsűrűséget).

A (17) és a (18) egyenleteket összehasonlítva, a két egyenlet között eltérés mutatkozik. A (17) és a (18) egyenletek jobboldalai egyenlők:

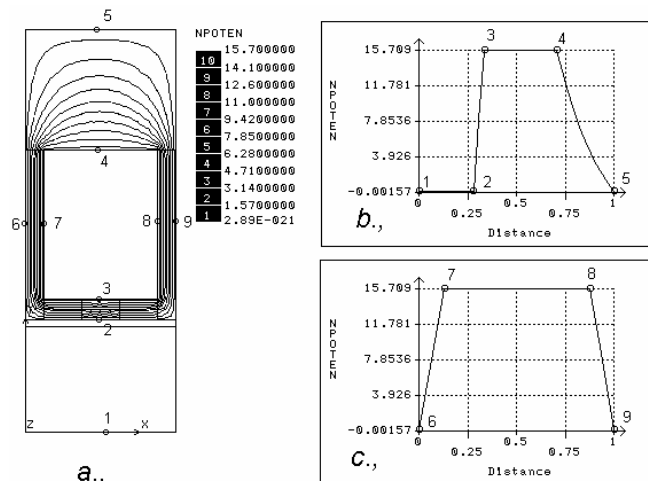
- ha a $(\partial A / \partial t) = 0$ (stacionárius mágneses tér);
- ha a (17) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés zárójelben lévő különbsége nulla.

- Ha $(\partial A/\partial t)=0$, akkor a (18)-ben szereplő „forrásáram sűrűségnek” a (17) a \mathbf{J}_1 megengedhető áramsűrűség felel meg.
- Ha $(\partial A/\partial t)\neq 0$, akkor a (17) egyenlet jobb oldalán álló kifejezés zárójelben lévő különbsége akkor lehet nulla, ha a felületi-integrál mögött lévő - kétdimenziós (x - y síkú) esetet tekintve- $\mathbf{A}(x,y,t)$ vektorpotenciál értéke, a vezetõben x és az y irányt tekintve állandó, mivel a (17) egyenletben szereplő integrál kifejezésének részletezése a következõ:

$$\frac{1}{S_1} \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{S_1} \frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{A} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (19)$$

2. SZÁMÍTOTT EREDMÉNYEK

A következõkben ennek a kitételnek a számított háttérét vizsgáljuk meg, kétdimenziós esetet tekintve. Az $\mathbf{A}(x,y,t)$ vektorpotenciál x - y tengelyek irányában történõ változás meghatározására, COSMOS/M véges-elem program alkalmazásával volt lehetõségünk. Négy esetet vizsgálunk. Az elsõ esetben az áramot szállító vezetõ egy zárt horonyban nyert elhelyezést. A vezetõt vas fogja körül, amelynek a külsõ szélén a vektorpotenciál értékét nullának vettük fel (Dirichlet peremfeltétel). A horonnyal szemben egy 0,6 mm-es légrés közbeiktatásával tömör vasat képzelünk el (1. ábra). A horonyban lévõ vezetõ áramsűrűségét 2 A/mm^2 -re választottuk. A forrásáram helyén és a vasban a villamos vezetõképesség $\sigma = 0$.

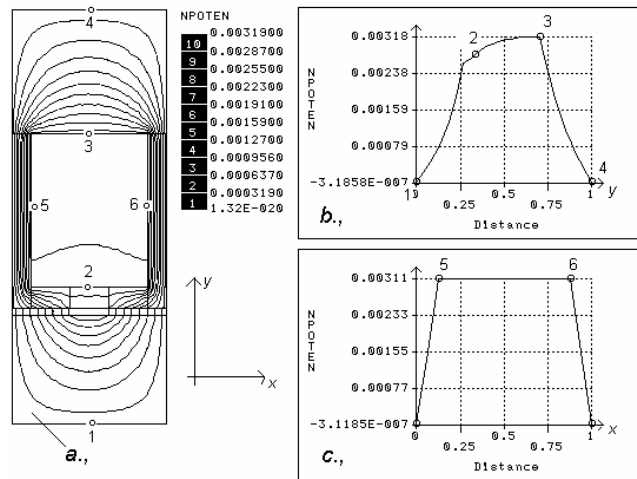


1. ábra

Az 1a. ábrán látható a program által kiszámított vektorpotenciál csúcértékének x - y irányú változása.

Az 1b. ábra mutatja a vektorpotenciál értékének y -irányú változását a vezetõben. Az 1c. ábra mutatja a vektorpotenciál értékének x -irányú változását a vezetõben. Az 1b és c. ábrákon látható eredmények alapján megállapítható, hogy a vektorpotenciál a vezetõben mind y -irányban (3 és 4 pontok között) és ugyancsak az x irányú változást tekintve állandó (7-8 pontok között). Mivel a (17) szögletes zárójelben lévő integrál értéke az integrálás után $-(\partial \mathbf{A}/\partial t)$ és így a zárójelben lévő összeg értéke nulla, ezért a (17) és (18) egyenlet jobboldala egymással egyenérték, ha a (18)-ban szereplő „forrásáram sűrűségnek” a (17) a \mathbf{J}_1 megengedhető áramsűrűség felel meg.

A 2. ábrán a 1. ábrán látható elrendezésnél megismert adatokkal futattuk a programot, de a vizsgált vezetõt most egy félig zárt horonyban képzeljük el.

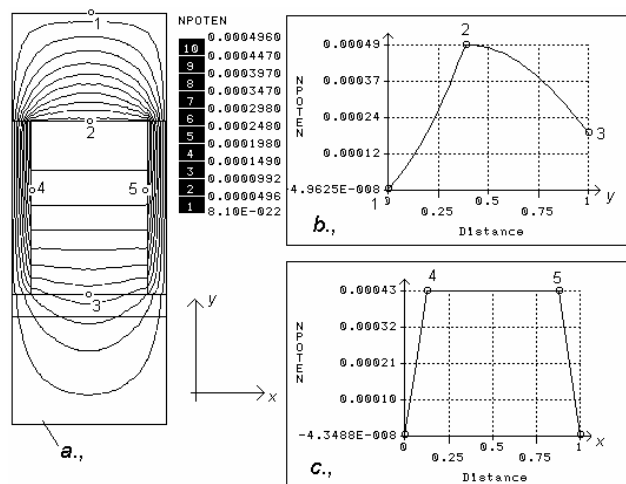


2. ábra.

Az 2a. ábrán látható a program által kiszámított vektorpotenciál csúcsértékének $x - y$ irányú változása. Az 2b. ábra mutatja a vektorpotenciál értékének y -irányú változását a vezetőben. Az 2c. ábra mutatja a vektorpotenciál értékének x -irányú változását a vezetőben. Az 2b és c. ábrákon látható eredmények alapján megállapítható, hogy a vektorpotenciál a vezetőben y -irányban kis értékkel változik meg (2-3 között), míg az x irányú változást tekintve állandó (5-6 pontok között). Amennyiben a 2-3 pontok közötti kismértékű változástól eltekinthetünk, akkor azt mondhatjuk, hogy a (17) és (18) egyenlet egymással egyenértékűnek tekinthető, ha továbbra is a (18)-ban szereplő \mathbf{J}_s -nek, a (17) a \mathbf{J}_1 megengedhető áramsűrűség felel meg.

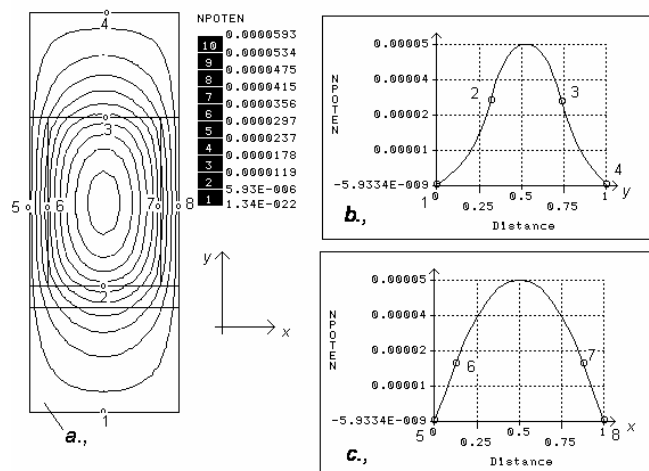
A 3. ábrán a 1. ábrán látható elrendezésnél megismert adatokkal futattuk a programot, de a vizsgált vezetőt most egy nyitott horonyban képzeljük el. A nyitott horonyban lévő vezetőt vas fogja körül, amelynek a külső szélén a vektorpotenciál értékét nullának vettük fel.

A horonnyal szemben levegőt képeltünk el. Az 3b. ábrán ábrázolt függvényből megállapítható, hogy ebben az esetben a vektorpotenciál y -irányú változásától már nem tekinthetünk el (2-3 pontok között), mert a változás mértéke nagyobb, mint 50%. A vektorpotenciál x -irányú változása a vezetőben ebben az esetben is állandónak tekinthető (4-5 pontok között).



3. ábra

A 4. ábrán egy olyan vezetőknek a vektorpotenciálját határoztuk meg, amelyet levegő vesz körül és az ábra burkoló görbén tekintjük a vektorpotenciált nullának.



4. ábra.

A vezető mérete megegyezik a korábbi horonyban lévő vezető méreteivel. Az $A(x,y,t)$ vektorpotenciál y és x irányú változását tekintve megállapítható, hogy a vezetőben mindkét irányban jelentősen változik a vektorpotenciál értéke, (2-3 pont között a 4b. ábrán és 6-7 pontok között a 4c. ábrán). Az eredmény azt mutatja, hogy a (17) egyenlet jobboldalán a zárójelben lévő értéke semmiképpen sem hanyagolható el!

3. KÖVETKEZTETÉSEK

A cikkben közölt eredmények felhívják a figyelmet arra, hogy a villamos gépek méretezésénél, a végeelem módszer alkalmazása esetén ügyelni kell arra, hogy az „ideálistól” eltérő primer (gerjesztő) tekercs keresztmetszete és a primer horony kialakítása jelentősen befolyásolhatja a számított eredmények pontosságát.

4. IRODALOM

- [1] L.A.Beszszanov: 'Teoreticeszkie osnovi elektrotehniki, Elektromagnitno polja', Viszsaja skola , Moszkva, 1976.
- [2] K.Hameyer and R.Belmans: 'Numerical Modelling and Desing of Electrical Machines and Devices', WITpress, 1999.
- [3] Sheppard J. Salon: 'Finite Element Analysis of Electrical Machines', Kluwer A.P., 1995.
- [4] D.E. Bruszkín, A.E. Zorohovics, V.SZ. Hvosztov: 'Elektricseszkie Masini', Moszkva, Viszsaja Skola,1979.
- [5] Pei-bai-Zhou: 'Numerical Analysis of Electromagnetic Fields', Springer-Verlag., Berlin, 1993.
- [6] Ratnajeevan H. Hoole and P. Ratnamahilan P. Hoole: 'Modern Short Course in Engineering Electromagnetics', Oxford Uni. Press. 1996.
- [7] Silvester P.P. & Ferrari R.L.: 'Finite Elements for Electrical Engineers', Cambridge Uni. Press, 1996.