Erori si incertitudini de măsurare

- Surse:
  - Modele matematice
  - Instrument: proiectare, fabricaţie, …
  - Interacţiune măsurand $\Leftrightarrow$ instrument:
    - (transfer informaţie $\leftrightarrow$ transfer energie)
  - Influenţe externe:
    - temperatura, presiune, …
    - câmpuri electro-magnetice, …

Erori la măsurări individuale - expresii cantitative

- Eroare absolută, ε_a:

$$\varepsilon_a = x_m - x, \quad [X]$$

x_m – valoare măsurată

x – valoare de referinţă

- Eroare absolută maximă, Δx:

$$-\Delta x \le \varepsilon_a \le +\Delta x \qquad x_m - \Delta x \le x \le x_m + \Delta x$$

- Estimaţii:

x_1, x_2-cunoscute

$x_1 \le x \le x_2$

$$\hat{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \Delta\hat{x} = \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

Erori la măsurări individuale - expresii cantitative

- Eroare relativă, ε_r: $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{x} = \frac{x_m - x}{x}, \quad \varepsilon_r \cong \frac{x_m - x}{x_m}$
- Exprimare:
  - Număr, ε_r
  - Procent, [%]: $\varepsilon_r \times 100$
  - Părţi per milion, [ppm]: $\varepsilon_r \times 10^6$
- Clasă de precizie, *c*:

$$c = \frac{\Delta x}{X_c} \cdot 100, \quad [\%]$$

X_c – valoare convenţională:
limita superioară a scalei
domeniul instrumentului
lungimea scalei

Erori la măsurări individuale - expresii cantitative

- Exemplu:
  - Voltmetru analogic:

voltmetru
$U_N = 10 \text{ V}$
$c = \pm 1{,}5\,\%$
$U_m = 7{,}5 \text{ V}$

$$\Delta U = \pm \frac{c \cdot U_N}{100} = \pm \frac{1{,}5 \times 10}{100} = \pm 0{,}15 \text{ V}$$

$$\varepsilon_{r\,\max} = \pm \frac{\Delta U}{U_m} \times 100 = \pm \frac{0{,}15}{7{,}5} \times 100 = \pm 2\,\%$$

Erori la măsurări individuale - expresii cantitative

- Exemplu:
  - Voltmetru digital:

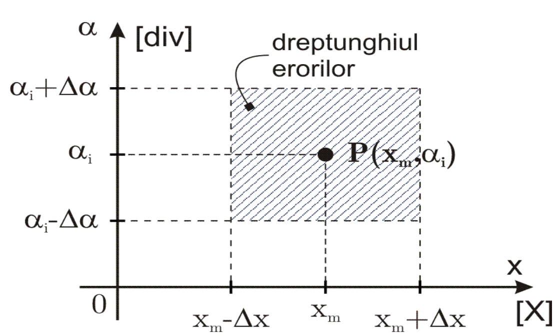
$$\text{Domeniu} = U_N = 20\text{ V}$$
$$\text{Rezolutie} = 10\text{ mV}$$
$$\text{Precizie} = \pm 0.8\ \%\text{ din citire} \pm 3\text{ digit}$$
$$U_m = 7.5\text{ V}$$

$$\Delta U = \pm\frac{0.8}{100}\times 7.5\text{ V} \pm 3\times 10\text{ mV} = \pm 0.09\text{ V}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r\,max}} = \pm\frac{\Delta U}{U_m}\times 100 = \pm\frac{0.09}{7.5}\times 100 = \pm 1.2\ \%$$

Erori la măsurări individuale - expresii cantitative

- Incertitudine de măsurare:
  - x – mărime de intrare: $x = x_m \mp \Delta x$
  - α – mărime de ieşire: $\alpha = \alpha_i \mp \Delta\alpha$



Erori la măsurări indirecte

- Măsurare indirectă:

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

f – funcţie cunoscută

x_i – parametri direct măsurabili

$$z_m = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, ..., x_n \pm \Delta x_n)$$

Δx_i – erori absolute maxime

- Eroarea absolută maximă, Δz:

$$\Delta z = f(x_1 \pm \Delta x_1, \ldots, x_n \pm \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$$

- Eroarea relativă maximă:

$$\frac{\Delta z}{z} = \frac{f(x_1 \pm \Delta x_1, \ldots, x_n \pm \Delta x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{f(x_1, \ldots, x_n)}$$

Metoda incertitudinilor (marginilor)

- Măsurare indirectă: $z = f(x, y)$

- Incertitudinile variabilelor:

$$L(x) \le x \le H(x)$$
$$L(y) \le y \le H(y)$$

L( ) – limita (marginea) inferioară

H( ) – limita (marginea) superioară

- Incertitudinile de măsurare pentru operaţii simple …

- Estimarea rezultatelor:

$$\hat{z} = \frac{L(z) + H(z)}{2}, \quad \Delta \hat{z} = \frac{|L(z) - H(z)|}{2}$$

Metoda erorii limita (derivatelor)

- Măsurare indirectă:

$$z = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$z + \Delta z = f(x_1 \pm \Delta x_1, \dots, x_n \pm \Delta x_n)$$

- Dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei *f*:

$$z + \Delta z = f(x_1, \dots, x_n) + \left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f + \dots$$

$$+ \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f + \dots$$

Metoda erorii limita (derivatelor)

- Eroarea absolută:

$$\varepsilon_a = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

- Eroarea absolută maximă:

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \left|\Delta x_i\right|$$

Metoda erorii limita (derivatelor)

- Eroarea relativă:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{f\left(x_1,\ldots,x_n\right)} = \frac{x_1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{x_1} + \ldots + \frac{x_n}{f}\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\Delta x_n}{x_n}$$

- Eroarea relativă maximă:

$$\frac{\Delta z}{z} = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{f}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right|$$

- Erori maxime pentru funcţii simple …

Erori la măsurări repetate

- Erori:
  - Aleatoare (tip A):
    - Variază imprevizibil la repetarea măsurării în aceleaşi condiţii
    - Pentru un număr mare de măsurători, valoarea lor medie este nulă
  - Sistematice (tip B):
    - Evaluare: date anterioare, experienţă operator, specificaţii (fabricaţie, manuale, …)
    - Pentru un număr mare de măsurători, reprezintă diferenţa dintre valoarea medie a rezultatelor şi valoarea adevărată a măsurandului
  - Valori aberante

Erori la măsurări repetate

- Măsurări repetate:

$$x \quad \rightarrow \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad\qquad \varepsilon_i = x_i - x, \quad i = 1, \ldots, n$$

- Valoare adevărata:

$$x_0 = \mu = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

- Valoare aşteptata:

$$M[x] = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Erori la măsurări repetate

- Dispersia:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right]$$

- Eroare medie pătratică (eroare standard):

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

- Precizia măsurării: valoare adevărată, valoare aşteptată
- Împrăştierea rezultatelor: dispersie, eroare medie pătratică

Erori aleatoare (tip A)

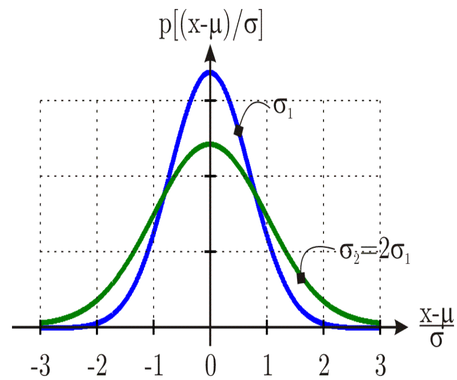
- Repartiţia normală (Gauss):
  - Densitatea de probabilitate:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

  - $p(x) \to \max$, $x = \mu$

$$p(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

  - Simetrie: $x = \mu$
  - Inflexiune: $x = \mu \pm \sigma$



Densitatea de probabilitate a repartiţiei normale

Erori aleatoare (tip A)

- Erori absolute pentru repartiţia normală:

$$-0,674\sigma \le \varepsilon_a \le 0,674\sigma \qquad 50\%$$

$$-\sigma \le \varepsilon_a \le \sigma \qquad 68,3\%$$

$$-3\sigma \le \varepsilon_a \le 3\sigma \qquad 99,73\%$$

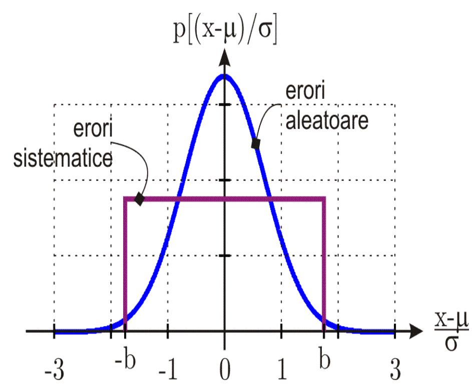
- Eroare probabilă: 0,674σ
- Eroare medie: σ
- Eroare absolută maximă: ~3σ

Erori sistematice (tip B)

- Erori şi incertitudini evaluate prin alte metode (decât cele statistice)

- Estimare incertitudini:
  - Date de măsurare anterioare
  - Experienţă
  - Specificaţii producător
  - Buletine de verificare
  - Manuale de utilizare
  - …

- Distribuţie rectangulară:



Densitatea de probabilitate a erorilor aleatoare, respectiv sistematice.

Erori sistematice (tip B)

- "m" surse de erori tip B: σ_i, i=1,…,n
- Eroarea medie pătratică rezultantă:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} r_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

r_{ij} – covarianţa (coeficient de corelaţie)

- Surse de erori independente (complet necorelate):

$$r_{ij} = 0 \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_m^2}$$

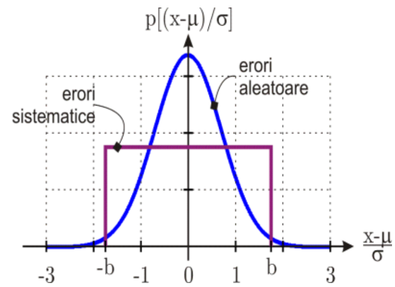
- Surse de erori puternic corelate:

$$r_{ij} = 1 \quad \sigma = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n$$

Eroare medie a unei măsurări

- Eroarea medie pătratică a unei măsurări, σ:
  - σ_A – eroarea medie pătratică rezultantă după estimarea erorilor de tip A
  - σ_B – eroarea medie pătratică rezultantă după estimarea erorilor de tip B

$$\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$



Densitatea de probabilitate a erorilor aleatoare, respectiv sistematice.