Observații:

a) în reprezentarea vectorilor s-a utilizat notația $\vec{v} \equiv \mathbf{v}$ („v” bold).
b) mărimea unui vector $|\vec{v}| \equiv |\mathbf{v}| = \mathrm{v}$.

Capitolul 1

Sisteme de forțe

Noțiuni recapitulative

Elemente de calcul vectorial

Un vector este o entitate matematică care se reprezintă geometric printr-un segment orientat AB, caracterizat prin următoarele elemente:

- punct de aplicație (origine): A
- dreapta suport: (Δ)
- sens
- modul (mărimea): $|\mathrm{AB}|$

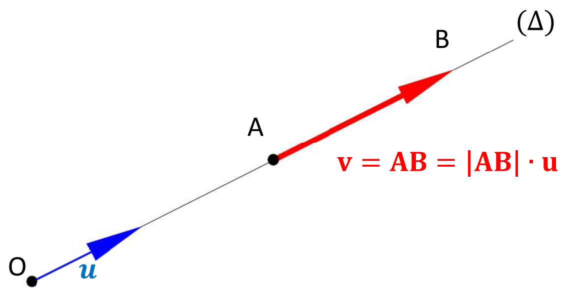


Figura 1.1 – Elementele vectorului

în care $\mathbf{u}$ este versorul dreptei suport al vectorului $\mathbf{v}$.

Clasificarea vectorilor

a) Vectori liberi – sunt acei vectori care își pot muta originea (punctul de aplicație) fără să își modifice celelalte caracteristici: direcția, sensul si modulul;

b) Vectori alunecători – sunt acei vectori care își pot schimba originea (punctul de aplicație) în orice punct de pe dreapta suport a lor, păstrându-și neschimbate direcția, sensul si mărimea;
c) Vectori legați – sunt vectorii la care rămân neschimbate toate caracteristicile lor: direcție, sens, modul si punct de aplicație.

Operații cu vectori

a) Adunarea vectorilor
Adunarea vectorilor se face după regula paralelogramului, în cazul a doi vectori (Fig. 1.2).

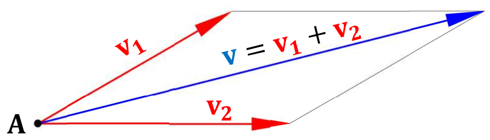


Figura 1.2 – Adunarea a doi vectori (regula paralelogramului)

Pentru cazul în care avem mai mulți vectori, înșiruiți, putem utiliza regula triunghiului (Fig. 1.3 și Fig. 1.4). Rezultanta închide poligonul, indiferent dacă poligonul este o figură plană sau în spațiu. Dacă poligonul este gata închis, rezultanta vectorilor care formează un asemenea poligon este nulă.

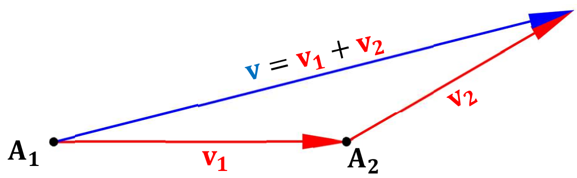
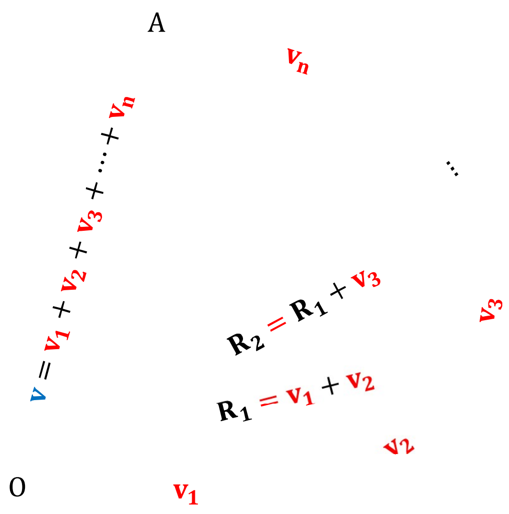


Figura 1.3 – Adunarea a doi vectori (regula triunghiului)



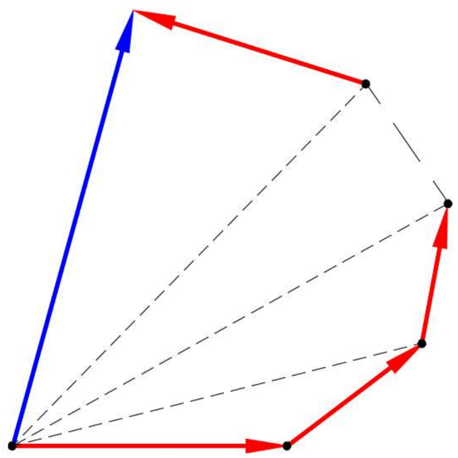


Figura 1.4 – Adunarea vectorilor (regula triunghiului pentru „n” vectori)

Ca si observație, în cazul adunării a doi vectori prin metoda triunghiului (grafică), dacă se inversează sensul la vectorul rezultant atunci se schimbă semnul matematic din relația de egalitate (Fig. 1.5).

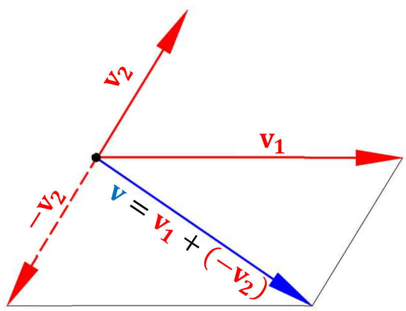


Figura 1.5 – Scăderea vectorilor (regula triunghiului cu inversarea sensului)

Adunarea vectorilor este comutativă si asociativă:

$$\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} = \mathbf{v_2} + \mathbf{v_1}$$
$$(\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) + \mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + (\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3})$$

Rezultanta vectorilor (suma lor) se poate calcula dacă se cunosc formele analitice a vectorilor raportate la un sistem de referință (exemplul de mai jos este raportat a sistemul cartezian de referință xOyz):

$$\mathbf{v_1} = \mathrm{v}_{\mathrm{x}_1} \cdot \mathbf{i} + \mathrm{v}_{\mathrm{y}_1} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{v}_{\mathrm{z}_1} \cdot \mathbf{k}$$
$$\mathbf{v_2} = \mathrm{v}_{\mathrm{x}_2} \cdot \mathbf{i} + \mathrm{v}_{\mathrm{y}_2} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{v}_{\mathrm{z}_2} \cdot \mathbf{k}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{i}} = \mathrm{v}_{\mathrm{x}_i} \cdot \mathbf{i} + \mathrm{v}_{\mathrm{y}_i} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{v}_{\mathrm{z}_i} \cdot \mathbf{k}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{n}} = \mathrm{v}_{\mathrm{x}_\mathrm{n}} \cdot \mathbf{i} + \mathrm{v}_{\mathrm{y}_\mathrm{n}} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{v}_{\mathrm{z}_\mathrm{n}} \cdot \mathbf{k}$$

Unde suma (rezultanta) lor este reprezentată prin vectorul $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \cdots + \mathbf{v_i} + \cdots + \mathbf{v_n} = \sum \mathbf{v_i}$$

b) Înmulțirea unui vector cu un scalar

Dacă considerăm un scalar λ atunci

$$\mathbf{v} \cdot \lambda = (\mathrm{v_x} \cdot \lambda)\,\mathbf{i} + (\mathrm{v_y} \cdot \lambda)\,\mathbf{j} + (\mathrm{v_z} \cdot \lambda)\,\mathbf{k} = \mathbf{w}$$

în care

$$\mathbf{v} = \mathrm{v}_x \cdot \mathbf{i} + \mathrm{v_y} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{v}_z \cdot \mathbf{k}$$
$$\mathbf{w} = \mathrm{w}_x \cdot \mathbf{i} + \mathrm{w_y} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{w}_z \cdot \mathbf{k}$$

Dacă scalarul λ este negativ, sensul vectorului $\mathbf{w}$ va fi contrar lui $\mathbf{v}$.

Proprietăți

- asociativitatea: $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \mathbf{v}) = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \mathbf{v}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mathbf{v}$
- distributivitatea:

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{v} + \lambda_2 \cdot \mathbf{v} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \mathbf{v}$$
$$\lambda \cdot \mathbf{v_1} + \lambda \cdot \mathbf{v_2} = \lambda \cdot (\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2})$$

c) Produsul scalar a doi vectori

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2 \cdot \cos(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$$

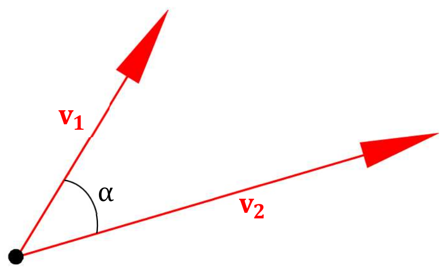


Figura 1.6 – Produsul scalar a doi vectori

Dacă se cunosc formele analitice ale vectorilor $\mathbf{v_1}$ și $\mathbf{v_2}$, atunci:

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = \mathrm{v}_{x_1} \cdot \mathrm{v}_{x_2} + \mathrm{v}_{y_1} \cdot \mathrm{v}_{y_2} + \mathrm{v}_{z_1} \cdot \mathrm{v}_{z_2}$$

Dacă vectorii sunt ortogonali ($\mathbf{v_1} \perp \mathbf{v_2}$) atunci $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = 0$

Proprietăți

- comutativitatea: $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_1}$
- distributivitatea:

$$\mathbf{v_1} \cdot (\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3}) = \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} + \mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_3}$$

$$(\lambda_1 \cdot \mathbf{v_1}) \cdot (\lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot (\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2})$$

d) Produsul vectorial a doi vectori

$$\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathrm{v}_{x_1} & \mathrm{v}_{y_1} & \mathrm{v}_{z_1} \\ \mathrm{v}_{x_2} & \mathrm{v}_{y_2} & \mathrm{v}_{z_2} \end{vmatrix} = \mathbf{w}$$

Vectorul $\mathbf{w}$ este un vector perpendicular pe planul determinat de vectorii $\mathbf{v_1}$ și $\mathbf{v_2}$ (Fig.1.7).

Mărimea vectorului ce rezulta din produsul vectorial:

$$|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}| = \mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2 \cdot \sin(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$$

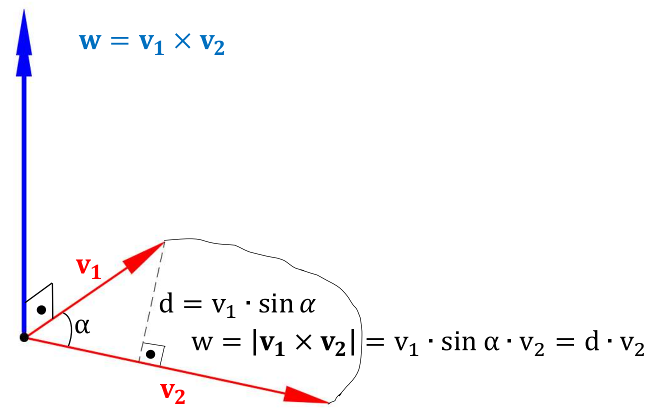


Figura 1.7 – Produsul vectorial a doi vectori

Dacă doi vectori sunt coliniari sau paraleli, produsul lor vectorial este nul.

Proprietăți

- anticomutativitatea: $\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} \neq \mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1} = -\mathbf{v_2} \times \mathbf{v_1}$
- distributivitatea: $\mathbf{v_1} \times (\mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}) = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} + \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_3}$

Sisteme de forțe

Reprezentarea unei forțe se face prin intermediul unui vector. Astfel se definește mărimea forței (modulul), direcția este dată de dreapta suport a forței, sensul forței dat de versorul dreptei suport (care ne arată sensul pozitiv sau negativ al forței) și punctul de aplicație al forței. În Statică, forța este considerată, în general, un vector alunecător, când ne interesează efectul ei mecanic asupra corpului. Cazul în care nu putem considera forța ca un vector alunecător, este cazul în care studiem sistemele de forțe legate, unde punctul de aplicație este clar definit și ne influențează rezultatul dacă modificăm punctul în care este aplicată forța – exemplu centre de greutate.

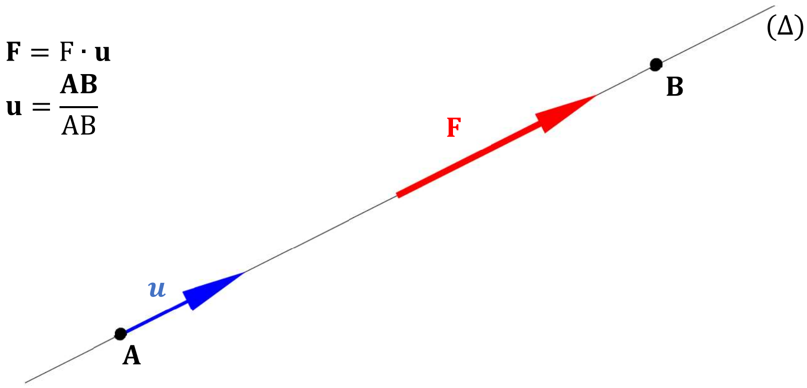


Figura 1.8 – Reprezentarea vectorului forță

Dacă ne raportam la un sistem de referință cartezian (xOyz), expresia analitica a vectorului $\mathbf{F}$ este:

$$\mathbf{F} = \mathrm{F}_x \cdot \mathbf{i} + \mathrm{F}_y \cdot \mathbf{j} + \mathrm{F}_z \cdot \mathbf{k}$$

sau

$$\mathbf{F} = \mathrm{X} \cdot \mathbf{i} + \mathrm{Y} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{Z} \cdot \mathbf{k}$$

în care scalarii F_x, F_y și F_z $(X, Y$ și $Z)$ reprezinta proiectile lui $\mathbf{F}$ pe axele sistemului de referinta (Fig.1.8).

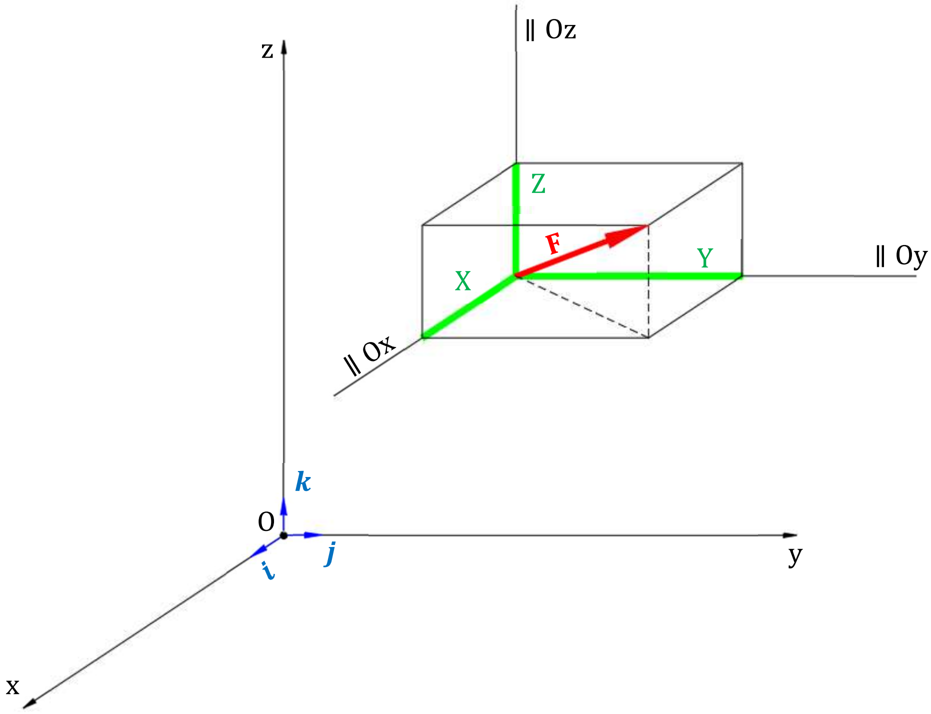


Figura 1.9 – Proiecția unei forțe pe axele sistemului de referință

Modulul vectorului forță:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Momentul unei forțe în raport cu un punct (pol)

Momentul unei forțe în raport cu un punct este definit ca fiind produsul vectorial dintre vectorul forță și vectorul de poziție a unui punct ce aparține dreptei suport a forței.

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r_A} \times \mathbf{F}$$

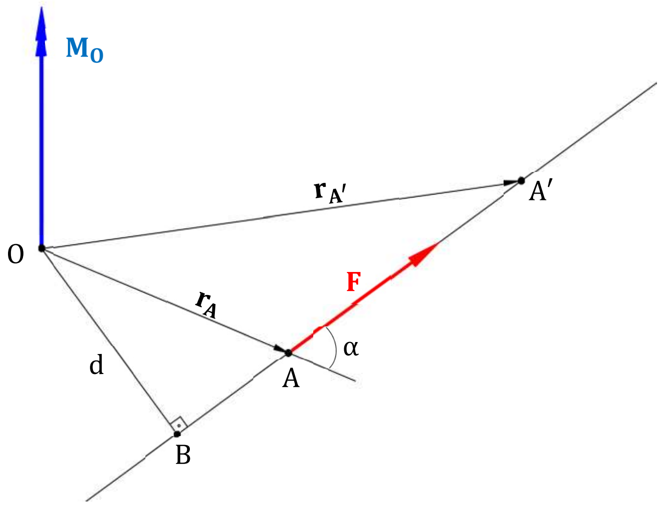


Figura 1.10 – Momentul unei forțe în raport cu polul O

Momentul $\mathbf{M_O}$ este un vector perpendicular pe planul determinat de vectorul de pozitie $\mathbf{r}$ și forta $\mathbf{F}$.

Vectorul de poziție $\mathbf{r}$ este un vector care ne indică poziția oricărui punct ce aparține dreptei suport a forței $\mathbf{F}$. Demonstrația este următoarea:

- alegem alt punct ce aparține dreptei suport a forței, A’ (Fig. 1.10). Putem scrie:

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r_{A'}} \times \mathbf{F} = (\mathbf{OA} + \mathbf{AA'}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r_A} \times \mathbf{F} + \overbrace{\mathbf{AA'} \times \mathbf{F}}^{\mathbf{0}} = \mathbf{r_A} \times \mathbf{F}$$

Produsul vectorial $\mathbf{AA'} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ deoarece cei doi vectori ($\mathbf{AA'}$ și $\mathbf{F}$) sunt coliniari.

Mărimea acestui vector poate fi determinata și cu relația „forța x brațul” (Fig. 1.10):

$$\mathrm{M_0} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{r} \cdot \sin\alpha = \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}$$

Momentul unei forțe în raport cu o axă (dreaptă)

Reprezintă proiecția vectorului moment pe acea axa. Deci, este un scalar.

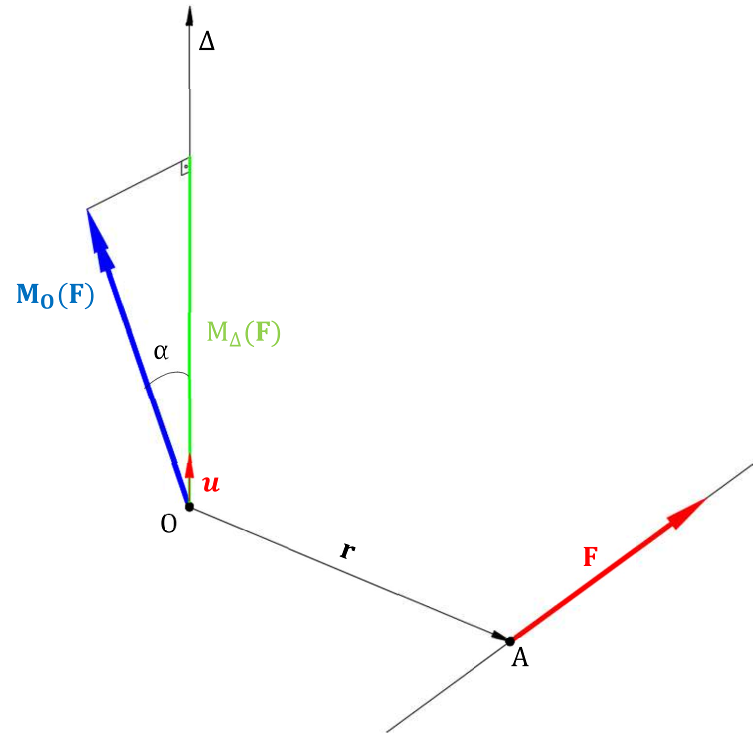


Figura 1.11 – Momentul unei forțe în raport cu o axă (Δ)

$$M_\Delta(\mathbf{F}) = \mathbf{M_0}(\mathbf{F}) \cdot \cos\alpha$$

Momentul forței $\mathbf{F}$ în raport cu axa Δ:

$$M_\Delta(\mathbf{F}) = \mathbf{M_0}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{u},$$

unde $\mathbf{u}$ este versorul axei Δ.

Dacă se cunoaște forma analitică a unui moment în raport cu un pol O ($\mathbf{M_O}$),al unei forțe $\mathbf{F}$, proiecțiile acestui vector moment, pe axele sistemului de referință sunt componentele scalare ale sale.

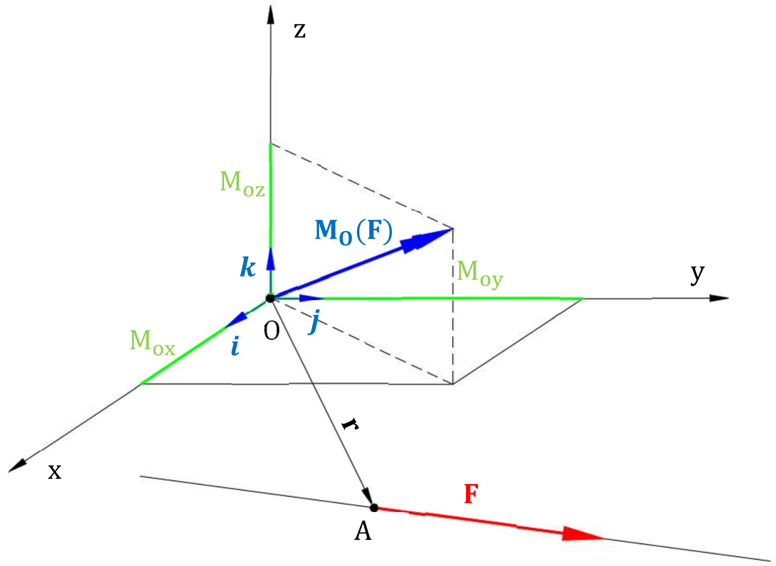


Figura 1.12 – Componentele scalare ale momentului în raport u axele sistemului de referință

$$\mathbf{M_O} = \mathrm{M_{ox}} \cdot \mathbf{i} + \mathrm{M_{oy}} \cdot \mathbf{j} + \mathrm{M_{Oz}} \cdot \mathbf{k}$$

Cuplul de forțe

Daca două forțe, sunt egale în modul, au sensuri contrare și direcții paralele, atunci ele formează un cuplu de forțe.

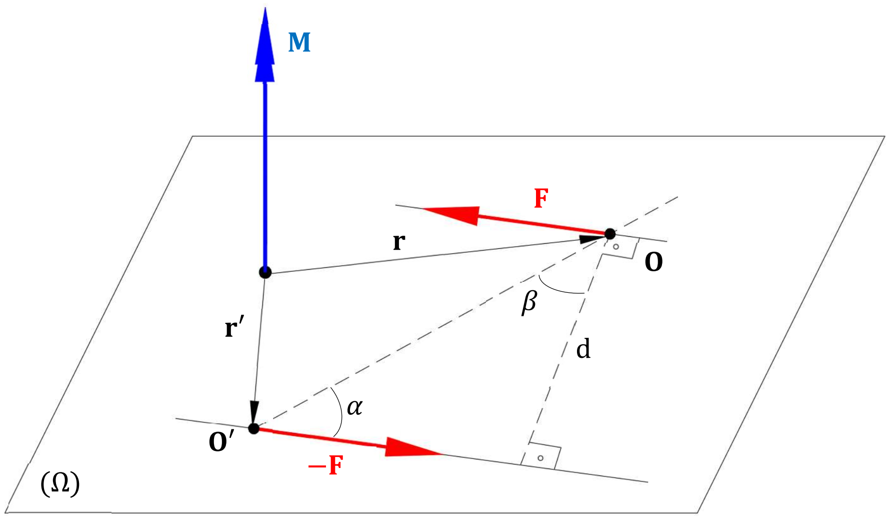


Figura 1.13 – Cuplul de forțe

Dacă două forțe formează un cuplu, atunci

- rezultanta lor este nulă
- vectorul moment rezultant al forțelor, este un vector liber; modulul, direcția și sensul este același în orice punct din plan sau spațiu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}' \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}$$

iar $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{O}'\mathbf{O}$,

rezultând: $\mathbf{M} = \mathbf{O}'\mathbf{O} \times \mathbf{F}$ (momentul unei forțe din cuplu în raport cu cealaltă forță).

Mărimea acestui moment este direct dependentă de distanța dintre cele două drepte suport a forțelor:

$$\mathrm{M} = \mathrm{O}'\mathrm{O} \cdot \mathrm{F} \cdot \sin\alpha = \mathrm{O}'\mathrm{O} \cdot \mathrm{F} \cdot \cos\beta = \mathrm{F} \cdot \mathrm{d}.$$

Sensul vectorului moment este dat de către regula burghiului drept iar direcția este perpendiculară pe planul determinat de cele două drepte suport ale forțelor.

Operații elementare de echivalență

Considerăm un CSR (sau sistem de CSR) acționat de un sistem oarecare de forțe exterioare. Dacă dorim să echivalăm acest sistem de forțe cu unul echivalent, putem să spunem că următoarele propoziții sunt adevărate:

a. Dacă există două forțe concurente, ele se pot înlocui cu rezultanta lor obținută cu regula paralelogramului;
b. Oricare din forțe se poate înlocui prin componentele ei pe direcțiile a două axe concurente și coplanare cu ea sau pe direcțiile a trei axe concurente și necoplanare;
c. Se pot adăuga sau elimina două forțe egale pe aceeași dreaptă suport și de sens contrar;
d. Un cuplu de forțe se poate înlocui cu momentul său și invers.

Astfel, dacă aplicăm operații de echivalență unui sistem de forțe, se obține un nou sistem de forțe, echivalent cu cel inițial.

Dacă avem două sisteme de forțe echivalente aplicate asupra unui CSR (sau sisteme de CSR), ele vor produce același efect mecanic.

Reducerea unei forțe într-un punct

Reducerea unei forțe într-un punct este o operație de echivalență. Prin reducerea unei forțe într-un punct (punctul se mai numește și pol de reducere) se echivalează efectul mecanic al forței asupra acelui punct prin alt sistem de forțe; acest nou sistem de forțe, echivalent cu forța inițială va fi aplicat în punctul de reducere.

Pornim de la un caz general, în care avem o forță $\vec{F}$ și un punct O (Fig. 2.1 - a). Cu condiția ca dreapta suport a forței să nu treacă prin punctul O, dorim să vedem efectul forței $\vec{F}$ asupra punctului O. Adică, să reducem forța $\vec{F}$ în punctul O.

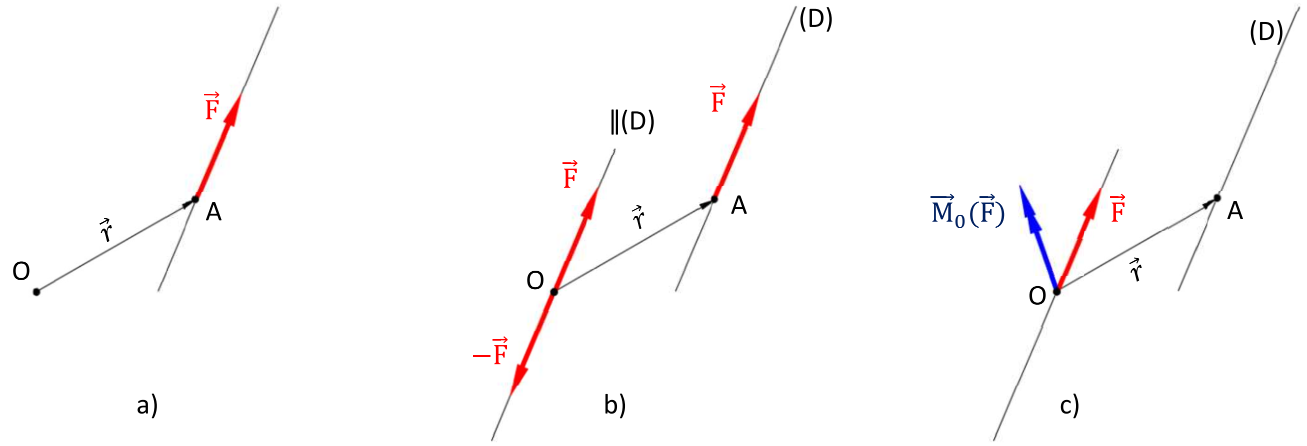


Figura 2.1 – Reducerea unei forțe într-un punct

În următorul pas (Fig.2.1 – b) o să adăugăm o forță $\vec{F}$ în punctul O, cu direcția paralelă la dreapta suport (D) și o forță $-\vec{F}$, tot în același punct O, dar în sens opus, pentru a se anula forța $\vec{F}$ adăugată. Nu am modificat cu nimic starea sistemului de forțe inițial, deoarece nu am făcut altceva de a aplica o operație de echivalență (vezi punctul *c.* de la operații elementare de echivalență).

Dacă privim noua configurație a sistemului de forțe de la punctul *b)*, putem să observăm că s-a format un cuplu de forțe ($\vec{F}$ și $-\vec{F}$). Astfel ajungem la faza finală (Fig. 2.1-c) în care avem momentul cuplului de forțe $\vec{M}_0(\vec{F})$ și forța $\vec{F}$ aplicată în polul O.

Astfel, am redus forța $\vec{F}$, situată pe dreapta suport (D), în polul O, rezultând în polul O un torsor al forței $\vec{F}$ format din forța $\vec{F}$ și momentul forței $\vec{F}$ în raport cu polul O, $\{\vec{F}, \vec{M}_0(\vec{F})\}$.

Curs 3

Reducerea sistemelor generale (oarecare) de forțe (vectori)

Reducerea sistemelor de forțe $\{\vec{F}_i\}$, este o operație de echivalență , prin care un sistem de forțe (vectori) se înlocuiește cu un sistem de doi vectori, numit torsor de reducere. Acești doi vectori sunt: vectorul rezultant $\vec{R}$ si vectorul moment rezultant $\vec{M}_{\boldsymbol{o}}$.

Fiind dat un sistem general (oarecare) de forțe (vectori) $\{\vec{F}_i\}$, se cere să se efecueze reducerea acestui sistem într-un punct (pol) oarecare din spațiu O.

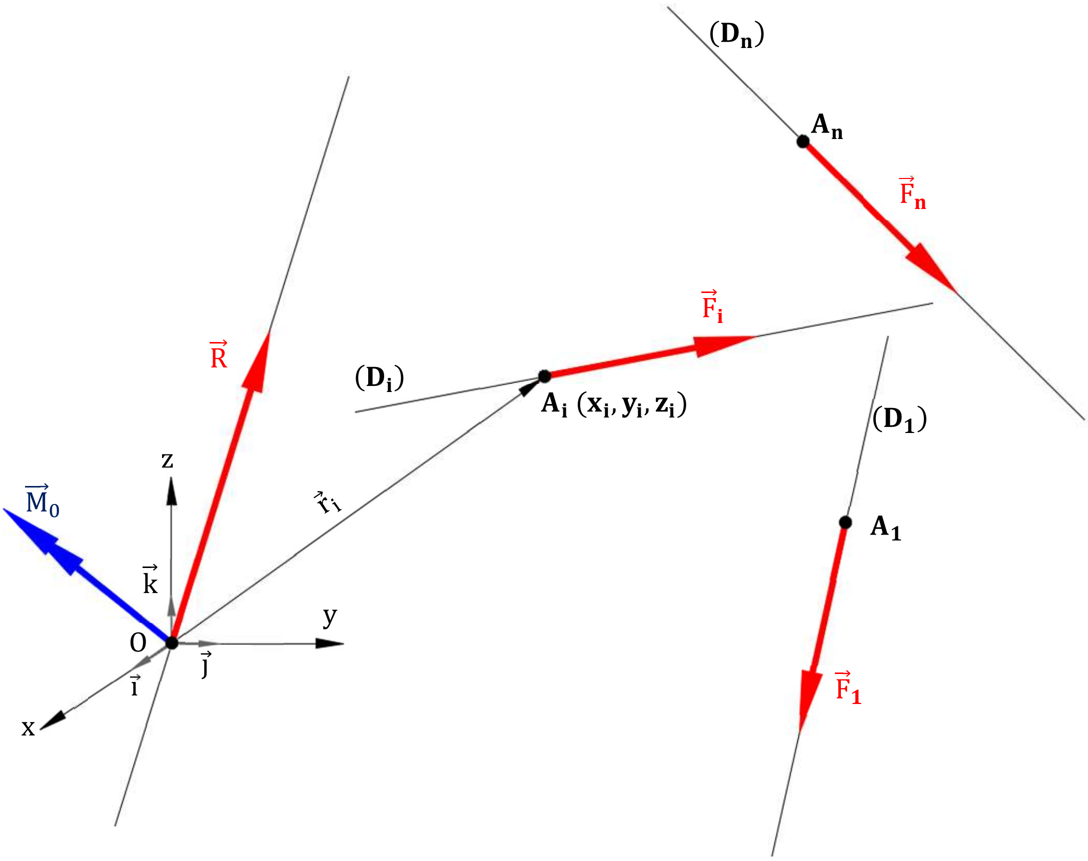


Figura 3.1 – Reducerea sistemelor de forțe oarecare

Vectorul rezultant $\vec{R}$ se obține însumând vectorial toate forțele $\vec{F}_i$ din sistem, iar momentul rezultant $\vec{M}_o$ se obține însumând vectorial momentele fiecărei forțe din sistem în raport cu punctul (polul) O.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} \ , \vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (1)$$

1. **<u>Expresiile analitice ale vectorilor torsorului de reducere</u>**

Daca expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{i} + F_{iy}\vec{j} + F_{iz}\vec{k}$$

$$\vec{r}_i = r_{ix}\vec{i} + r_{iy}\vec{j} + r_{iz}\vec{k} \qquad (2)$$

$$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}$$

atunci

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \, , R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \qquad (3)$$

$$\left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (4)$$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy}\right)\vec{i} + \sum_{i=1}^{n} (r_{iz}F_{ix} - r_{ix}F_{iz})\vec{j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{iz}\right)\vec{k} \qquad (5)$$

$$M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} \left(r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy}\right), \ M_{oy} = \sum_{i=1}^{n} \left(r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy}\right), M_{\ oz} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(r_{iy}F_{iz} - r_{iz}F_{iy}\right) \qquad (6)$$

$$|M_o| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \qquad (7)$$

2. Variația elementelor torsorului la schimbarea punctului (polului) de reducere

În acest capitol ne propunem să calculăm torsorul de reducere al aceluiași sistem de forțe $\{\vec{F_i}\}$ în raport cu un alt punct oarecare din spațiu O'.

Vectorul rezultant $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$ rămâne același (suma forțelor este aceiași indiferent de punctul de reducere), dar momentul rezultant $\overrightarrow{M_o} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \overrightarrow{F_i}$ se modifică după cum urmează.

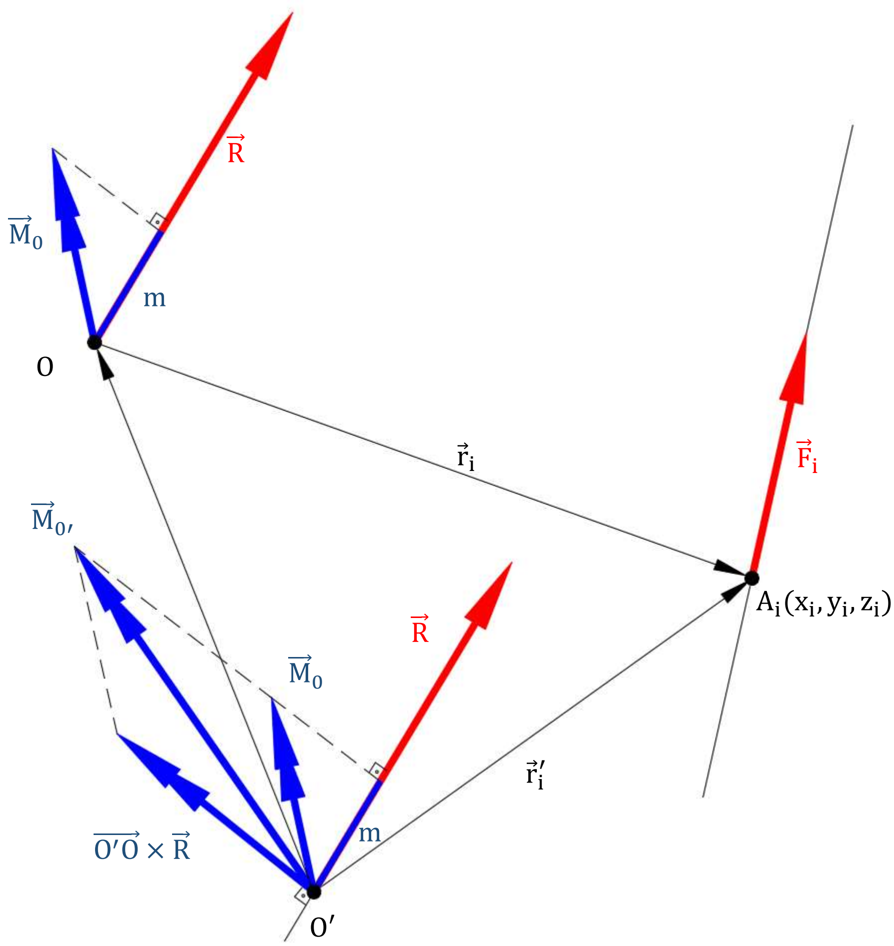


Figura 3.2 – Variația momentului la schimbarea polului de reducere

Din figura (3.2) se observă că:

$\vec{r_i}' = \vec{r_i} + \overrightarrow{O'O}$ (8)

Atunci înlocuind formula (8) în expresia momentului $\overrightarrow{M}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}' x\overrightarrow{F_i}$ obținem:

$$\overrightarrow{M}_{o'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i}' \times \overrightarrow{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r_i} + \overrightarrow{O'O}\right) \times \overrightarrow{F_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{O'O} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} =$$
$$= \overrightarrow{M}_o + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$$

$\boldsymbol{\overrightarrow{M}_{o'} = \overrightarrow{M}_o + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}}$ (9)

3. <u>Invarianții operației de reducere</u>

Reducând sistemul de forțe (vectori) $\{\vec{F_i}\}$ in diferite puncte din spațiu, anumite elemente rămân neschimbate. Aceste elemente se numesc **<u>invarianți</u>** ai operației de reducere. Astfel avem doi invarianți principali și doi secundari.

3.1 Invarianții principali

Primul invariant principal este vectorul rezultant $\vec{R}$ deoarece suma forțelor este aceiași indiferent de punctul de reducere. El se numește invariantul vectorial.

Al doilea invariant principal este produsul scalar dintre cei doi vectori ai torsorului, care este același indiferent de punctul de reducere. El se numește invariantul scalar.

Pentru torsorul de reducere din punctul O avem:

$J = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_o$ (10)

Pentru torsorul de reducere din punctul O' (Fig. 3.2) avem:

$$J = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_{o'} = \vec{R} \cdot \left(\overrightarrow{M}_o + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}\right) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_o + \vec{R} \cdot \left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{R}\right) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M}_o$$

Produsul scalar:

$\vec{R} \cdot \left(\overrightarrow{O'O} \times \vec{R}\right) = 0$ deoarece $\vec{R} \perp \overrightarrow{O'O} \times \vec{R}$

3.2 Invarianții secundari

Primul invariant secundar este modulul momentului minim m. Momentul minim este cel mai mic moment rezultant al sistemului de forțe dat și reprezintă proiecția vectorului moment pe vectorul rezultant. Proiecția unui vector pe o axa se face înmulțind scalar vectorul respectiv cu versorul direcției axei.

$\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$ este versorul directiei vectorului rezultant $\vec{R}$,

$$m = M_{min} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} \cdot \vec{M}_o = \frac{J}{|\vec{R}|} \quad (11)$$

Al doilea invariant secundar este k numit constanta sistemului de forte

Vectorul moment minim se obține din expresia (12)

$$\vec{M}_{min} = \frac{J}{|\vec{R}|} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{J}{R^2} \cdot \vec{R} = k \cdot \vec{R} \ (12)$$

iar

$k = \frac{J}{R^2}$ (13)

4. Axa centrală a unui sistem de forțe (vectori)

Axa centrală a unui sistem de forțe (vectori) este locul geometric al punctelor din spațiu în care , dacă reducem sistemul de forțe (vectori), cei doi vectori ai torsorului de reducere sunt coliniari.

Axa centrală este unică pentru fiecare sistem de forțe (vectori) și are direcția vectorului rezultant $\vec{R}$.

Reducem sistemul de forțe în punctul O. Apoi considerăm un plan π perpendicular pe vectorul rezultant $\vec{R}$. Reducem sistemul de forțe în punctul P care reprezintă intersecția planului π cu axa centrală. Poziția axei centrale în spațiu o determinăm prin ecuația ei vectorială sau prin ecuațiile carteziene.

4.1 Ecuația vectorială a axei centrale

Reducând sistemul de forțe în punctul P avem același vector rezultant $\vec{R}$ iar momentul rezultant se calculează cu relația (9)

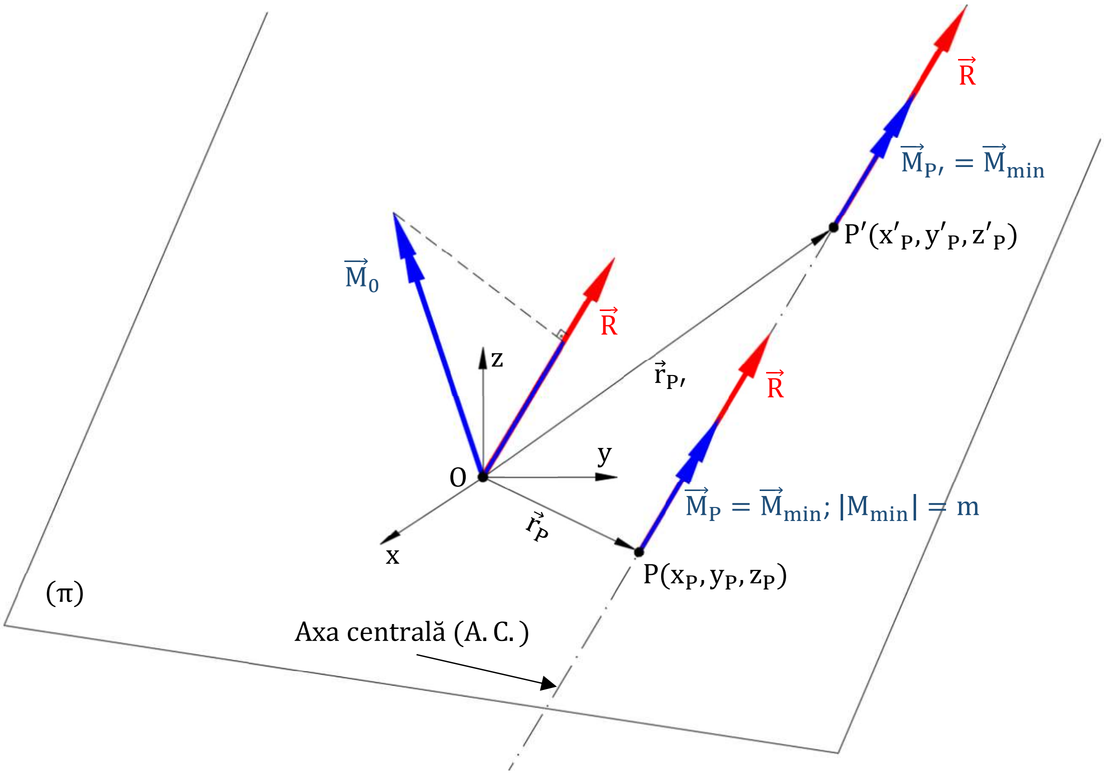


Figura 3.2 –Ecuația axei centrale

$\vec{M}_p = \vec{M}_o + \overrightarrow{PO} \times \vec{R} = \lambda \cdot \vec{R}$ (14)

Știind că $\overrightarrow{PO} = -\vec{r}_p$ obținem

$\vec{M}_p = \vec{M}_o - \vec{r}_p \times \vec{R} = \lambda \cdot \vec{R}$ (15)

$\vec{M}_p = \vec{M}_{min}$

Înmulțim vectorial la stânga a doua egalitate din relația (15) cu $\vec{R}$

$\vec{R} \times \vec{M}_o - \vec{R} \times (\vec{r}_p \times \vec{R}) = \vec{R} \times \lambda \cdot \vec{R} = \vec{0}$ (16)

Dublul produs vectorial $\vec{R} \times (\vec{r}_p \times \vec{R})$ se calculează astfel:

$\vec{R} \times (\vec{r}_p \times \vec{R}) = (\vec{R} \cdot \vec{R}) \cdot \vec{r}_p - (\vec{R} \cdot \vec{r}_p) \cdot \vec{R} = R^2 \cdot \vec{r}_p$

Termenul:

$(\vec{R} \cdot \vec{r}_p) \cdot \vec{R} = \vec{0}$ deoarece $\vec{R} \perp \vec{r}_p$, $\vec{r}_p \in \pi$

Ecuația (16) devine:

$\vec{R} \times \vec{M}_o - R^2 \cdot \vec{r}_p = \vec{0}$ (17)

Din ecuația (17) rezultă vectorul de poziție al punctului P de pe axa centrală:

$$\vec{r}_p = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_o}{R^2} \quad (18)$$

vectorul de poziție al punctului oarecare P' de pe axa centrală este:

$\vec{r} = \vec{r}_p + \overrightarrow{PP'}$ (19) vectorul $\overrightarrow{PP'} = \mu\vec{R}$ este coliniar cu vectorul $\vec{R}$

$$\vec{r} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_o}{R^2} + \mu\vec{R} \quad (20)$$

Ecuația (20) se numește ecuația vectorială a axei centrale.

Din relația (18) scrisă sub forma analitică se obține relația (21) de unde rezultă coordonatele punctului P de pe axa centrală.

$$\vec{r}_p = \frac{1}{R^2} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ R_x & R_y & R_z \\ M_{ox} & M_{oy} & M_{oz} \end{bmatrix} = x_P \cdot \vec{\imath} + y_P \cdot \vec{\jmath} + z_P \cdot \vec{k} \quad (21)$$

4.2 <u>Ecuațiile carteziene ale axei centrale</u>

Pentru a deduce ecuațiile carteziene ale axei centrale reducem sistemul de forțe în punctul P' de pe axa centrală.

Vectorul rezultant $\vec{R}$ este acelasi, iar vectorul moment rezultant se obține cu relația:

$$\vec{M}_{P'} = \vec{M}_o - \vec{r} \times \vec{R} = \nu \cdot \vec{R} \quad (22)$$

$$\vec{M}_{P'} = \vec{M}_{min}$$

Scriind relația (22) sub forma analitică obținem:

$$M_{ox}\vec{\imath} + M_{oy}\vec{\jmath} + M_{oz}\vec{k} - \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{bmatrix} = \nu\left(R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}\right) \quad (23)$$

Efectuând calculele în relația (23) obținem:

$$\frac{M_{ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z} = \nu \ (24)$$

Relațiile (24) reprezintă ecuațiile carteziene ale axei centrale.

Reducerea sistemelor de forțe în raport cu punctele axei centrale se numește **reducere canonică,** iar torsorul astfel obținut este torsorul minim al sistemului de forțe $\vec{\boldsymbol{R}}, \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{min}}$.

5. Teorema lui Varignon

Un caz particular îl constituie sistemele de forțe la care cei doi vectori ai torsorului de reducere sunt perpendiculari.

$\vec{M}_o \perp \vec{R}$

În acest caz

$\vec{M}_P = \vec{M}_{P'} = \vec{M}_{min} = \vec{0}$

$\vec{M}_o = \vec{M}_{P'} + \overrightarrow{OP'} \times \vec{R} \ \ (25)$

Știind că

$\vec{M}_{P'} = \vec{0}$ rezultă

$\overrightarrow{OP'} = \vec{r}$

$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{R} \ \ (26)$

Relația (26) reprezintă teorema lui Varignon care se enunța astfel:

În cazul sistemelor de forțe la care momentul minim $\vec{M}_{min} = \vec{0}$, momentul rezultant $\vec{M}_o$ in raport cu un pol O ,este egal cu momentul vectorului rezultant $\vec{R}$ plasat pe axa centrală a sistemului de forțe în raport cu același punct O.

6. Cazurile de reducere ale sistemelor de forte

Aceste cazuri de reducere se clasifică în funcție de cei doi invarianți principali, invariantul vectorial $\vec{R}$ și invariantul scalar $J = \vec{R} \cdot \vec{M}_o$.

<u>În cazul 1 de reducere</u> intră sistemele generale de forțe la care $\vec{R} \neq \vec{0}, J \neq 0$. Aceste sisteme de forțe se reduc la un torsor format din $\vec{R} \neq \vec{0}$ si $\vec{M}_o \neq \vec{0}$ fără a fi perpendiculare. Ele admit axă centrală, iar lor nu li se aplică teorema lui Varignon.

<u>În cazul 2 de reducere</u> intră sistemele particulare de forțe la care $\vec{R} \neq \vec{0}, J = 0$.

Acest caz de reducere are două subcazuri :

2.a în care $\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}_o \neq \vec{0}$ dar $\vec{M}_o \perp \vec{R}$. În raport cu punctele axei centrale ele se reduc la $\vec{R} \neq \vec{0}$ și $\vec{M}_{min} = \vec{0}$, adică la o rezultantă unică.

2.b în care $\vec{R} \neq \vec{0}, \ \vec{M}_o = \vec{M}_{min} = \vec{0}$

Sistemele de forțe din cazul 2 de reducere admit axă centrală și li se aplică teorema lui Varignon.

<u>În cazul 3 de reducere</u> intră sistemele de forțe la care $\vec{R} = \vec{0}, \ J = 0$.

Acest caz de reducere are două subcazuri :

3.a $\vec{R} = \vec{0}, \ \vec{M}_o \neq \vec{0}$

În acest caz sistemul de forțe se reduce la un cuplu de forțe având același moment în orice punct din spațiu.

3.b $\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}_o = \vec{0}$

Acest caz este al sistemelor de forțe echivalente cu 0 sau în echilibru.

Sistemele de forțe din cazul 3 de reducere nu admit axă centrală și nu li se aplică teorema lui Varignon.

Curs 4

Reducerea sistemelor particulare de forțe (vectori)

Sistemele particulare de forțe (vectori), sunt acele sisteme în care forțele ocupă poziții particulare în spațiu. În aceasta categorie intră: forțele concurente, coplanare , paralele, distribuite.

Aceste sisteme se reduc la un torsor ai cărui vectori $\vec{R}$ și $\vec{M}_o$ sunt perpendiculari $\vec{M}_o \perp \vec{R}$ și se încadrează în cazul 2 de reducere a sistemelor de forțe la care $\vec{R} \neq \vec{0}$, $J = 0$.

În raport cu punctele axei centrale aceste sisteme de forțe se reduc la $\vec{R} \neq \vec{0}$ și $\vec{M}_{min} = \vec{0}$, adică la o rezultantă unică.

1. **Reducerea sistemelor de forțe concurente.**

Forțele concurente sunt acele forțe reprezentate prin vectori a căror drepte suport se intersectează într-un punct din spațiu. Considerăm punctul de concurență O, care se alege drept punct (pol) de reducere. Deoarece suportul fiecărei forțe trece prin O, momentul ei în raport cu punctul O este nul.

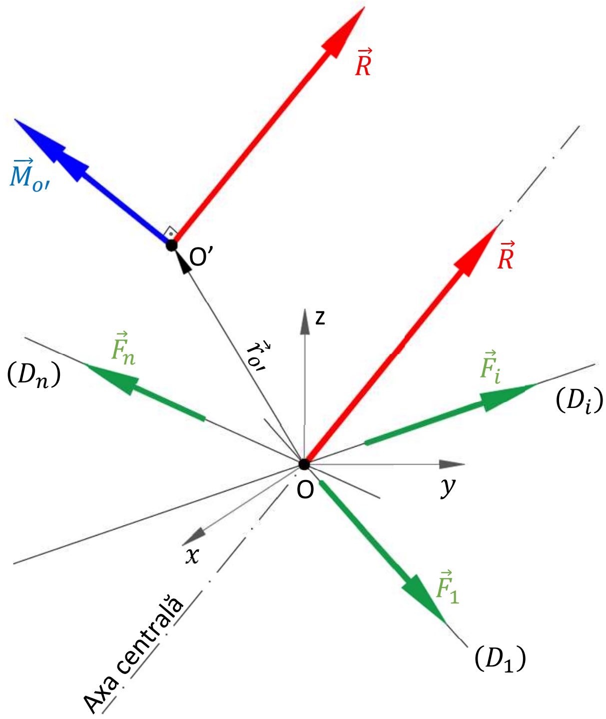


Figura 1 – Sistem de forțe concurente

1.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere

Reducând acest sistem de forțe în punctul O avem:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad \vec{M}_o = \vec{0} \quad (1)$$

Reducând acest sistem de forțe în alt punct din spațiu O’, avem:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\ , \vec{M}_{O'} = \vec{r}_{O'} \times \vec{R} \qquad (2)$$

În care

$$\vec{M}_{O'} \perp \vec{R}$$

Vectorul $\vec{M}_{O'}$ s-a obținut prin aplicarea teoremei lui Varignon sistemului de forțe dat conform relației (2).

1.2 Expresia analitica a torsorului de reducere

Dacă expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\vec{F_i} = F_{ix}\vec{\imath} + F_{iy}\vec{\jmath} + F_{iz}\vec{k} \qquad (3)$$

Atunci

$$\vec{R} \quad = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}\, , R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \qquad (4)$$

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \qquad (5)$$

1.3 Axa centrală a sistemului de forțe

Axa centrală a sistemului de forțe dat, trece și ea prin punctul O și este dreapta suport a vectorului rezultant $\vec{R}$.

Ecuațiile axei centrale sunt:

$$\frac{x}{R_x} = \frac{y}{R_y} = \frac{z}{R_z} \qquad (6)$$

În concluzie sistemele de forțe concurente se reduc în puncte din spațiu, care nu aparțin axei centrale, la un torsor format din doi vectori: un vector rezultant $\vec{R}$ și un vector moment rezultant $\vec{M}$, perpendiculari, iar în puncte din spațiu, care aparțin axei centrale la un vector unic și anume vectorul rezultant $\vec{R}$.

2. Reducerea sistemelor de forțe coplanare.

Forțele coplanare sunt acele forțe reprezentate prin vectori a căror drepte suport aparțin aceluiași plan din spațiu π.

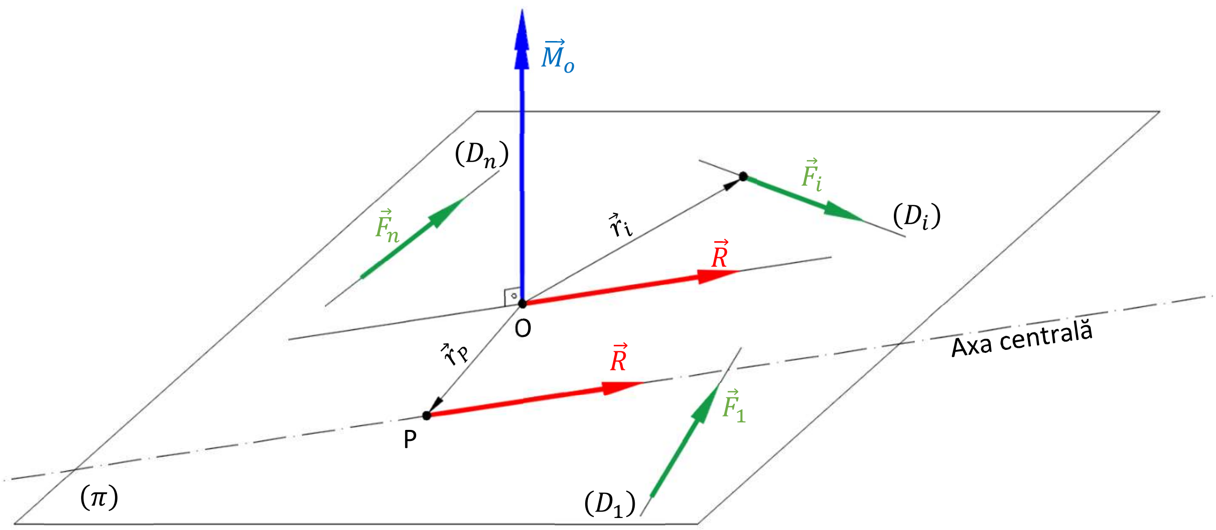


Figura 2 – Sistem de forțe coplanare

Fiind dat un sistem de forțe (vectori) coplanare $\{\vec{F}_i\}, i = \overline{1,n}$, se cere să se efectueze reducerea acestui sistem de forte.

2.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere

Reducând acest sistem de forțe în punctul O ce aparține planului forțelor, obținem torsorul de reducere:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}\ , \vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \qquad (7)$$

în care vectorul $\vec{R}$ apartine planului π , iar vectorul $\vec{M}_o$ este perpendicular pe planul π astfel încât cei doi vectori ai torsorului de reducere sunt perpendiculari $\vec{M}_o \perp \vec{R}$.

2.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

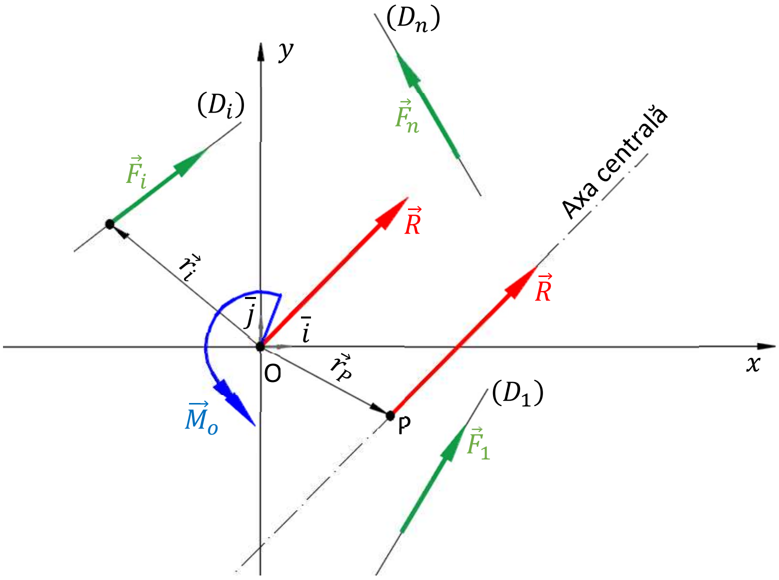


Figura 3 – Sistem de forțe coplanare – planul xOy

Dacă alegem planul π , planul xOy, atunci expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$$\vec{F_i} = F_{ix}\vec{\imath} + F_{iy}\vec{\jmath}$$

$$\vec{r_i} = r_{ix}\vec{\imath} + r_{iy}\vec{\jmath} \qquad (8)$$

$$\vec{R} \ = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath}$$

$$\vec{M}_o = M_{oz}\vec{k} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & 0 \\ F_{ix} & F_{iy} & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (r_{ix}F_{iy} - r_{iy}F_{iz})\vec{k}$$

Atunci:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} , \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy,} \quad (9)$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} , \ |\vec{M}_o| = M_{oz} = \pm F_i \cdot d_i \quad (10)$$

În care F_i sunt modulele vectorilor forte, iar d_i sunt brațele acestor forțe în raport cu axa Oz, care trece prin punctul O. Dacă forțele din plan rotesc planul în sens orar atunci semnul momentului se consideră - , iar în caz contrar +; sau dacă forța „rotește” axa Ox „peste” axa Oy atunci momentul este pozitiv, altfel e negativ („rotește” axa Oy „peste” axa Ox).

2.3 Axa centrală a sistemului de forțe

Axa centrală a sistemului de forțe dat, aparține și ea planului π și este paralelă cu dreapta suport a vectorului rezultant $\vec{R}$.

Aplicând teorema lui Varignon acestui sistem de forțe rezultă:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_P \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ R_x & R_y & 0 \end{bmatrix} = \left(xR_y - yR_x\right)\vec{k} \quad (11)$$

Obținem astfel ecuația axei centrale pentru sistemele de forțe coplanare:

$$x \cdot R_y - y \cdot R_x = M_{oz} \quad (12)$$

În raport cu punctele axei centrale momentul rezultant este nul , sistemul reducând-se astfel la un vector unic (rezultanta $\vec{R}$).

<u>În concluzie</u> sistemele de forțe coplanare se reduc în puncte din planul forțelor, care nu aparțin axei centrale la un torsor format din doi vectori: un vector rezultant ce aparține planului forțelor și un vector moment rezultant, perpendicular pe planul forțelor, iar în puncte din plan, care aparțin axei centrale la un vector unic și anume vectorul rezultant $\vec{R}$.

3. Reducerea sistemelor de forțe paralele.

Forțele paralele sunt acele forțe reprezentate prin vectori a căror drepte suport sunt paralele cu o direcție fixă din spațiu.

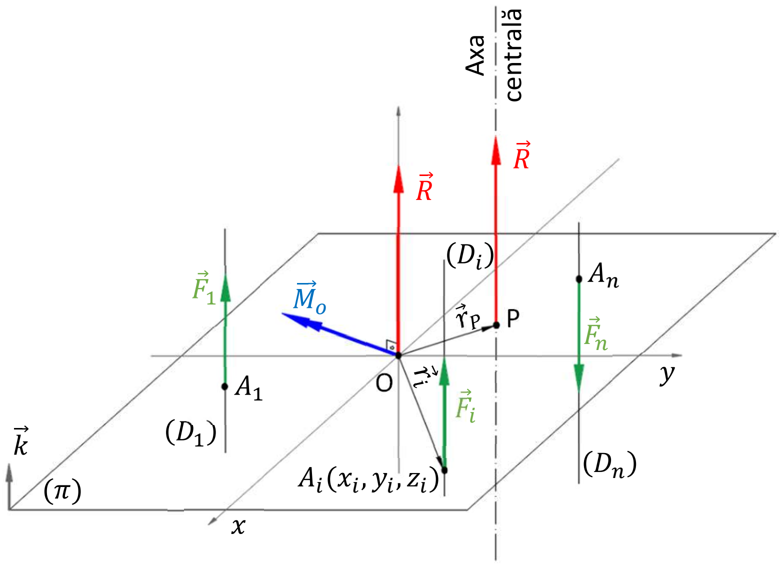


Figura 4 – Sistem de forțe paralele

Fiind dat un sistem de forțe (vectori) paralele $\{\vec{F}_i\}, i = \overline{1,n}$, se cere să se efectueze reducerea acestui sistem de forte.

3.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere

Reducând acest sistem de forțe în punctul O din spațiu, obținem torsorul de reducere:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} \ , \vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \qquad (13)$$

În care vectorul $\vec{R}$ este paralel cu direcția comună a forțelor , iar vectorul $\vec{M}_o$ este conținut într-un plan perpendicular pe direcția comună a forțelor, astfel încât cei doi vectori ai torsorului de reducere sunt perpendiculari $\vec{M}_o \perp \vec{R}$.

3.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

Dacă alegem axa Oz direcția comună a forțelor, atunci expresiile analitice ale vectorilor din relațiile (1) sunt:

$\vec{F}_i = F_{iz}\vec{k} = F_i\vec{k}$

$\vec{r}_i = r_{ix}\vec{\imath} + r_{iy}\vec{\jmath} + r_{iz}\vec{k}$ (14)

$\vec{R} \ = R_z\vec{k}$

$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ 0 & 0 & F_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (r_{iy}F_i) \cdot \vec{\imath} \ - \sum_{i=1}^{n} (r_{ix}F_i) \cdot \vec{\jmath} = M_{ox} \cdot \vec{\imath} + M_{oy} \cdot \vec{\jmath}$$

Atunci :

$$R_z = \sum_{i=1}^{n} F_i,$$

$$|\vec{R}| = R_z = R, M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} r_{iy}F_{i,} \quad M_{oy} = -\sum_{i=1}^{n} r_{ix}F_{i,} \quad |\vec{M}_o| = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}} \quad (15)$$

În care F_i sunt modulele vectorilor forțe.

<u>3.3 Axa centrală a sistemului de forțe</u>

Axa centrală a sistemului de forțe dat, este și ea este paralelă cu direcția comună a forțelor și a vectorului rezultant $\vec{R}$.

Aplicând teorema lui Varignon acestui sistem de forțe obținem:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_P \times \vec{R} = \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} = M_{ox} \cdot \vec{\imath} + M_{oy} \cdot \vec{\jmath} \quad (16)$$

Obținem astfel ecuațiile axei centrale pentru sistemele de forțe paralele, ca intersecție a doua plane:

$$x = -\frac{M_{oy}}{R}, \qquad y = \frac{M_{ox}}{R} \qquad (17)$$

În raport cu punctele axei centrale momentul rezultant este nul , sistemul reducând-se astfel la un vector unic.

<u>În concluzie</u> sistemele de forțe paralele se reduc în puncte din spațiu, care nu aparțin axei centrale la un torsor format din doi vectori: un vector rezultant care

are direcția forțelor și un vector moment rezultant situat într-un plan perpendicular pe direcția forțelor, iar în puncte din spațiu, care aparțin axei centrale, la un vector unic și anume vectorul rezultant $\vec{R}$, paralel cu forțele.

3.4 Forțe paralele legate.

Forțele paralele legate sunt un caz particular al forțelor paralele. Dacă forțele paralele au punctele de aplicație fixe în spațiu, atunci vectorii sistemului sunt vectori legați. Vectorul rezultant este și el un vector legat, iar punctul lui de aplicație se numește **centrul forțelor paralele legate** (CFPL).

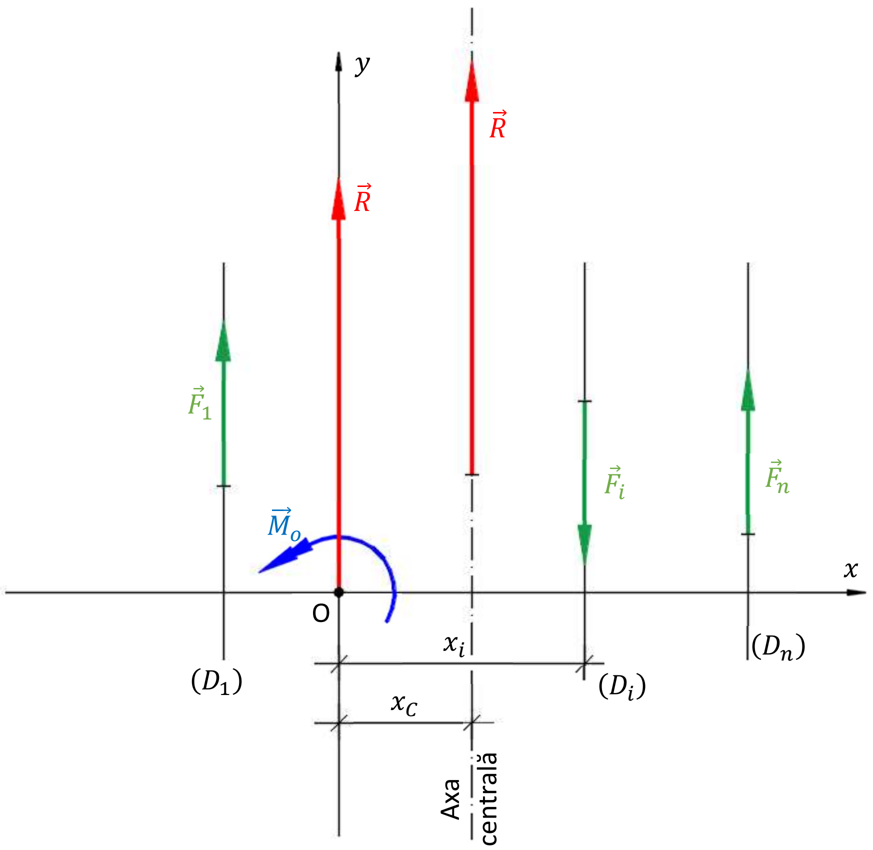


Figura 5 – Sistem de forțe paralele legate

Pentru determinarea poziției CFPL aplicăm sistemului de forțe teorema lui Varignon:

$$\vec{r}_c \times \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (18)$$

În care $\vec{r}_c$ este vectorul de poziție al CFPL în sistemul de referință ales, $\vec{R}$, este vectorul rezultant al sistemului de forțe, $\vec{F_i}$, reprezintă forțele din sistem, iar $\vec{r}_i$, sunt vectorii de poziție ai forțelor din sistem în sistemul de referință ales.

Dacă

$$\vec{F}_i = F_i\,\vec{k}$$

$$\vec{R} \quad = R\,\vec{k} = \sum_{i=1}^{n} F_i\ \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right)\vec{k} \qquad (19)$$

Înlocuind relațiile (19) în relația (18) avem:

$$R \cdot \vec{r}_c \times \vec{k} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \vec{r}_i\right) \times \vec{k} \qquad (20)$$

$$R \cdot \vec{r}_c = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \vec{r}_i\ \right)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \vec{r}_i}{R} \qquad (21)$$

Dacă avem sistem de forțe paralele legate în spațiu (xOyz):

$$\vec{r}_c = x_c \cdot \vec{\imath} + y_c \cdot \vec{\jmath} + z_c \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}_i = x_i \cdot \vec{\imath} + y_i \cdot \vec{\jmath} + z_i \cdot \vec{k}$$

Atunci coordonatele CFPL vor fi:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_i}{R} \quad , \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot y_i}{R} \quad , \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot z_i}{R}.$$

Curs 5

5.Sisteme de forțe (vectori) distribuite

Forțele distribuite sunt acele forțe (vectori) care sunt aplicate în fiecare punct al unui domeniu. Acest domeniu poate fi o linie, o suprafață sau un volum.

Ele sunt cele mai întâlnite sisteme de forțe din domeniul construcțiilor.

5.1 Forțe distribuite pe o curbă

Fiind dată o curbă (C) în spațiu de ecuație:

$x = x(u)$

$y = y(u)$

$z = z(u)$

în care *u* este un parametru variabil.

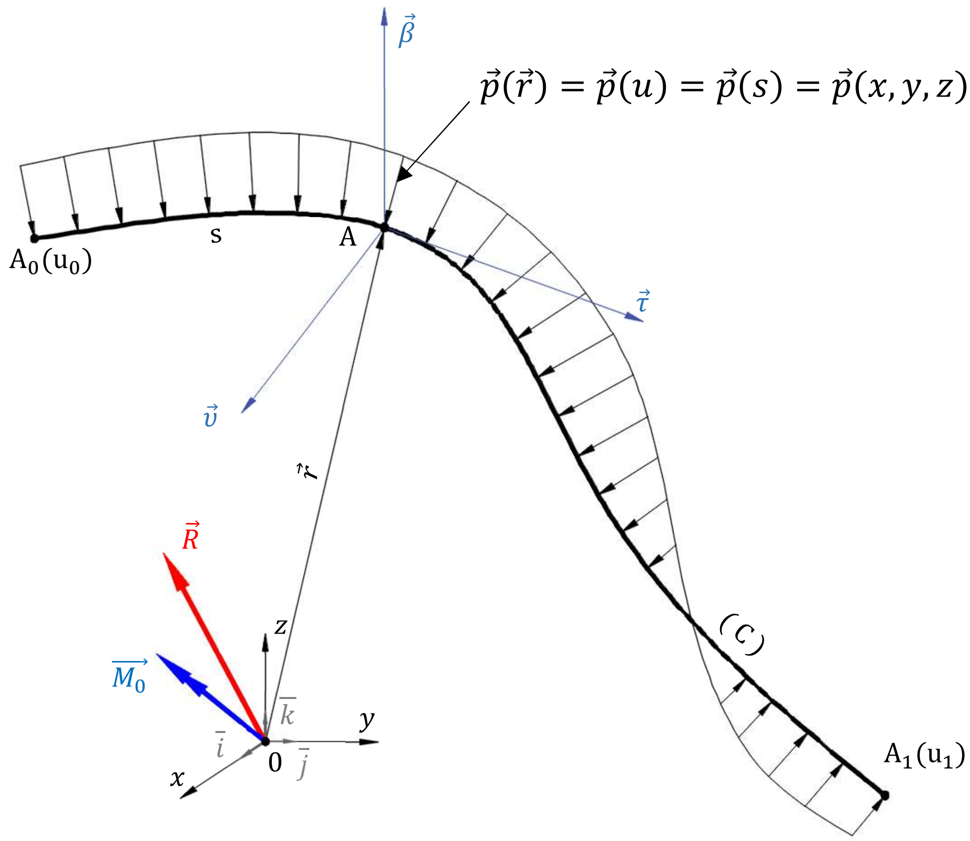


Figura 1 – Forțe distribuite pe o curbă în spațiu

Pe această curbă se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(u) = \vec{p}(s) = \vec{p}(x, y, z)$. Se cere să se reducă acest sistem de forțe în punctul O din spațiu.

5.1.1 Expresia vectoriala a torsorului de reducere

Torsorul din punctul O se determină cu relațiile:

$$\vec{R} = \int_C \vec{p}\,(s)ds$$

$$\vec{M}_O = \int_C \vec{r} \times \vec{p}\,(s)ds = \int_C \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} ds$$

în care

$$\vec{p}(s) = p_x(u) \cdot \vec{\imath} + p_y(u) \cdot \vec{\jmath} + p_Z(u) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

5.1.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

$$\vec{R} \quad = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \int_C p_x\, ds, \qquad R_y = \int_C p_y\, ds, \qquad R_z = \int_C p_z\, ds$$

$$ds = \sqrt{\left(x'(u)\right)^2 + \left(y'(u)\right)^2 + \left(z'(u)\right)^2}\, du$$

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{\imath} + M_{oy}\vec{\jmath} + M_{oz}\vec{k}$$

$M_{ox} = \int_C (yp_z - zp_y)ds,\ \ M_{oy} = \int_C (zp_x - xp_z)ds,\ M_{oz} = \int_C (xp_y - yp_x)ds,$

5.2 Forțe distribuite pe o suprafață

Fiind dată o suprafață (S) în spațiu de ecuație:

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

în care *u, v* sunt parametrii variabili.

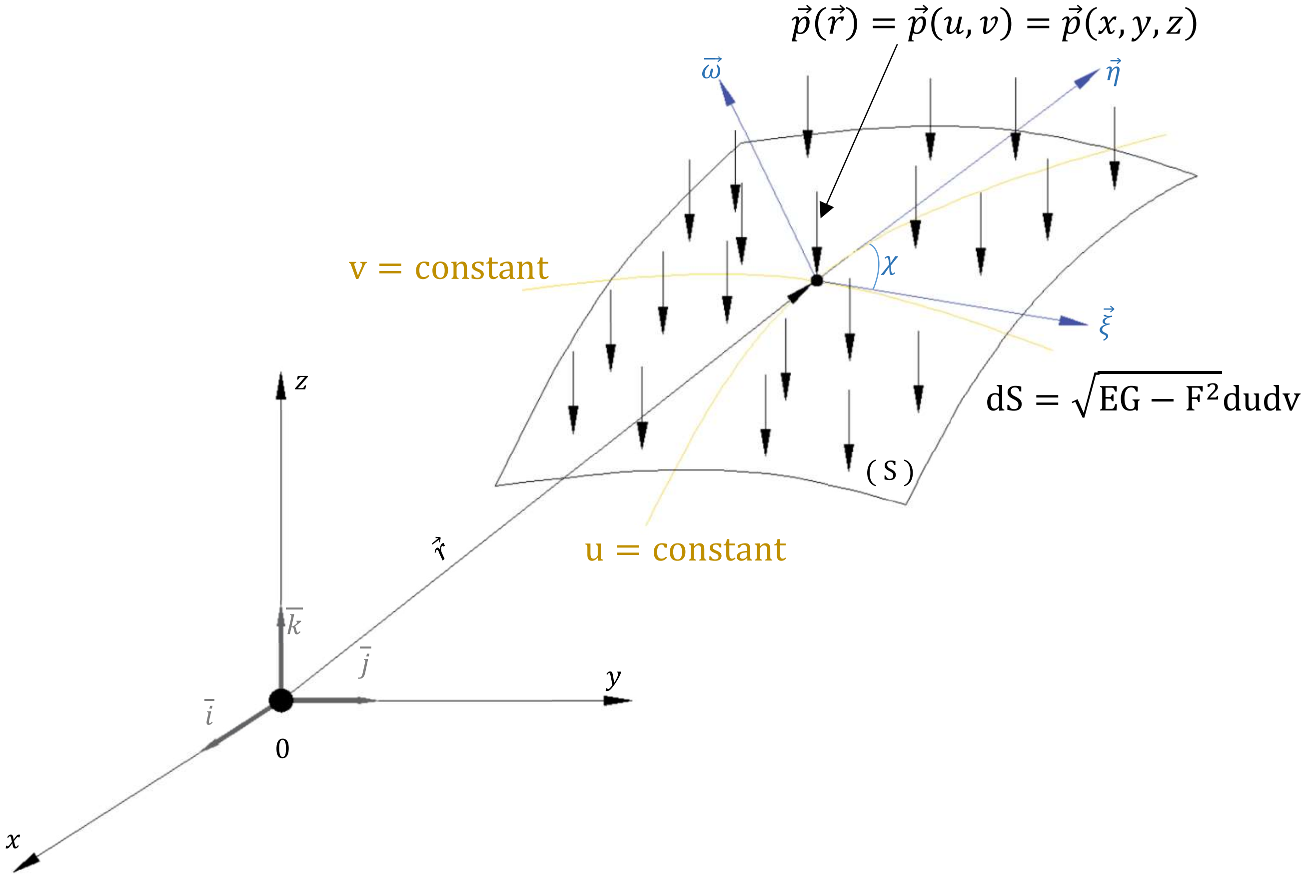


Figura 2 – Forțe distribuite pe o suprafață

Pe această suprafață se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(u,v) = \vec{p}(x,y,z)$. Se cere să se reducă acest sistem de forțe în punctul O din spațiu.

<u>5.2.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere</u>

Torsorul din punctul O se determină cu relațiile:

$$\vec{R} = \iint_S \vec{p}\, dS$$

$$\vec{M}_O \iint_S \vec{r} \times \vec{p} dS = \iint_S \begin{bmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} dS$$

în care

$$\vec{p}(s) = p_x(u,v) \cdot \vec{\imath} + p_y(u,v) \cdot \vec{\jmath} + p_Z(u,v) \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

5.2.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

$$\vec{R} \quad = R_x\vec{\imath} + R_y\vec{\jmath} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \iint_S p_x\, dS, \quad R_y = \iint_S p_y\, dS, \quad R_z = \iint_S p_z\, dS$$

$$dS = \sqrt{EG - F^2} dudv$$

$$E = x'_u + y'_u + z'_u \;,\; G = x'_v + y'_v + z'_v \;,\; F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$$

$$\vec{M}_o = M_{ox}\vec{\imath} + M_{oy}\vec{\jmath} + M_{oz}\vec{k}$$

$$M_{ox} = \iint_S \left(yp_z - zp_y\right)dS,\; M_{oy} = \iint_S (zp_x - xp_z)dS,\; M_{oz} = \iint_S \left(xp_y - \right.$$
$$\left. -yp_x\right)dS$$

5.3 Forțe distribuite pe un volum

Pe volumul (V) se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(x,y,z)$. Se cere să se reducă acest sistem de forțe în punctul O din spațiu.

5.3.1 Expresia vectorială a torsorului de reducere

Torsorul din punctul O se determină cu relațiile:

$$\vec{R} = \iiint\limits_V \vec{p}dV$$

$$\vec{M}_O = \iiint\limits_V \vec{r} \times \vec{p}dV = \iiint\limits_V \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} dV$$

în care

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p} = p_x(x, y, z) \cdot \vec{i} + p_y(u, x, y, z) \cdot \vec{j} + p_Z(x, y, z) \cdot \vec{k}$$

5.3.2 Expresia analitică a torsorului de reducere

$$\vec{R} \quad = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$

$$R_x = \iiint\limits_V p_x dV\,, \quad R_y = \iiint\limits_V p_y dV\,, \quad R_z = \iiint\limits_V p_z dV$$

$$dV = dxdydz$$

$M_{ox} = \iiint_V (yp_z - zp_y)dV\,,\ M_{oy} = \iiint_V (zp_x - xp_z)dS\,, M_{oz} = \iiint_V \big(xp_y -$
$-yp_x\big)d$V

5.4 Forțe distribuite pe un segment de dreaptă de lungime $\boldsymbol{l}$

Se dă segmentul de dreaptă OA de lungime l pe care se află un sistem de forțe distribuite $\vec{p}(x)$. Funcția de distribuire a forțelor se consideră cunoscută.

Se cere să se determine valoarea vectorului rezultant $\vec{R}$, și a poziției lui prin abscisa x_c.

Reducem acest sistem de forțe in punctul O:

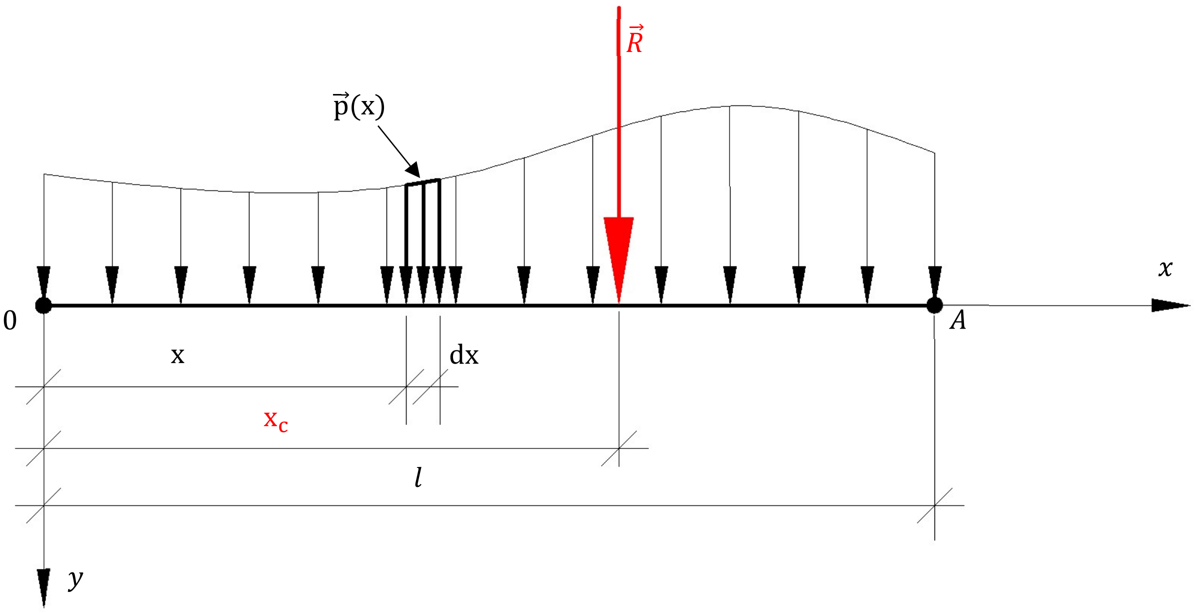


Figura 3 – Forțe distribuite pe o dreaptă

$$R = \int_0^l p\,(x)dx$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot p\,(x)dx$$

Aplicând teorema lui Varignon :

$$x_c \cdot R = M_O$$

$$x_c = \frac{M_O}{R}$$

5.4 Cazuri particulare:

5.4.1. $p(x) = p = constant$ - **forțe uniform distribuite**

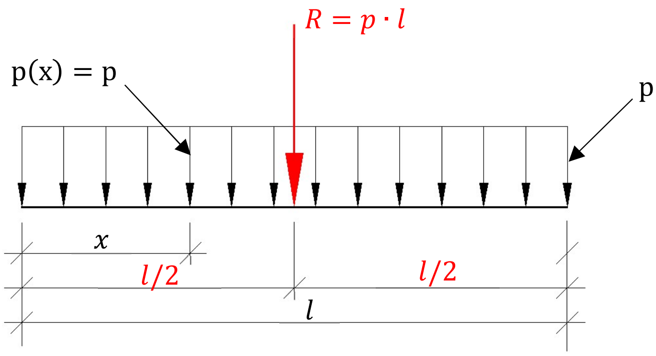


Figura 4 – Forțe uniform distribuite

$$R = \int_0^l p\,dx = p \cdot \int_0^l dx = pl$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot p\,dx = p \cdot \int_0^l x\,dx = p\frac{l^2}{2}$$

$$x_c = \frac{p\frac{l^2}{2}}{pl} = \frac{l}{2}$$

$$R = pl, \qquad x_c = \frac{l}{2}$$

5.4.2. $p(x) = p\frac{x}{l}$ - **forțe liniar distribuite**

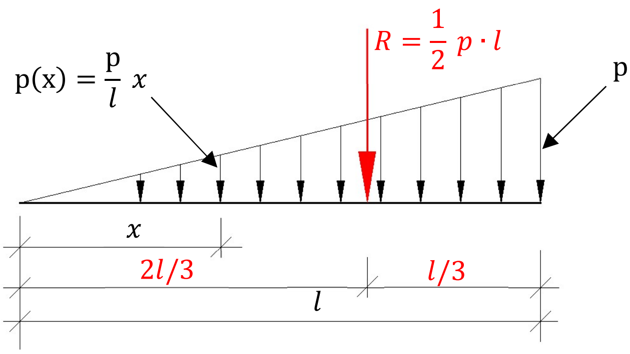


Figura 5 – Forțe liniar distribuite

$$R=\int_0^l x\frac{p}{l}dx=\frac{p}{l}\cdot\int_0^l x\,dx=p\frac{l}{2}$$

$$M_O=\int_0^l x\cdot x\frac{p}{l}dx=\frac{p}{l}\cdot\int_0^l x^2\,dx=p\frac{l^2}{3}$$

$$x_c=\frac{p\frac{l^2}{3}}{p\frac{l}{2}}=\frac{2}{3}\,l$$

$$R=p\frac{l}{2},x_c=\frac{2}{3}\,l$$

5.4.3. $p(x)=p\frac{x^2}{l^2}$ - **forțe parabolic distribuite**

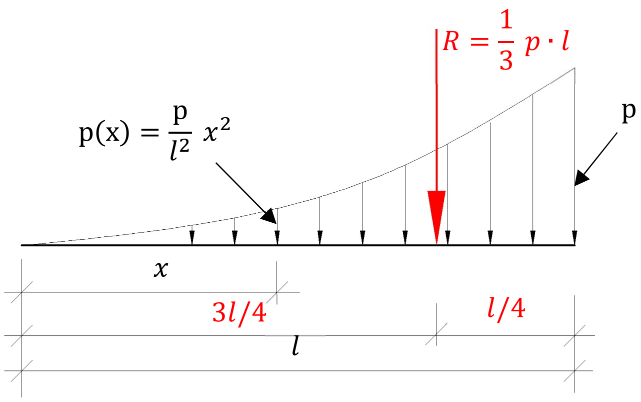


Figura 6 – Forțe parabolic distribuite

$$R=\int_0^l x^2\frac{p}{l^2}\,dx=\frac{p}{l^2}\cdot\int_0^l x^2\,dx=p\frac{l}{3}$$

$$M_O=\int_0^l x\cdot x^2\frac{p}{l^2}dx=\frac{p}{l^2}\cdot\int_0^l x^3\,dx=p\frac{l^2}{4}$$

$$x_c = \frac{p\frac{l^2}{4}}{p\frac{l}{3}} = \frac{3}{4}\ l$$

$$R = p\frac{l}{3}, x_c = \frac{3}{4}\ l$$

5.4.4. $p(x) = p - p\frac{x^2}{l^2}$ - **forțe parabolice complementar distribuite** față de precedentele în raport cu cele uniform distribuite

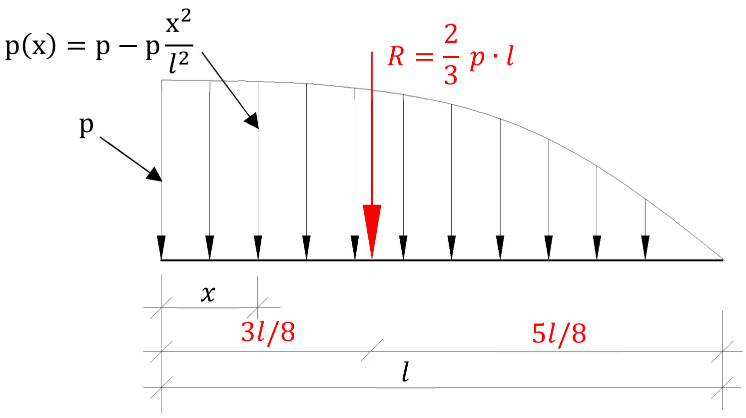


Figura 7 – Forțe parabolic complementar distribuite

$$R = \int_0^l \left(p - x^2\frac{p}{l^2}\right)\, dx = \frac{2}{3}pl$$

$$M_O = \int_0^l x \cdot \left(p - x^2\frac{p}{l^2}\right) dx = p\frac{l^2}{4}$$

$$x_c = \frac{p\frac{l^2}{4}}{2p\frac{l}{3}} = \frac{3}{8}\ l$$

$$R = \frac{2}{3}pl, x_c = \frac{3}{8}\ l$$

Echivalenta cu zero a sistemelor de forțe (vectori)

Sistemele de forțe echivalente cu zero, sau în echilibru, sunt acelea care nu au nici un efect mecanic când sunt aplicate sistemelor materiale. Ele aparțin cazului 3b de reducere conform capitolului “Cazuri de reducere a sistemelor de forte”.

Un sistem de forțe fiind echivalent cu torsorul său, rezultă faptul că un sistem de forțe este echivalent cu 0 dacă are torsorul de reducere nul.

Se demonstrează că dacă, un sistem de forțe are torsorul nul într-un punct din spațiu, atunci el are torsorul nul în toate punctele din spațiu.

$\vec{R} = \vec{0},\ \vec{M}_o = \vec{0}$ (1)

În punctul O’ torsorul sistemului de forțe va fi:

$$\vec{R} = \vec{0}, \qquad \vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R} = \vec{0}$$

Relațiile (1) reprezintă condițiile vectoriale de echivalență cu 0 a sistemelor de forțe și sunt valabile pentru toate sistemele de forțe.

1. Forțe generale sau oarecare

Pentru forțele generale sunt valabile relațiile (1). Dacă cu originea în punctul O alegem un reper cartezian triortogonal, proiectând relațiile (1) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{ox} = 0 \\ M_{oy} = 0 \\ M_{oz} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Relațiile (2) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele generale.

O altă condiție de echivalență cu 0 a sistemelor generale de forțe este că momentele sistemului de forțe în raport cu 3 puncte necoliniare din spațiu să fie nule.

$$\vec{M}_1 = \vec{0}, \quad \vec{M}_2 = \vec{0}\,, \ \vec{M}_3 = \vec{0}$$

Tot pentru sistemele de forțe generale, sunt valabile și ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{cases} M_{\Delta_1} = 0 \\ M_{\Delta_2} = 0 \\ \vdots \\ M_{\Delta_6} = 0 \end{cases}$$

în care $\Delta_1, \Delta_{2,\dots,}\Delta_6$ sunt 6 axe necoplanare. Ele pot fi muchiile unui tetraedru oarecare.

2. Forțe concurente într-un punct O din spațiu

$$\vec{R} = \vec{0} \qquad (3)$$

Proiectând relațiile (1) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Relațiile (4) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele concurente.

3. Forțe coplanare

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases} \qquad (5)$$

Dacă planul xOy este planul forțelor, proiectând relațiile (5) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_{oz} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Relațiile (6) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele coplanare.

O altă condiție de echivalență cu 0 a sistemelor coplanare de forțe este ca momentele sistemului de forțe în raport cu 3 puncte necoliniare din planul forțelor să fie nule.

$\vec{M}_1 = \vec{0}, \quad \vec{M}_2 = \vec{0}\ , \ \vec{M}_3 = \vec{0}$

Tot pentru sistemele de forțe coplanare, sunt valabile și următoarele ecuații scalare de echilibru:

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ M_B = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \end{cases}$$

în care A si B sunt două puncte din planul forțelor, iar dreapta AB nu este perpendiculară pe axa Ox.

4. <u>Forțe paralele</u>

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_o = \vec{0} \end{cases} \qquad (7)$$

Dacă axa Oz este direcția comună a forțelor, proiectând relațiile (5) pe cele trei axe avem:

$$\begin{cases} R_z = 0 \\ M_{ox} = 0 \\ M_{oy} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Relațiile (8) reprezintă ecuațiile scalare de echilibru pentru forțele paralele.