Hodișan Titu Blaga Florin Gabriel Milchiș Tudor

MECANICĂ

Cinematică, dinamică și mecanică analitică

Teorie

2024

Capitolul I – CINEMATICĂ

INTRODUCERE ÎN CINEMATICĂ

Cinematica este partea mecanicii care studiază mişcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte materiale, corpurilor solide sau ale sistemelor de corpuri, fără a lua în considerare proprietățile lor inerţiale (mase, momente de inerție), forțele și momentele care acționează asupra lor sau care rezultă ca efect al mișcării.
Kinematics, branch of physics and a subdivision of classical mechanics concerned with the geometrically possible motion of a body or system of bodies without consideration of the forces involved (i.e., causes and effects of the motions) (Britannica, 1998).
Cuvântul „cinematica” derivă din substantivele grecești Κινῆματ (kinemat) sau κινῆμα (kinema - deplasare, mișcare), care la rândul lor derivă din verbul κινεῖν (kinein - a mișca).
Mișcarea este o proprietate intrinsecă a materiei în sensul că nu există materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mișcarea fără suport material.
Mișcarea este definită în mecanică, ca schimbarea în timp a poziției sau a orientării unui sistem material în raport cu un alt sistem material. Mișcarea de-a lungul unei linii sau curbe se numește translație, iar mișcarea care schimbă orientarea corpului se numește rotație. Mișcarea generală este o combinație între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.
Modificarea stării de mişcare a unui sistem material este o consecinţă a acţiunii altor sisteme materiale sau ca rezultat al interacţiunii unor părţi din interiorul sistemului, iar cinematica studiază această modificare doar pur descriptiv fără a lua în considerare cauzele care o determină.
Când spunem că un sistem material este în repaus sau în mişcare se subînţelege că repausul şi mişcarea au loc în raport cu alte sisteme materiale. Astfel, un corp imobil pe suprafaţa Pământului este în repaus în raport cu Pământul, dar Pământul este în mişcare faţă de Soare, etc., astfel încât poziţia şi mişcarea sunt relative întrucât se raportează la un sistem de referinţă (reper) care nu este fix. În Cinematică ne raportăm la (i) un sistem de referinţă care poate fi presupus în mod convenţional fix, iar mişcarea înregistrată faţă de acest sistem de referinţă se numeşte **mişcare absolută**, sau la (ii) un sistem de referinţă mobil, în acest caz mişcarea se numeşte **mişcare relativă**.
Mişcarea cu viteză apropiată de viteza luminii trebuie tratată folosind teoria relativităţii, iar mişcarea corpurilor foarte mici (ex. electroni) trebuie tratată folosind teoriile mecanicii cuantice.
Dacă, în timpul mişcării, corpul poate să ocupe orice poziţie în spaţiu, mişcarea se numeşte **mişcare generală**, iar dacă acesta ocupă, în timpul mişcării, poziţii particulare în spaţiu, mişcarea se numeşte **mişcare particulară.**
În cinematică se folosesc noţiunile fundamentale de **spaţiu** şi **timp** şi se face ipoteza că spaţiul este absolut, infinit, euclidian, tridimensional, izotrop, iar timpul, notat în cinematică cu t, este absolut, continuu, unidimensional, independent de spaţiu şi de orice altă mărime şi ireversibil.
Problema fundamentală a cinematicii este următoarea: cunoscând în orice moment poziţia unui sistem material faţă de un reper, să se determine elementele mişcării şi anume **traiectoria, viteza şi acceleraţia.**

Scurt istoric

Cinematica s-a impus ca știință distinctă în 1862 prin lucrarea lui **M.Resal** intitulată **Cinematica pură.**

André-Marie Ampère (1775-1836), fizician și matematician francez, a fost primul care a arătat necesitatea ca Dinamica să fie precedată de o teorie a proprietăților geometrice ale corpurilor în mișcare. Aceste proprietăți au fost expuse în 1838 la Facultatea de Științe din Paris de **Jean-Victor Poncelet** (1788 - 1867) matematician și inginer francez.
Cinematica are numeroase aplicații geometrice printre care se pot aminti: metoda construcției tangentelor a lui **Gilles de Roberval** (1602–1675), teoria centrului instantaneu de rotație a lui **Michel Chasles** (1793 - 1880), determinarea curburii unei curbe plane, etc.

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

Introducere în cinematica punctului material

O reprezentare simplificată a unui sistem sau a unui proces fizic se numește *model fizic*. Modelele fizice și modelarea sunt instrumente esențiale nu numai în fizică ci și în întreg procesul cunoașterii lumii înconjurătoare. Descrierea matematică a unui model fizic simplu este de asemenea simplă. Cu cât recurgem la modele tot mai simple cu atât ne depărtăm de realitate. Lumea reală fiind diferită de modelele cu care operăm și rezultatele pe care le obținem sunt, într-un anumit sens, incomplete. Recurgerea la modele simple este necesară în faza incipientă a cunoașterii. În fizică sunt cunoscute modele care au evoluat în procesul cunoașterii. Cele mai cunoscute sunt modelul atomului, al nucleului, modelul de fluid sau de solid rigid, modele de unde etc.

Cel mai simplu model din mecanică este **punctul material.** Când punctul material este în mișcare el se numește și **mobil.**

Modelul punctului material se poate aplica atât unor corpuri de dimensiuni și mase mari (corpuri cerești), cât și unor corpuri de dimensiuni microscopice (atomi, electroni, etc). Rezultatele din mecanica punctului material se extrapolează (cu corecțiile necesare) când se trece la studiul mișcării unor corpuri ce nu pot fi reduse la un punct și care pot fi considerate ca o mulțime de puncte materiale **(sistem de puncte materiale).**

Elementele mișcării punctului material

• Traiectoria

Mișcarea punctului material o raportăm la un reper pe care îl considerăm fix (Fig. 1.1). Poziția punctului material față de reper este dată de vectorul de poziție **r** care are originea în originea reperului și vârful în punctul material studiat. Poziția punctului material este dată de trei scalari care reprezintă distanțe sau distanțe și unghiuri. Traiectoria punctului material este **locul geometric al pozițiilor succesive** ocupate de mobil în mișcarea sa și se notează cu T. În general traiectoria punctului material este o curbă în spațiu. În mecanica clasică se consideră că traiectoria sistemului material este bine determinată, iar mulțimea pozițiilor succesive ale punctului pe parcursul mișcării este continuă.
Fie un punct material care se deplasează pe o traiectorie oarecare. Poziția sa se determină cu ajutorul vectorului de poziție **r.** Legea de mișcare este dată de ecuația vectorială:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathrm{t}) \tag{1.1}$$

Dacă se alege ca reper un sistem de axe cartezian triortogonal și se proiectează ecuația (1.1) pe axe se obține:

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= \mathrm{x}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{y} &= \mathrm{y}(\mathrm{t}) \\ \mathrm{z} &= \mathrm{z}(\mathrm{t}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ecuațiile (1.2) se numesc ecuații parametrice ale traiectoriei sau ecuațiile finite ale mișcării, iar x, y și z sunt funcții scalare de timp. Dacă se elimină parametrul *t* (timpul) din aceste ecuații se obține ecuația traiectoriei sub formă implicită:

$$\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 0 \tag{1.3}$$

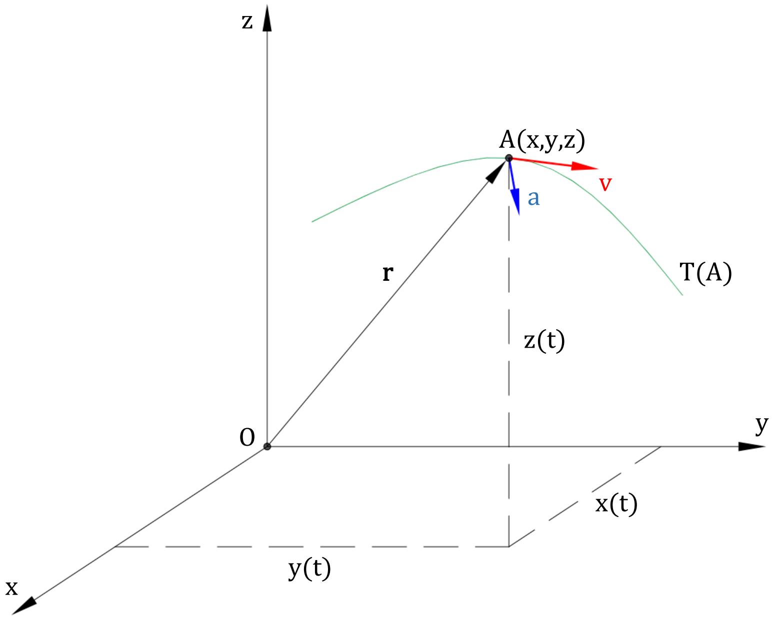


Figura 1.1

- Deplasare finită și deplasare elementară

Mișcarea efectuată de punctul material într-un interval finit de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ se numește **mişcare finită**, iar deplasarea punctului material în acest interval de timp $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ se numește **deplasare finită** (Fig 1.2). Mişcarea efectuată de punctul material într-un interval infinitezimal (elementar) de timp dt se **numeşte mişcare instantanee sau elementară**, iar deplasarea punctului material în acest interval de timp, d**r** se numește **deplasare elementară** (Fig 1.2).

$$d\mathbf{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} \tag{1.4}$$

- Viteza

Viteza este o mărime vectorială atașată punctului care indică direcția și sensul în care are loc mișcarea.
Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba T(A), la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$ cu vectorii de poziție $\mathbf{r_1}$ și $\mathbf{r_2}$. Elementul de arc A_1A_2, de pe traiectoria punctului, se poate asimila, în intervalul de timp Δt foarte mic, cu elementul de coardă A_1A_2 astfel încât:

$$|d\mathbf{r}| \cong \Delta s \tag{1.5}$$

(i) Raportul $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ se numește **viteză medie** pe o porțiune Δs de traiectorie (Fig 1.2)

$$\mathbf{v_m} = \frac{\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \tag{1.6}$$

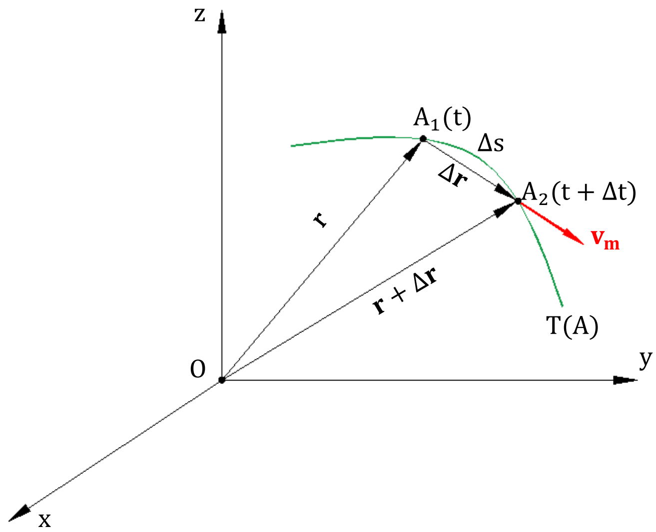


Figura 1.2

(ii) Prin trecerea la limită în relația (1.6) când intervalul de timp $\Delta t \to 0$ rezultă **viteza instantanee v** ca fiind viteza punctului la momentul t al mișcării:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \tag{1.7}$$

Viteza instantanee este o mărime vectorială și este egală cu derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului de poziție a punctului material, fiind un vector tangent la traiectorie în poziția punctului pe traiectorie la momentul t (Fig. 1.3).
Derivata de ordinul I în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, cu un punct deasupra funcțiilor, derivata de ordinul II în raport cu timpul a funcțiilor scalare sau vectoriale se va nota, cu două puncte deasupra funcțiilor s.a.m.d.
Din relația (1.7) rezultă expresia deplasării elementare:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \tag{1.8}$$

Dimensiunea și unitatea de măsura a vitezei sunt:

$$[v] = \frac{[\Delta s]}{[\Delta t]} = LT^{-1}$$
$$[v]_{SI} = 1\ m\cdot s^{-1} \tag{1.9}$$

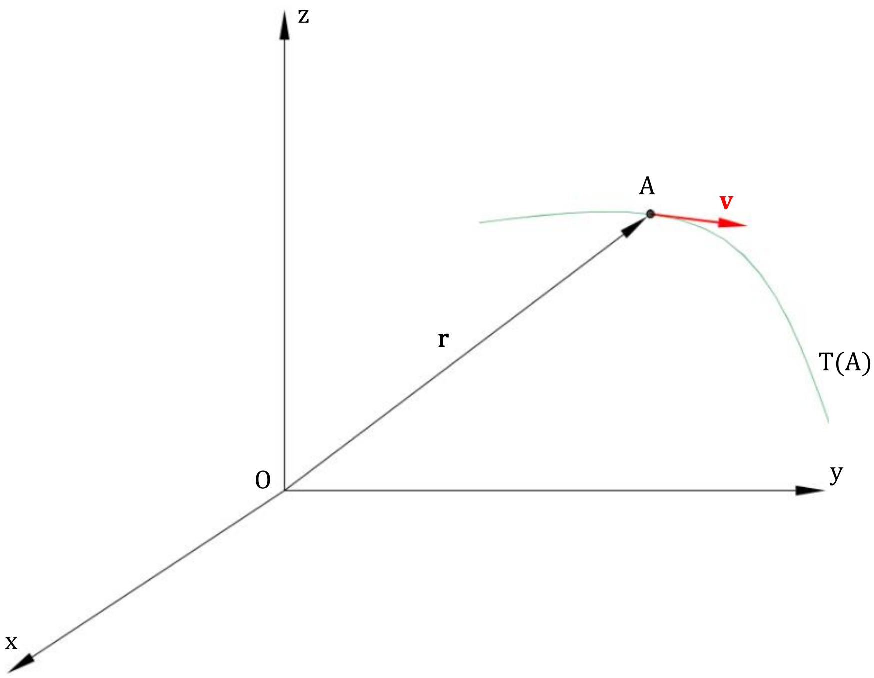


Figura 1.3

(iii) Poziția unui punct pe traiectorie se poate preciza cu ajutorul unui unghi la centru θ, (care se mai numește și spațiu unghiular) și a razei vectoare (coordonate polare). Considerând ca reper raza vectoare OA_0, legea de mișcare a punctului A este definită de funcția: $\theta = \theta(t)$ (Fig. 1.4).
Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba plană (T_A), la momentele $t_1 = t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$ cu unghiurile la centru θ și $\theta + \Delta\theta$. Variația spațiului unghiular în intervalul de timp Δt este $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.
Raportul

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.10}$$

se numește **viteză unghiulară medie** a punctului A.
Prin trecerea la limită în relația (1.10) când intervalul de timp $\Delta t \rightarrow 0$ rezultă **viteza unghiulară instantanee** ω ca fiind viteza unghiulară a punctului la momentul t al mișcării:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{1.11}$$

Vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ este perpendicular pe planul traiectoriei mobilului și are sensul dat de regula burghiului sau a mâinii drepte.
Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei unghiulare sunt:

$$\begin{gathered} [\omega] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta t]} = T^{-1} \\ [\omega]_{SI} = 1\ \mathrm{rad} \cdot s^{-1} = 1\ s^{-1} \end{gathered} \tag{1.12}$$

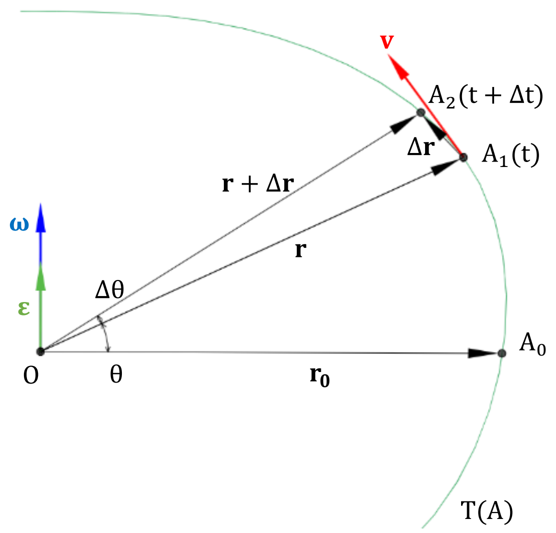


Figura 1.4

- Accelerația

Accelerația este o mărime vectorială atașată punctului în mișcare și arată modul de variație al vitezei acestui punct în decursul mișcării, ca modul, direcție și sens.
Se consideră două poziții succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe curba T(A), la momentele $t_1= t$ și respectiv $t_2 = t + \Delta t$, având vitezele $\mathbf{v}_1(t_1)$ și $\mathbf{v}_2(t_2)$ (Fig. 1.5).
Variația vitezei în intervalul de timp Δt este $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2(t_2) - \mathbf{v}_1(t_1)$

(i) Raportul $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ măsoară variația vitezei în timp și se numește **accelerație medie** pe o porțiune Δs de traiectorie.

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{1.13}$$

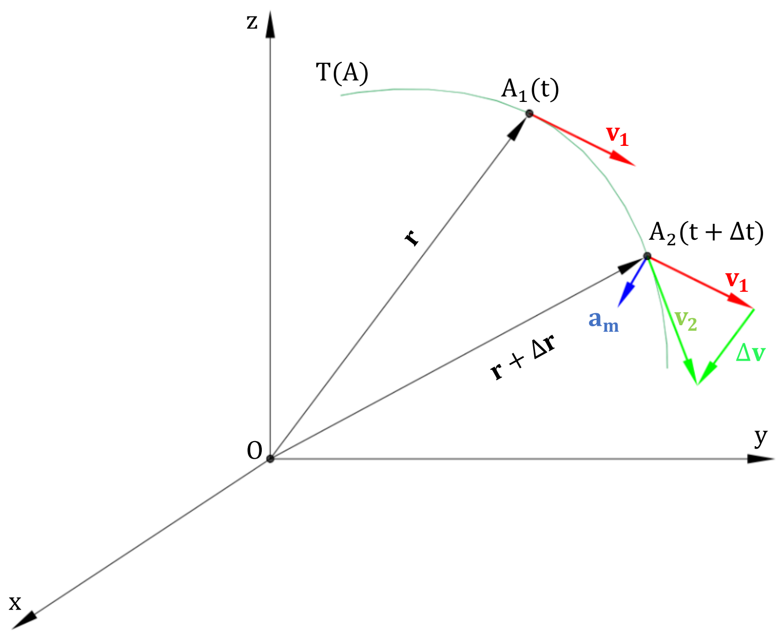


Figura 1.5

(ii) Prin trecerea la limită în relația (1.17) când intervalul de timp $\Delta t \to 0$ rezultă **accelerația instantanee a** ca fiind accelerația la momentul t al mișcării;

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} \tag{1.14}$$

și este egală cu derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului viteză instantanee și cu derivata de ordinul II în raport cu timpul a vectorului de poziție **r** (Fig 1.6).
Dacă se continuă derivarea în raport cu timpul, a vectorului de poziție **r**, se obțin vectori care se numesc accelerații de ordin superior. Astfel, derivata a treia în raport cu timpul a vectorului de poziție, se numește accelerație de ordinul al doilea sau supraaccelerație.
Dimensiunea și unitatea de măsură a accelerației sunt:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = LT^{-2} \qquad [a]_{SI} = 1\ m \cdot s^{-2} \tag{1.15}$$

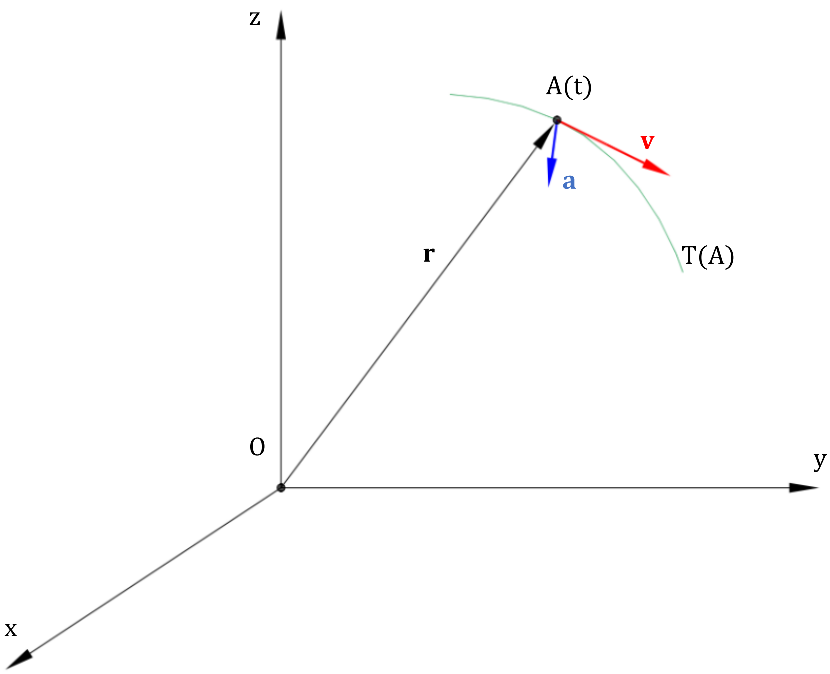


Figura 1.6

(iii) Se definește **accelerația unghiulară** ca variația în timp a vectorului viteză unghiulară.
Considerând pozițiile succesive A_1 și A_2 ale punctului A în mișcare pe traiectorie, la momentul t și respectiv $t+\Delta t$, având vitezele unghiulare ω_1 și ω_2, variația vitezei unghiulare în intervalul de timp Δt este $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.
Raportul

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1.16}$$

măsoară variația vitezei unghiulare în timp și se numește **accelerație unghiulară medie.** Prin trecerea la limită în relația (1.20) când intervalul de timp $\Delta t \to 0$ și sau $A_2 \to A_1$ rezultă accelerația unghiulară instantanee:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\theta} \tag{1.17}$$

Vectorul accelerație unghiulară are aceiași direcție ca și vectorul viteză unghiulară în cazul traiectoriilor plane ale mobilului (Fig 1.4).

Dimensiunea și unitatea de măsură a vitezei unghiulare sunt:

$$[\varepsilon] = \frac{[\Delta\omega]}{[\Delta t]} = T^{-2}$$
$$[\varepsilon]_{SI} = 1\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-2} \qquad (1.18)$$

Componentele vectorilor viteză și accelerație

- Coordonate carteziene

Vectorul de poziție al punctului material are expresia $\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ în care x, y și z sunt coordonatele punctului material A raportate la un sistem de axe cartezian triortogonal.
Aceste coordonate sunt funcții de timp și reprezintă **ecuațiile finite ale mișcării punctului** (Fig 1.7).

$$x = x(t)$$
$$y = y(t) \qquad (1.19)$$
$$z = z(t)$$

Vectorul **viteză instantanee** are expresia:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k} \qquad (1.20)$$

Din relația (1.20) rezultă **componentele scalare** ale vectorului viteză instantanee care sunt funcții scalare de timp:

$$v_x = \dot{x}(t)$$
$$v_y = \dot{y}(t) \qquad (1.21)$$
$$v_z = \dot{z}(t)$$

Modulul vectorului viteză instantanee este:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2} \qquad (1.22)$$

Direcția acestui vector este dată de cosinușii directori:

$$\cos(\sphericalangle\mathbf{v},\mathbf{i}) = \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}$$
$$\cos(\sphericalangle\mathbf{v},\mathbf{j}) = \frac{v_y}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}} \qquad (1.23)$$
$$\cos(\sphericalangle\mathbf{v},\mathbf{k}) = \frac{v_z}{|\mathbf{v}|} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}}$$

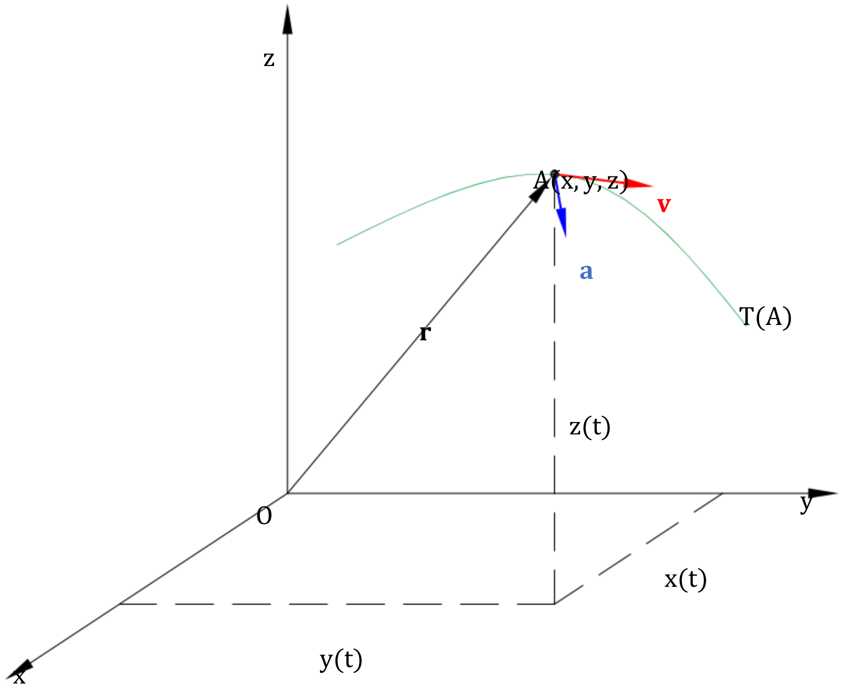


Figura 1.7

- Coordonate cilindrice

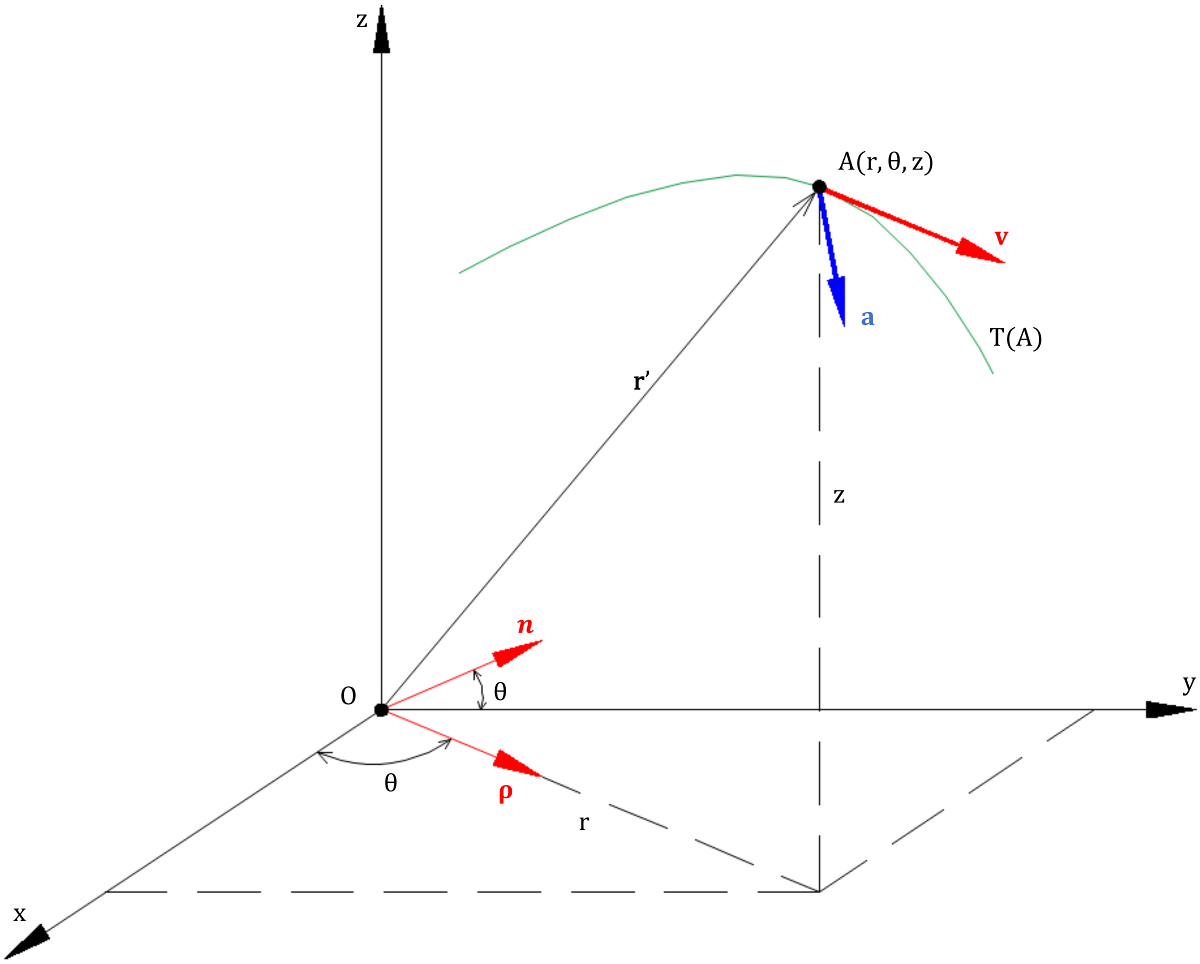


Figura 1.8

Vectorul de poziție al punctului material are expresia $\mathbf{r}' = \mathrm{r}(t) \cdot \boldsymbol{\rho} + z(t) \cdot \mathbf{k}$ în care r, θ, z, sunt coordonatele cilindrice ale punctului material A raportate la un sistem de axe. Aceste coordonate sunt funcții de timp și reprezintă **ecuațiile finite ale mișcării punctului** (Fig.1.8)

$$\begin{aligned} r &= r(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Vectorul *viteză instantanee* are expresia

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{r}\,\boldsymbol{\rho} + r\,\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{z}\,\mathbf{k} + z\,\dot{\mathbf{k}} \tag{1.25}$$

Dacă raportăm versorii $\boldsymbol{\rho}$ și $\mathbf{n}$, ortogonali, la sistemul de referință cartezian putem scrie:

$$\boldsymbol{\rho} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} \tag{1.26}$$

$$\mathbf{n} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \tag{1.27}$$

Prin derivare se obține:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = (-\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta}\,\mathbf{n} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}' = \dot{r}\,\boldsymbol{\rho} + r\dot{\theta}\,\mathbf{n} + \dot{z}\,\mathbf{k} = v_\rho\,\boldsymbol{\rho} + v_n\,\mathbf{n} + v_z\,\mathbf{k} \tag{1.29}$$

Din relația (1.29) rezultă **componentele scalare** ale vectorului viteză instantanee:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \dot{r} \\ v_n &= r\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Modulul vectorului viteză instantanee este:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_\rho^2 + v_n^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2} \tag{1.31}$$

Vectorul *accelerație instantanee* are expresia

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{r}\,\boldsymbol{\rho} + \dot{r}\,\dot{\boldsymbol{\rho}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{n} + r\ddot{\theta}\,\mathbf{n} + r\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{n}} + \ddot{z}\,\mathbf{k} + \dot{z}\,\dot{\mathbf{k}} \tag{1.32}$$

Știind că $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\theta} \cdot \mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\theta} \cdot \boldsymbol{\rho}$
Relația (1.32) devine

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{\rho} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{n} + \ddot{z}\,\mathbf{k} = a_\rho\,\boldsymbol{\rho} + a_n\,\mathbf{n} + a_z\,\mathbf{k} \tag{1.33}$$

Din relația (1.45) rezultă **componentele scalare** ale vectorului **accelerație instantanee:**

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_n &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z &= \ddot{z} \end{aligned} \tag{1.34}$$

Modulul vectorului accelerație instantanee este:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\rho^2 + a_n^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2} \tag{1.35}$$

- Coordonate intrinseci

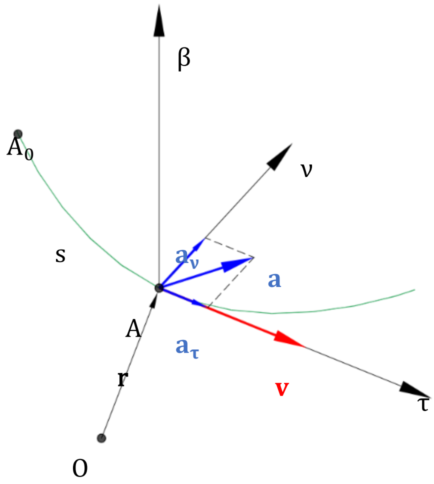


Figura 1.9

Coordonata intrinsecă a punctului material este *s* (Fig. 1.9). Această coordonată este funcție de timp și reprezintă **ecuaţia finită a mişcării punctului**

$$s = s(t) \tag{1.36}$$

Mişcarea o raportăm la un reper mobil legat de punct a cărui axe sunt: tangenta la traiectorie $\boldsymbol{\tau}$, normala $\boldsymbol{\upsilon}$ și binormala $\boldsymbol{\beta}$, numit triedrul lui Frenet.
Vectorul **viteză instantanee** are expresia:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\, \boldsymbol{\tau} \tag{1.37}$$

$$\mathbf{v} = v_\tau\, \boldsymbol{\tau} + v_\nu\, \boldsymbol{\nu} + v_\beta\, \boldsymbol{\beta} \tag{1.38}$$

În relația (1.37) s-a ţinut seama de prima formulă a lui Frenet[1].

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau} \tag{1.39}$$

Din relațiile (1.37) și (1.38) rezultă *componentele scalare* ale vectorului viteză instantanee:

$$\begin{aligned} v_\tau &= \dot{s} \\ v_\nu &= 0 \\ v_\beta &= 0 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Din relația (1.37) se observă ca vectorul viteză este dirijat după tangenta la traiectoria punctului.
Vectorul **acceleraţie instantanee** are expresia:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s}\, \boldsymbol{\tau} + \dot{s}\, \dot{\boldsymbol{\tau}} \tag{1.41}$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\,\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{d\,\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} \tag{1.42}$$

În relația (1.42) s-a ţinut seama de cea de-a doua formulă a lui Frenet[1].

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} \tag{1.43}$$

În relația (1.43) ρ este raza de curbură a traiectoriei.
Înlocuind relația (1.42) în formula accelerației (1.41) obținem,

[1] Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900)

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\boldsymbol{\nu} \tag{1.44}$$

de unde rezultă componentele scalare ale vectorului accelerație.

$$\begin{aligned} a_\tau &= \dot{v} = \ddot{s} \\ a_\nu &= \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \\ a_\beta &= 0 \end{aligned} \tag{1.45}$$

Din relațiile (1.45) rezultă câteva observații legate de mișcarea punctului:

- accelerația tangențială măsoară variația vitezei în timp $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$
-nu există mișcare pe traiectorie curbă fără accelerație, pentru $v = \text{constant} \rightarrow\ a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,\ a_\nu = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$
- componenta normală a accelerației a_ν este îndreptată spre centrul de curbură al traiectoriei, ea se mai numește și accelerație centripetă
- vectorul accelerație instantanee este situat în planul osculator al curbei traiectorie $(a_\beta = 0)$

Modulul vectorului accelerație este:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = \sqrt{(\ddot{s})^2 + \left(\frac{\dot{s}^2}{\rho}\right)^2} \tag{1.46}$$

CINEMATICA MIȘCĂRILOR PARTICULARE ALE PUNCTULUI MATERIAL

Mișcarea rectilinie

Este mișcarea în care traiectoria este o dreaptă (Fig. 1.10). Considerăm o axă Ox de versor $\mathbf{u}$ pe care s-a stabilit un sens pozitiv și un punct A care se mișcă pe axă. Vectorul de poziție al punctului pe axă este $\mathbf{r} = \mathbf{OA} = x\mathbf{u}$.
Viteza punctului este $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{u}$, iar accelerația $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{x}\mathbf{u}$.
Se observă că viteza și accelerația sunt vectori coliniari și dirijați de-a lungul traiectoriei.
Dacă vectorul viteză și vectorul accelerație au același sens mișcarea se numește accelerată, iar dacă acești vectori sunt de sens contrar mișcarea se numește încetinită.

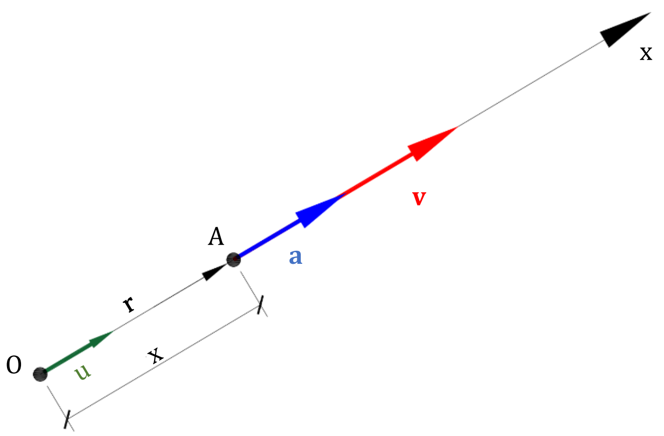


Figura 1.10

Cazurile particulare ale mișcării rectilinii sunt:

Mișcarea rectilinie și uniformă este mişcarea în care viteza este constantă pe tot parcursul mişcării (Fig 1.11).

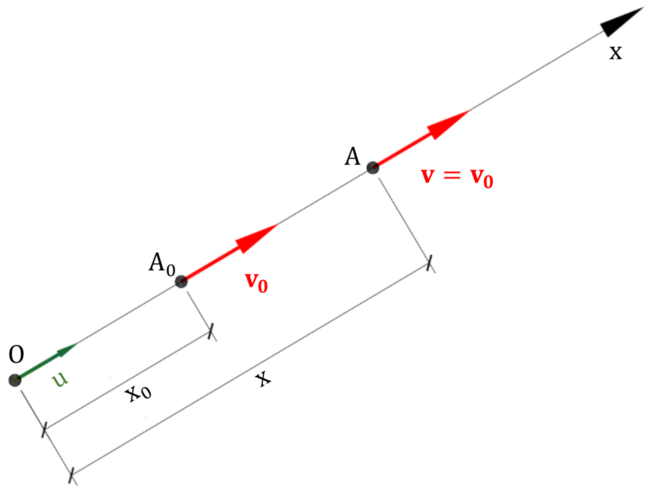


Figura 1.11

$v = v_0$ constant, $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$
Știind că $\frac{dx}{dt} = v$, rezultă:

$$dx = v_0 dt \tag{1.47}$$

Dacă se integrează relația (1.47) rezultă:

$$x = v_0 t + C \tag{1.48}$$

Constanta C se determină din condițiile inițiale ale mişcării:

$$t = t_0 = 0$$
$$x = x_0$$

Relația (1.48) devine

$$x = v_0 t + x_0 \tag{1.49}$$

În concluzie mişcarea rectilinie și uniformă se caracterizează prin următoarele elemente:
$x = v_0 t + x_0$ - spațiul parcurs este o funcție de gradul întâi în *t*,
$v = \dot{x} = v_0$ - viteza constantă
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ - accelerația nulă

Mișcarea rectilinie uniform variată (Fig. 1.12) este mişcarea în care accelerația este constantă pe tot parcursul mişcării.

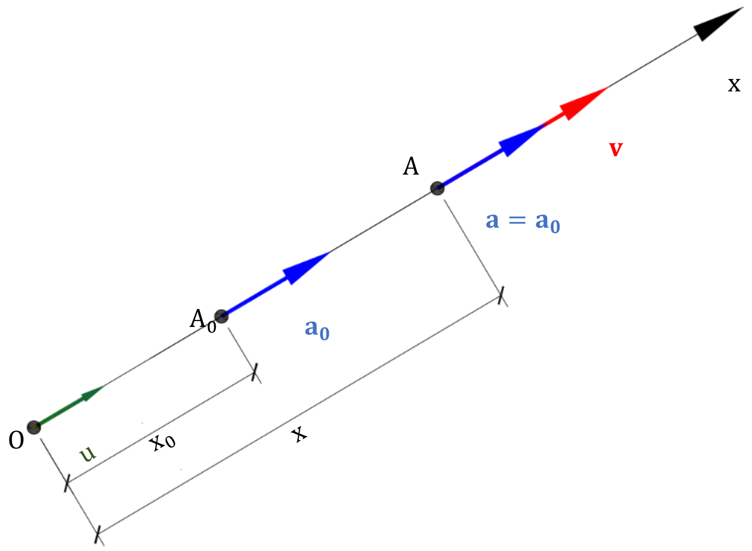


Figura 1.12

$a = a_0$ – constant.
Știind că

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 \qquad (1.50)$$

Dacă se integrează relația (1.50) rezultă:

$$\frac{dx}{dt} = v = a_0 t + C_1 \qquad (1.51)$$

Constanta C_1 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$t = t_0 = 0$
$v = v_0$
$C_1 = v_0$

Relația (1.51) devine:

$v = a_0 t + v_0$

Dacă se integrează relația (1.51) rezultă:

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + C_2 \qquad (1.52)$$

constanta C_2 se determină din condițiile inițiale ale mișcării:

$t = t_0 = 0$
$x = x_0$
$C_2 = x_0$

Relația (1.52) devine:

$$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 \qquad (1.53)$$

În concluzie mișcarea rectilinie uniform variată se caracterizează prin următoarele elemente:

$x = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$ - spațiul parcurs este o funcție de gradul doi în t
$v = a_0 t + v_0$ - viteza este o funcție de gradul întâi în t
$a = a_0$ - accelerația este constantă

Dacă vectorul viteză şi vectorul accelerație au acelaşi sens mişcarea se numeşte uniform accelerată, iar dacă aceşti vectori sunt de sensuri contrarii mişcarea se numeşte uniform încetinită.

Mișcarea circulară

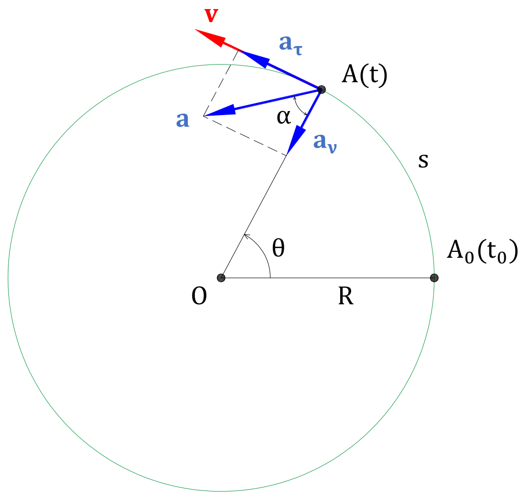


Figura 1.13

În coordonate intrinseci

$$s = s(t) = R \cdot \theta(t) \tag{1.54}$$

viteza se obține derivând relația (1.54)

$$v = \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \tag{1.55}$$

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau} \tag{1.56}$$

Accelerația se calculează derivând relația (1.56)

$$\begin{gathered}\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\dot{s}}{dt}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\boldsymbol{\nu} = a_\tau\boldsymbol{\tau} + a_\nu\,\boldsymbol{\nu}\\ a_\tau = \ddot{s} = R\dot{\omega} = R\varepsilon\\ a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2\end{gathered} \tag{1.57}$$

Modulul vectorului accelerație va fi

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_\nu^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{1.58}$$

Cu ω s-a notat variația spațiului unghiular $\dot{\theta}$, numită viteză unghiulară a punctului. Cu ε s-a notat variația vitezei unghiulare $\dot{\omega}$, numită accelerație unghiulară.
Direcția vectorului accelerație este dată de unghiul α făcut cu raza vectoare OA:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \tag{1.59}$$

CINEMATICA CORPULUI SOLID RIGID

2.1. Introducere

Corpul rigid este un element important în mecanică și semnifică un corp material în formă fixă, compus din particule elementare pentru care **distanţa dintre oricare două puncte ale sale nu se modifică în timp şi în spaţiu.**
Conceptul de corp rigid are avantajul de a simplifica studiul mişcării corpului în sensul adoptării unui număr finit de parametri care să definească poziția corpului în mișcare.
Mișcarea unui corp este definită ca o schimbare de poziție a corpului în raport cu un reper (sistem de referință).
Mișcarea unui corp fată de un sistem de referință este cunoscută, dacă se pot determina legile de mișcare, traiectoria, viteza și accelerația fiecărui punct din corp.
Practic nu este posibil să se descrie mișcarea rigidului prin mișcarea fiecărui punct, dar este suficient să fie cunoscute în fiecare moment al mișcării, numai pozițiile unor puncte din care, pe baza păstrării distanțelor dintre puncte, se vor determina pozițiile celorlalte puncte din rigid. Poziția unui corp rigid față de un anumit reper din spațiul euclidian tridimensional R^3 este cunoscută dacă se cunosc pozițiile a trei puncte necoliniare ce aparţin rigidului.
Numărul minim al funcţiilor scalare independente care determină poziţia corpului în orice moment reprezintă numărul gradelor de libertate ale corpului. Funcţiile scalare care determină poziţia corpului sunt elemente geometrice (distanţe, unghiuri), funcţii de timp.
Legăturile la care este supus un corp (sau sistem de corpuri) micşorează numărul gradelor de libertate.
Mişcarea are loc în spaţiu şi în timp. Spaţiul în care are loc mişcarea este spaţiul geometriei euclidiene, infinit, omogen, continuu şi izotrop. Timpul măsoară durata mişcării şi este infinit, omogen, continuu şi ireversibil.
Mişcarea realizată de corp într-un interval finit de timp se numeşte mişcare finită, iar punctele corpului înregistrează deplasări finite ca mărime.
Mişcarea realizată de corp într-un interval elementar de timp se numeşte mişcare instantanee, iar punctele corpului înregistrează deplasări elementare.
Mişcarea se raportează la un sistem de axe mobil, legat de corpul în mişcare şi un sistem de referinţă fix.
Dacă corpul, în mişcarea sa, poate ocupa orice poziţie în spaţiu, fără nici o restricţie, mişcarea se numeşte generală, iar în caz contrar se numeşte mişcare particulară.

2.2. Mișcarea de translație

Definiția mișcării

Mișcarea în care orice segment de dreaptă, aparținând corpului rigid, rămâne paralel cu el însuși în tot timpul mișcării se numește **mişcare de translaţie.**
Mişcarea se raportează la un sistem de referinţă fix şi la un sistem de referinţă mobil, legat de corpul în mişcare, paralel cu sistemul fix (Fig. 1.14).

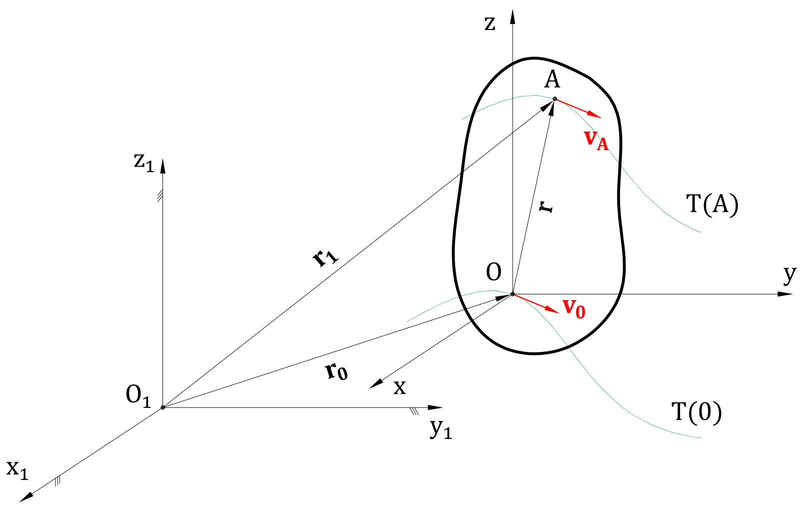


Figura 1.14

Grade de libertate

Mişcarea de translaţie a corpului se reduce la o mişcare de punct material astfel încât în această mişcare corpul are 3 grade de libertate cinematice.
Ecuaţia finită a mişcării de translaţie este:

$$\mathbf{r_0} = \mathbf{r_0}(t) \tag{1.60}$$

Iar ecuaţiile finite scalare sunt:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{10}(t) \\ y_{10} &= y_{10}(t) \\ z_{10} &= z_{10}(t) \end{aligned} \tag{1.61}$$

Ecuaţiile (1.61) exprimă gradele de libertate ale corpului rigid.

Elementele mişcării

- Traiectorii

Traiectoriile punctelor ce aparţin corpului rigid, în mişcarea de translaţie, sunt curbe paralele (Fig.1.14). Mişcarea de translaţie poate fi rectilinie, dacă traiectoriile sunt drepte paralele.

- Viteze

în orice moment al mişcării se poate scrie:

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r} \tag{1.62}$$

În care $\mathbf{r_1}$ este vectorul de poziţie al punctului A (punct oarecare ce aparţine corpului) în sistemul de referinţă fix.

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_1}(t)$$

$\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului O (originea sistemului de referinţă mobil)

$$\mathbf{r_0} = \mathbf{r_0}(t)$$

$\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului A în sistemul de referinţă mobil
$|\mathbf{r}| =$ constant (Fig. 1.14)
Viteza punctului A se exprimă prin relaţia:

$$\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} + \dot{\mathbf{r}} \tag{1.63}$$

Știind că $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0$ relația (1.63) devine

$$\mathbf{v_a} = \mathbf{v_0} \tag{1.64}$$

Vitezele tuturor punctelor sunt egale.

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_0} = \mathbf{v_B} = \cdots$$

Viteza comună se numește **viteză de translație.**
Dacă viteza este constantă mișcarea se numește **uniformă.**
Dacă viteza este constantă și traiectoriile sunt drepte paralele mișcarea se numește **rectilinie şi uniformă.**

- Accelerații

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 \tag{1.65}$$

Știind că $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{a_0}$ relația (1.65) devine:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} \tag{1.66}$$

Accelerațiile tuturor punctelor sunt egale:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} = \mathbf{a_B} = \cdots \tag{1.67}$$

Accelerația comună se numește **accelerație de translație.**
În mișcarea rectilinie și uniformă accelerațiile sunt nule.

2.3. Mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe

Definiția mișcării

Mișcarea în care două puncte (O și O') ale solidului rămân fixe în spațiu în tot timpul mișcării se numește mișcare de rotație în jurul axei fixe determinată de cele două puncte. Axa după care are loc mișcarea se numește axa de rotație (Fig. 1.15).
Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, care se rotește odată cu corpul.
În Fig.1.15 axa de rotație este axa $oz \equiv o_1z_1$.

Grade de libertate

În această mișcare corpul are un grad de libertate cinematică (Fig. 1.15).
Ecuația finită a mișcării de rotație în jurul axei fixe este:

$$\theta = \theta(t) \tag{1.68}$$

Ecuația (1.68) exprimă gradul de libertate al corpului rigid, rotirea în jurul axei Z.

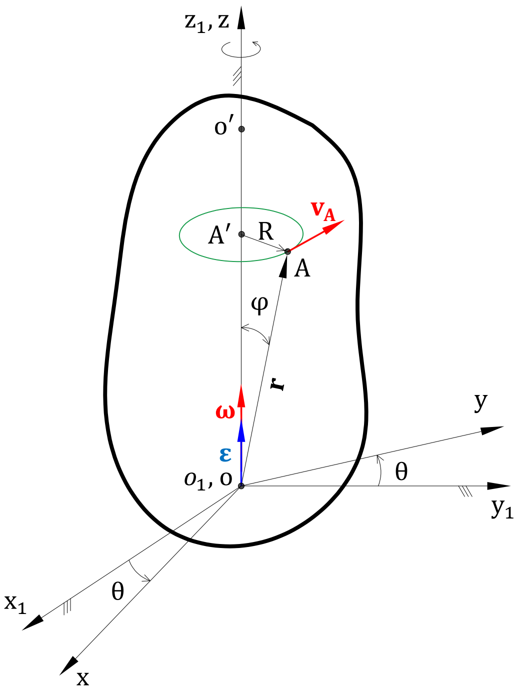


Figura 1.15

Elementele mișcării

- Traiectorii

Traiectoriile punctelor ce aparţin corpului rigid, în mişcarea de rotaţie în jurul axei fixe sunt cercuri cu centrele pe axa de rotaţie.
Cercurile care aparţin aceluiaşi plan sunt concentrice.

- Viteze

Viteza cu care se roteşte corpul se numeşte viteză unghiulară, notată ω, şi reprezintă variaţia spaţiului unghiular θ(t).

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) \tag{1.69}$$

Vectorul viteză unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotaţie (Fig. 1.15) astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k_1} = \omega\,\mathbf{k} \tag{1.70}$$

Relaţia (1.70) este valabilă atunci când axa de rotaţie este o_1z_1.
$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului A (punct oarecare ce aparţine corpului) în sistemul de referinţă fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referinţă mobil.

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r} = \mathrm{OA}\cdot(\sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{i_1} + \sin\varphi\sin\theta\ \mathbf{j_1} + \cos\varphi\ \mathbf{k_1}) \tag{1.71}$$

În relaţia 1.71

$$\begin{aligned}&\theta = \theta(t)\\&\varphi = \text{constant}\\&\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathrm{OA}\cdot(-\sin\varphi\sin\theta\ \mathbf{i_1} + \sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{j_1})\cdot\dot{\theta}\end{aligned} \tag{1.72}$$

Dacă

$$OA = r$$
$$\omega = \dot{\theta}$$

Relația (1.72) se scrie:

$$\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = r\omega(-\sin\varphi\sin\theta\ \mathbf{i_1} + \sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{j_1}) \tag{1.73}$$

Se poate observa că produsul vectorial

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i_1} & \mathbf{j_1} & \mathbf{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ r\sin\varphi\ \cos\theta & r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\omega(-\sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{i_1} + \sin\varphi\sin\theta\ \mathbf{j_1})$$

este egal cu $\mathbf{v_A}$ (1.73) ceea ce conduce la relația

$$\mathbf{v_A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{1.74}$$

ce exprimă viteza unui punct ce aparține rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă.

- Câmpul vitezelor

Vectorul $\mathbf{v}_A$este un vector tangent la traiectorie în punctul A (Fig. 1.15) și este conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{v_A}| = |\boldsymbol{\omega}||\mathbf{r}|\sin(\sphericalangle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \omega R \tag{1.75}$$

În relația 1.75, R este raza cercului care reprezintă traiectoria punctului A.
Modulul vectorului viteză este direct proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație. Pe baza relației (1.75) se poate trasa câmpul (diagrama de variație) vitezelor (Fig 1.16).

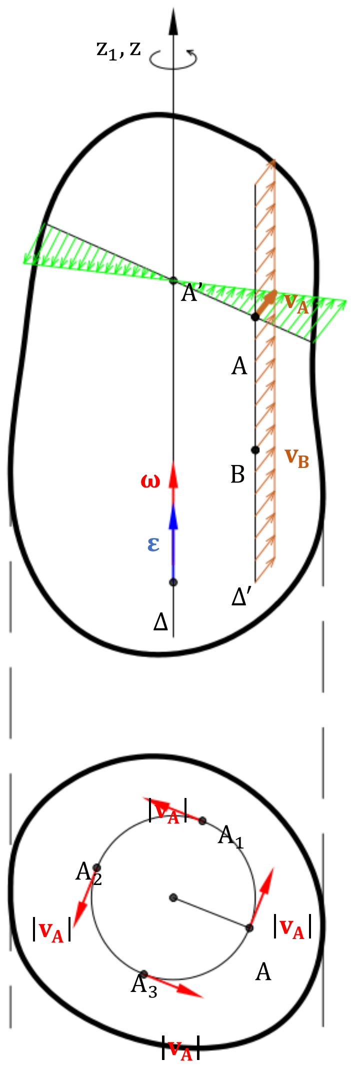


Figura 1.16

Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului vitezelor:

- diagrama vitezelor are o variație liniară având valoarea 0 pentru punctele de pe axa de rotație;
- punctele de pe suprafața corpului au vitezele cele mai mari.
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au vitezele egale;
- punctele egal depărtate de axa de rotație au vitezele egale în modul.

Accelerații

- ### Accelerația unghiulară

Accelerația cu care se rotește corpul se numește accelerație unghiulară ε și reprezintă variația vitezei unghiulare $\omega = \omega(t)$.

$$\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}(t) \tag{1.76}$$

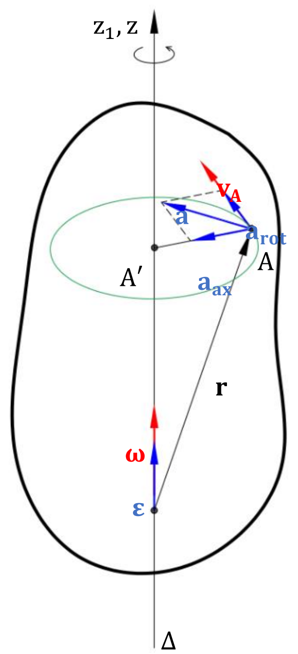


Figura 1.17

Vectorul accelerație unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie (Fig. 1.17):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\,\mathbf{k_1} = \varepsilon\,\mathbf{k} \tag{1.77}$$

Relația (1.77) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1.

- Accelerația punctului

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.78}$$

Accelerația unui punct ce aparține solidului are două componente:
(i) Accelerația de rotație

$$\mathbf{a_{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \tag{1.79}$$

Accelerația de rotație este un vector tangent la traiectorie în punctul A și este conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{a_{rot}}| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\mathbf{r}| \sin(\sphericalangle\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{R} \tag{1.80}$$

(ii) Accelerația axipetă

$$\mathbf{a_{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.81}$$

Componenta $\mathbf{a}_{\text{ax}}$ este și ea conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație și este dirijată spre centrul cercului traiectorie.

$$|\mathbf{a_{ax}}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{v}|\ \sin(\sphericalangle\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega \cdot \mathrm{v} = \omega^2 \mathrm{R} \tag{1.82}$$

Componentele $\mathbf{a_{ax}}$ și $\mathbf{a}_{\text{rot}}$ sunt perpendiculare.
Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_{rot}} + \mathbf{a_{ax}} \tag{1.83}$$

- Câmpul accelerațiilor

Vectorul $\mathbf{a}_\mathrm{A}$ este un vector conținut într-un plan perpendicular pe axa de rotație, având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{a}_A| = \sqrt{|\mathbf{a}_{rot}|^2 + |\mathbf{a}_{ax}|^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{1.84}$$

Modulul vectorului accelerație este direct proporțional cu distanța de la punct la axa de rotație.
Pe baza relației (1.84) se poate trasa câmpul (diagrama) accelerațiilor (Fig. 1.18).
Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului accelerațiilor:

- diagrama accelerațiilor are o variație liniară având valoarea 0 pentru punctele de pe axa de rotație.
- punctele de pe suprafața corpului au accelerațiile cele mai mari;
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au accelerațiile egale;
- punctele egal depărtate de axa de rotație au accelerațiile egale în modul.

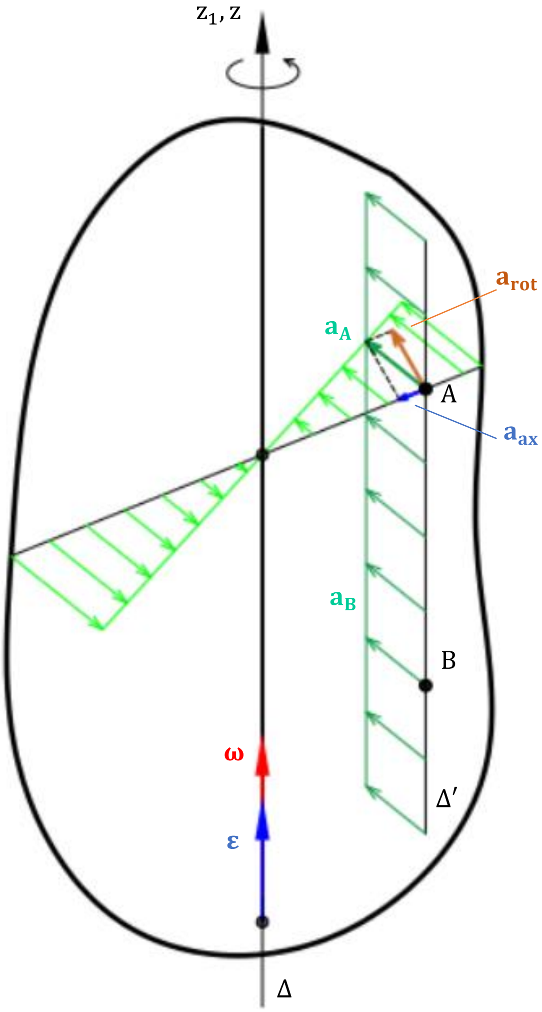


Figura 1.18

Deplasări elementare

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare d$\mathbf{r}$
Știind că $\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}$ și $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r} = v\,dt \tag{1.85}$$

și rotația elementară

$$d\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}\,dt \tag{1.86}$$

Dar $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ și relația (1.85) devine:

$$d\mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})dt = \boldsymbol{\omega}\,dt \times \mathbf{r} \tag{1.87}$$

Ținând seama de relația (1.86) relația (1.87) devine:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \qquad (1.88)$$

Relația (1.88) reprezintă expresia vectorială a deplasărilor elementare în mișcarea de rotație în jurul unei axe fixe.

2.4 Mișcarea plan paralelă (mișcarea plană)

Definiția mișcării

Mişcarea în care distanţa, de la orice punct al solidului până la un plan fix din spaţiu, rămâne constantă în tot timpul mişcării se numeşte mişcare plan paralelă sau mişcarea plană. (Fig. 1.19)

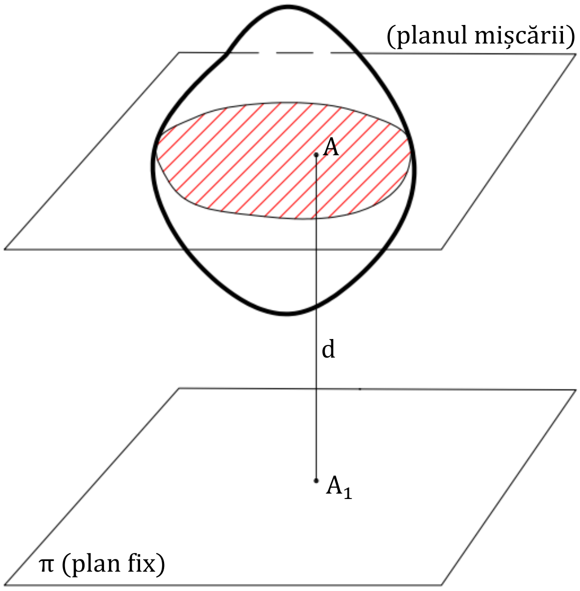


Figura 1.19

Mişcarea se raportează la un sistem de referinţă fix şi la un sistem de referinţă mobil, care se mişcă odată cu corpul (Fig. 1.20).

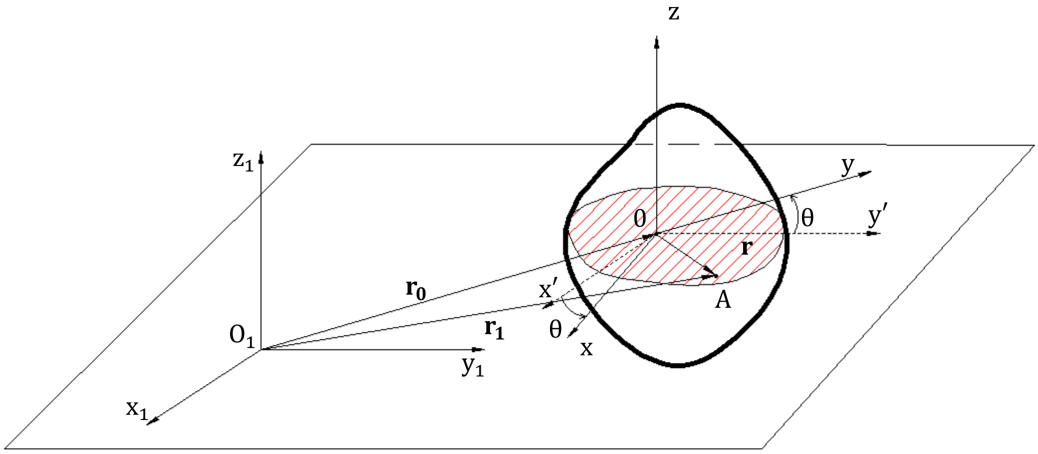


Figura 1.20

Din definiţia mişcării rezultă proprietăţile mişcării:
(i) toate punctele ce aparţin corpului situate pe o dreaptă normală la planul fix execută mişcări identice,

(ii) toate punctele ce aparţin corpului situate în plane paralele cu planul fix execută mişcări identice. Pentru a studia mişcarea solidului, este suficient să se studieze mişcarea unui plan ce aparţine corpului, paralel cu planul fix.

Grade de libertate

În această mişcare corpul are 3 grade de libertate cinematice.
Mişcarea plană este compusă dintr-o translaţie instantanee într-un plan paralel cu planul fix (în Fig. 1.25 planul $x_1O_1y_1$) şi o rotaţie instantanee în jurul unei axe perpendiculare pe planul fix (Oz).
În continuare se studiază mişcarea unui plan mobil al solidului din planul xOy, în planul fix $x_1O_1y_1$, adică mişcarea unei plăci mobile pe o placă fixă.
Ecuaţiile finite ale mişcării plane sunt:

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{10}(t) \\ y_{10} &= y_{10}(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \tag{1.89}$$

Ecuaţiile (1.89) exprimă gradele de libertate al corpului rigid în mişcarea plană

Elementele mişcării

- Traiectorii

Traiectoriile punctelor ce aparţin corpului rigid, în mişcarea plană sunt curbe situate în plane paralele cu planul fix.

- Viteze

Viteza unghiulară
Viteza cu care se roteşte corpul în jurul unei axe perpendiculare pe planul mişcării este viteza unghiulară ω.
Vectorul viteză unghiulară este un vector dirijat după axa de rotaţie astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k_1} = \omega\,\mathbf{k} \tag{1.90}$$

Relaţia (1.112) este valabilă atunci când axa de rotaţie este Oz.
Viteza unghiulară ω este aceiaşi indiferent în ce punct se alege polul O.
Viteza în mişcarea plană
Punctul A (punct oarecare ce aparţine corpului) are ca si vector de poziţie pe $\mathbf{r_1}$ în sistemul de referinţă fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referinţă mobil.

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r} \tag{1.91}$$

$$\mathbf{v_a} = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \tag{1.92}$$

Dacă
$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0$ este viteza polului O şi $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.
Relaţia (1.92) se scrie:

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{(Fig. 1.21)} \tag{1.93}$$

Sau

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_0} + \mathbf{v_{A(0)}} \tag{1.94}$$

unde $\mathbf{v}_{A(0)}$ reprezintă viteza corpului în mişcarea sa în raport cu punctul O.
Relaţia (1.94) reprezintă formula lui Euler pentru viteze în mişcarea plană.
Axele sistemului de referinţă x'Oy' sunt paralele cu axele sistemului fix de referinţă.

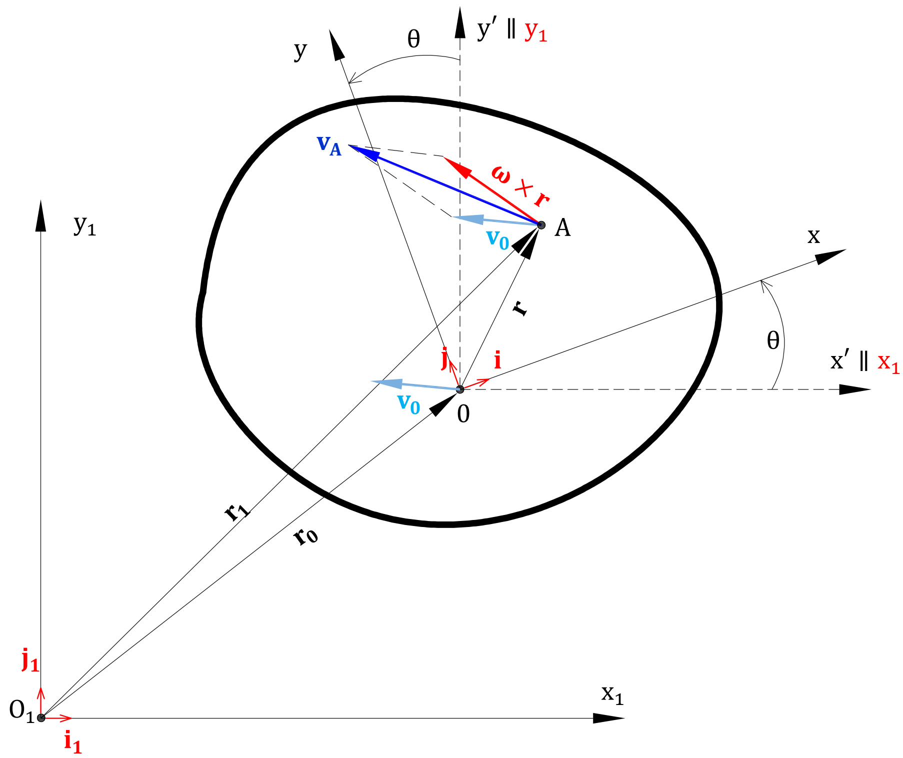


Figura 1.21

Câmpul vitezelor

Câmpul vitezelor se poate genera pe baza relației (1.93). Vectorul $\mathbf{v}_A$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A.

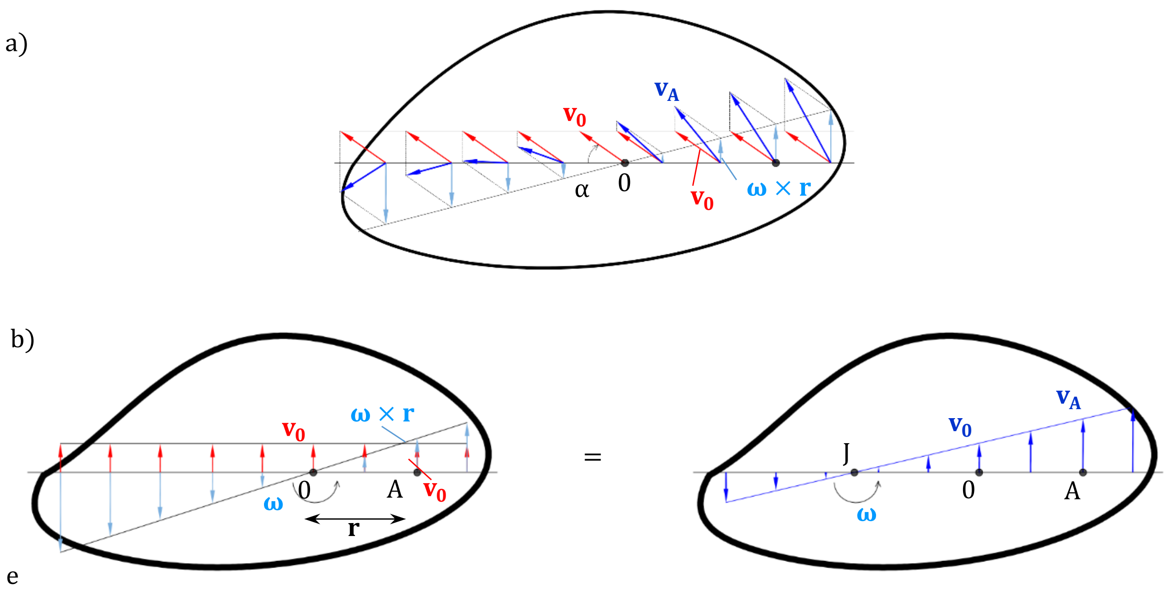


Figura 1.22

În figura 1.22 se prezintă două cazuri:

a) vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ face un unghi $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ cu segmentul de dreaptă pe care se găsește punctul A.

b) vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ face un unghi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ cu segmentul de dreaptă pe care se găsește punctul A.

Proprietățile câmpului vitezelor (Fig. 1.22)

(i) câmpul vectorilor viteză se obține prin însumarea câmpului constant de viteze $\mathbf{v_0}$, din mișcarea de translație, cu cel al vectorilor $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ din mișcarea de rotație (Fig. 1.22 a)

(ii) câmpul vectorilor viteză $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ din mișcarea de rotație având o variație liniară atunci și câmpul vectorilor viteză din mișcarea plană are o variație liniară

(iii) în mișcarea plană viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ este aceiași pentru toate punctele plăcii mobile

(iv) dacă se studiază variația vectorilor viteză pe o dreaptă perpendiculară pe vectorul viteză $\mathbf{v}_0$ se observă că cele două componente ale vectorului viteză $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ și $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ sunt coliniare având același sens sau sensuri contrarii (Fig. 1.22 b)

(v) punctul în care cele două componente ale vectorului viteză $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_0$ și $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ sunt egale și de sensuri contrarii are viteza egală cu 0

(vi) acest punct se notează cu J și se numește centru instantaneu de rotație (CIR) sau polul vitezelor și se găsește în placa mobilă pe dreapta perpendiculară pe $\mathbf{v}_0$

(vii) dacă mișcarea se raportează la punctul J, viteza punctului A se scrie conform relației (1.93). $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_J + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{JA}$, dar $\mathbf{v}_J = \mathbf{0}$ iar:

$$\mathbf{v_A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{JA} \quad \text{(Fig. 1.22 b)} \tag{1.95}$$

(viii) studiind distribuția vitezelor după relația (1.95) se observă că distribuția instantanee a vitezelor este identică cu cea a unei rotații în jurul punctului J, cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ ca și cum punctul J ar fi fix.

Determinarea poziției centrului instantaneu de rotație (CIR)

Poziția CIR se poate determina pe cale analitică sau pe cale grafică.

1) Analitic

Se determină vectorul de poziție al punctului J în cele două sisteme de referință mobil și fix (Fig. 1.28).
Se scrie expresia vitezei CIR conform relației (1.93)

$$\mathbf{v_J} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OJ} = \mathbf{0} \tag{1.96}$$

Dacă se notează $\mathbf{OJ} = \mathbf{r_J}$,
Relația (1.96) devine

$$\mathbf{v_J} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_J} = \mathbf{0} \tag{1.97}$$

Se înmulțește relația (1.97) la stânga cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$ și se obține:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_J}) = \mathbf{0} \tag{1.98}$$

Ținând seama de formula dublului produs vectorial relația (1.98) devine:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_0} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r_J})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r_J} = \mathbf{0} \tag{1.99}$$

Deoarece $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}_J$, produsul scalar $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_J = 0$ și, deoarece $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega^2$ relația (1.99) devine:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_0} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r_J} = \mathbf{0}, \text{ iar}$$

$$\mathbf{r_J} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_0}}{\omega^2} \tag{1.100}$$

ceea ce reprezintă vectorul de poziție al CIR în sistemul de axe mobil, în raport cu punctul O.

$$\mathbf{r_{1J}} = \mathbf{r_0} + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_0}}{\omega^2} \tag{1.101}$$

ceea ce reprezintă vectorul de poziție al CIR în sistemul de axe fix este conform Fig. 1.23.

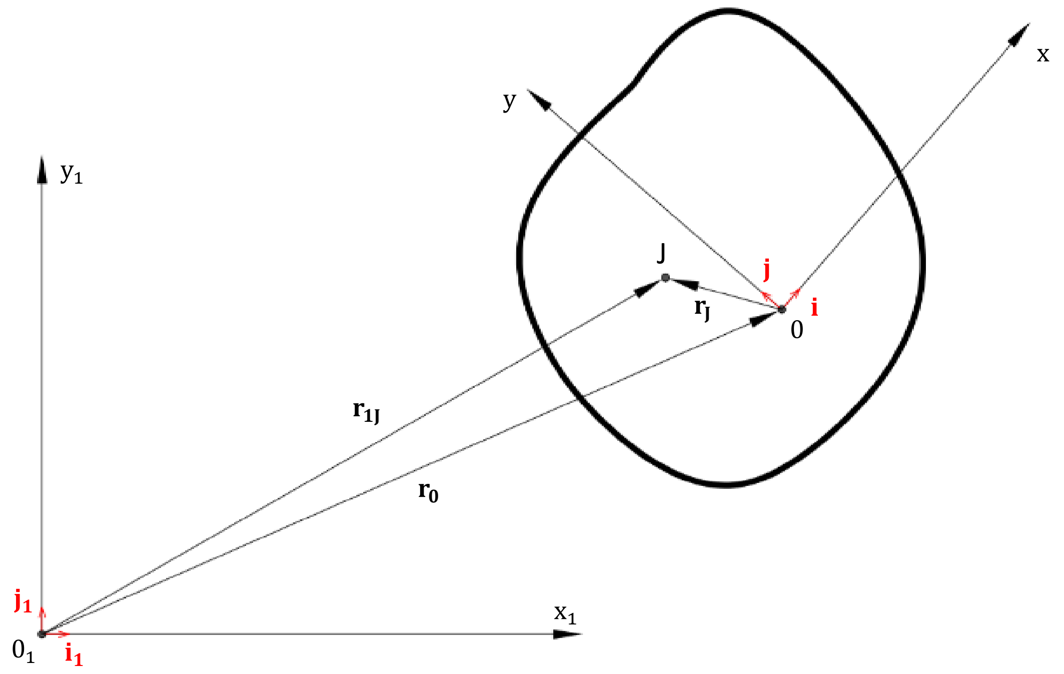


Figura 1.23

2) grafic (geometric)

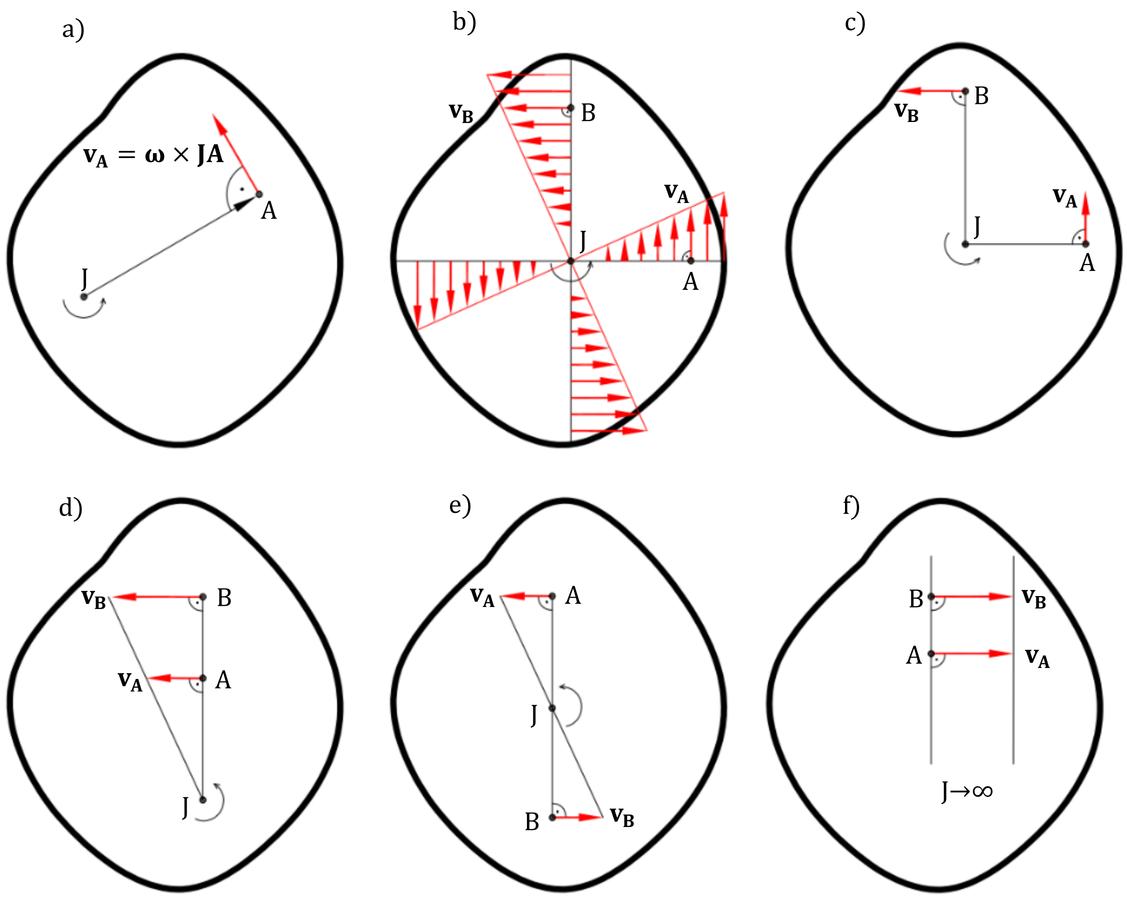


Figura 1.24

Dacă vectorii viteze ai celor două puncte A și B sunt paraleli, CIR se află la intersecția dintre perpendiculara comună a celor doi vectori și dreapta care unește vârfurile celor doi vectori (Fig. 1.24 d, e și f). Dacă vectorii viteze ale celor două puncte sunt și egali, atunci CIR se află la infinit iar corpul execută o mișcare de translație.

- Accelerații

Accelerația de rotație a corpului este accelerația unghiulară ε.
Vectorul accelerație unghiulară este un vector dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\,\mathbf{k_1} = \varepsilon\,\mathbf{k} \tag{1.102}$$

Relația (1.102) este valabilă atunci când axa de rotație este O_1z_1.
Accelerația unui punct oarecare de pe placa mobilă
Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\begin{aligned}\mathbf{a_A} &= \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{0} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{a_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad \text{(Fig. 1.26)}\end{aligned} \tag{1.103}$$

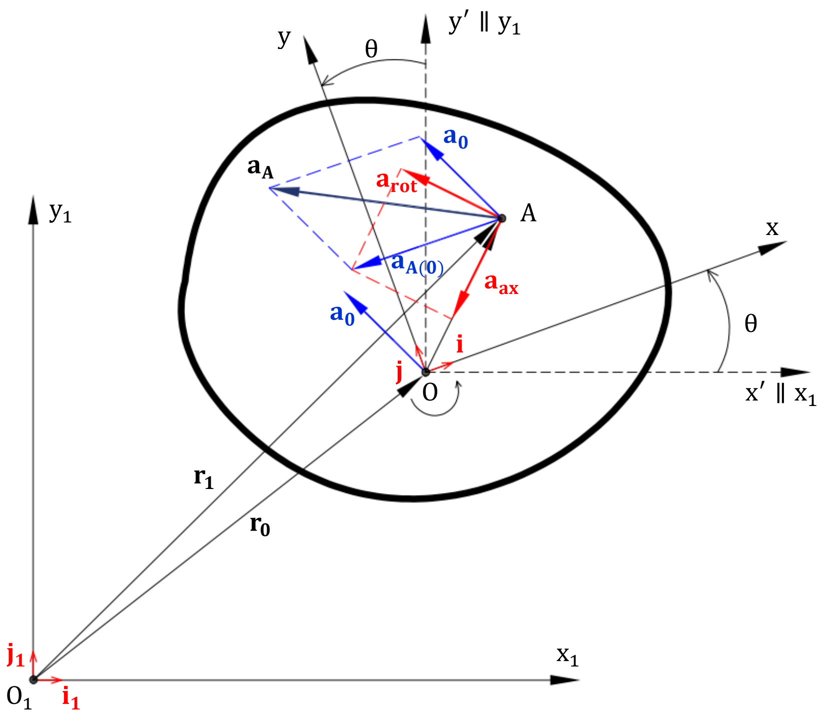


Figura 1.26

Accelerația unui punct ce aparține solidului are 3 componente:
- accelerația de translație $\mathbf{a_0}$
- accelerația de rotație care are componentele $\mathbf{a_{rot}}$ și $\mathbf{a_{ax}}$.

$$\mathbf{a_{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \tag{1.104}$$

și accelerația axipetă:

$$\mathbf{a_{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.105}$$

Componentele $\mathbf{a_{ax}}$ și $\mathbf{a_{rot}}$ sunt perpendiculare.
Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_{rot}} + \mathbf{a_{ax}} \tag{1.106}$$

sau

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_{A(0)}} \tag{1.107}$$

$$\mathbf{a_{rot}} + \mathbf{a_{ax}} = \mathbf{a_{A(0)}} \tag{1.108}$$

reprezintă accelerația corpului în mișcarea sa în raport cu punctul O.
Relația (1.108) reprezintă formula lui Euler pentru accelerații.

Câmpul accelerațiilor din mișcarea plană se obține compunând câmpul vectorilor accelerație dintr-o mișcare de translație cu accelerația $\mathbf{a_0}$ cu câmpul vectorilor accelerație dintr-o mișcare de rotație în jurul unei axe ce trece prin punctului O.
Distribuția vectorilor accelerație ai punctelor situate pe o dreaptă care trece prin O este liniară.
Există un punct pe placa mobilă a cărui accelerație este egala cu 0 la un moment dat al mișcării. Acest punct se numește **polul accelerațiilor** și se notează cu P.
Distribuția vectorilor accelerație, ținând seama de polul P este data în Fig. 1.27

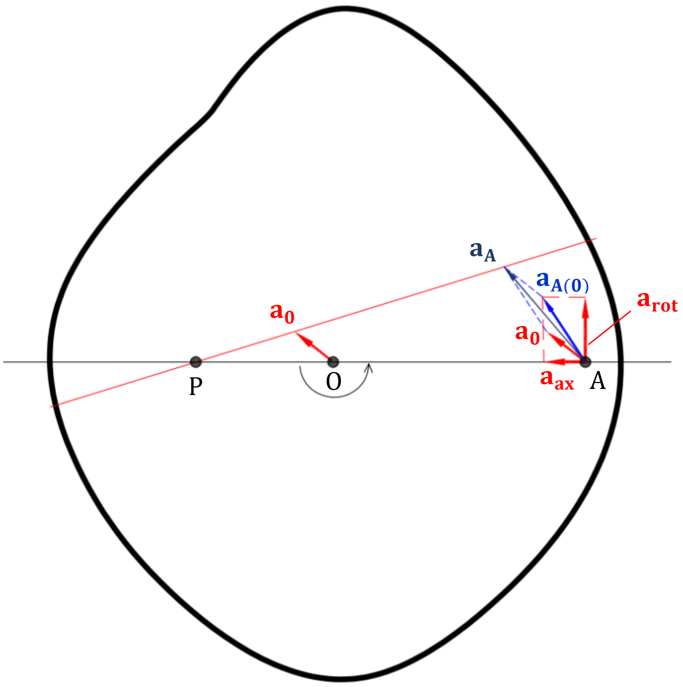


Figura 1.27

Deplasări elementare

Câmpul deplasărilor elementare se poate reprezenta în două moduri diferite:
(i) mișcarea se raportează la un pol oarecare O din plan
Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare $\mathbf{dr}$
Știind că $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r_1}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r_0}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} \times \mathbf{r}$ atunci deplasarea elementară:

$$\mathrm{d}\mathbf{r_A} = \mathrm{d}\mathbf{r_0} + \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \tag{1.109}$$

Câmpul vectorilor deplasărilor elementare se obține compunând câmpul deplasărilor elementare $\mathbf{dr_0}$ dintr-o mișcare de translație cu câmpul rotațiilor elementare $\mathbf{d\theta}$ în jurul punctului O (Fig. 1.28).

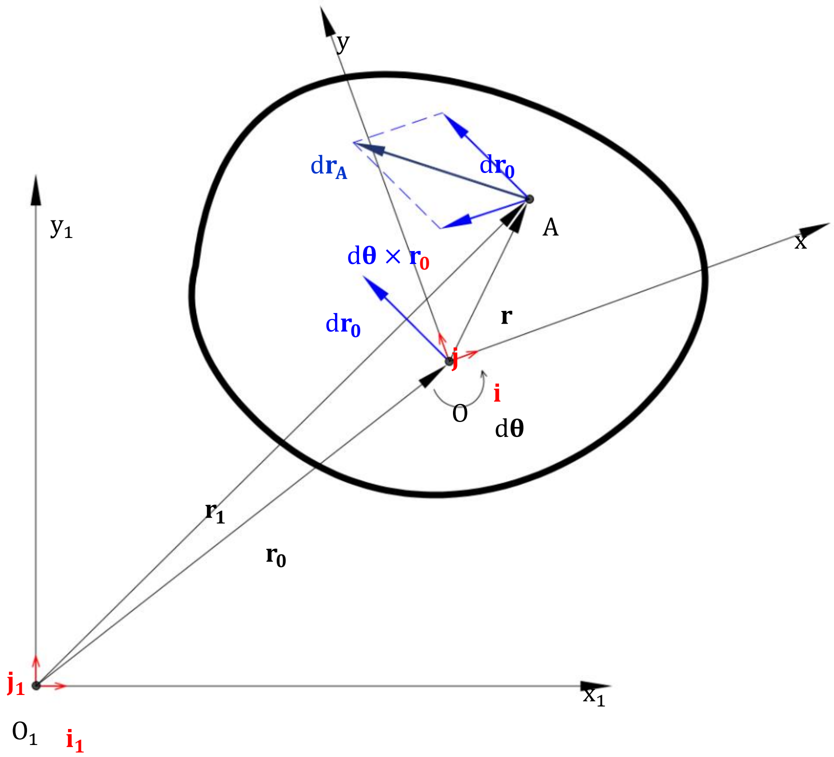


Figura 1.28

(ii)mișcarea se raportează la centrul instantaneu de rotație J

Câmpul vectorilor deplasări elementare se obține din câmpul rotațiilor elementare $\mathbf{d\theta}$ în jurul punctului J (Fig. 1.29).

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{JA} \tag{1.110}$$

Relația (1.110) se folosește pentru reprezentările deplasărilor elementare simple denumite și diagrame de deplasări (Fig. 1.30).

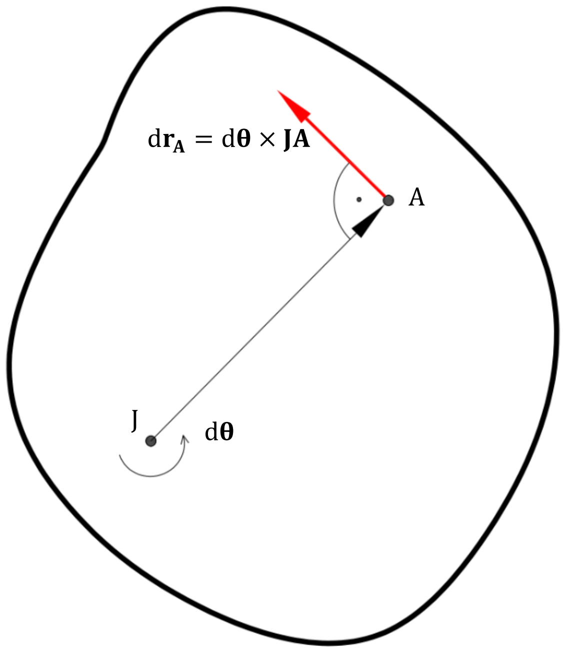


Figura 1.29

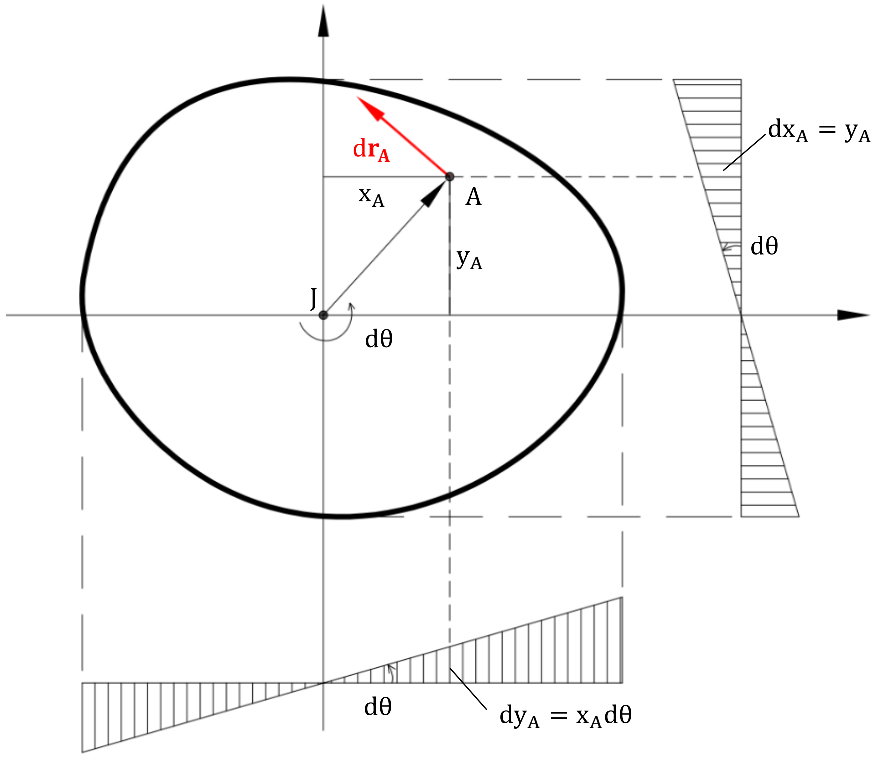


Figura 1.30

Mișcarea plan-paralelă a sistemelor de plăci. Teoreme de coliniaritate

- ### Mișcarea plan-paralelă a două plăci

Mișcarea fiecărei plăci se poate realiza prin mișcări de pură rotație în jurul centrelor de rotație J_1 și J_2 ale celor două plăci cu vitezele unghiulare $\boldsymbol{\omega_1}$ și $\boldsymbol{\omega_2}$ (Fig. 1.31).

Punctele J_1 și J_2 sunt puncte cu viteza nulă în raport cu cele două sisteme de referință și se numesc *centre absolute de rotație*. Punctul comun celor două plăci care are vitezele egale atât pe o placă cât și pe cealaltă (are viteza relativă nulă) se numește centru relativ de rotație J_{12}

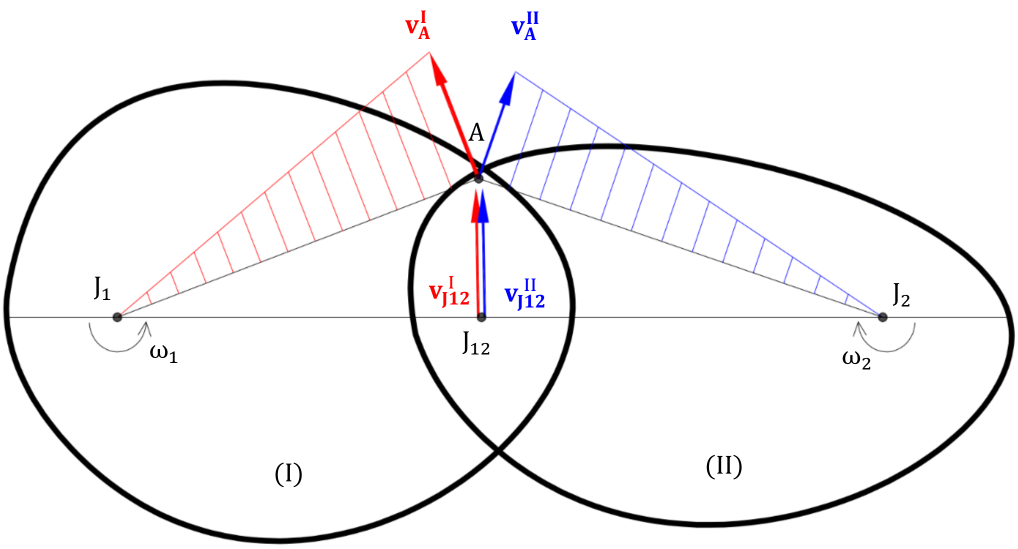


Figura 1.31

Distribuția vitezelor pentru fiecare placă este arătată în figura 1.31. Aceeași distribuție este și pentru deplasările elementare d**r.**
În punctul J_{12} vitezele celor două plăci sunt egale:

$$\mathbf{v}_{J12}^{I} = \mathbf{v}_{J12}^{II} \tag{1.176}$$

deci și modulele celor doi vectori sunt egale:

$$v_{J12}^{I} = \omega_1 J_1 J_{12}$$
$$v_{J12}^{II} = \omega_2 J_2 J_{12}$$

$$\omega_1\, J_1 J_{12} = \omega_2\, J_2 J_{12} \tag{1.177}$$

Din relația 1.177 rezultă:

$$\frac{J_1 J_{12}}{J_2 J_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{1.178}$$

Relația 1.178 reprezintă prima teorema a centrelor instantanee de rotație care se enunță astfel:
În mișcarea plan-paralelă a două placi centrele absolute de rotație J_1 și J_2 sunt coliniare cu centrul relativ de rotație J_{12}.
Centrul relativ de rotație J_{12} împarte segmental de dreaptă J_1J_2 în părți invers proporționale cu mărimile vitezelor unghiulare ω_1 și ω_2.
Dacă vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 au sensuri contrarii centrul J_{12} se găsește în interiorul segmentului, J_1J_2 în caz contrar J_{12} se găsește în exteriorul segmentului J_1J_2 de partea centrului cu viteza unghiulară mai mare.

- Mișcarea plan-paralelă a trei plăci

Mișcarea fiecărei plăci se realizează ca o mișcare de pură rotație în jurul centrelor lor absolute de rotație (J_1, J_2, J_3).Fiecare pereche de plăci determină câte un centru relativ de rotație (J_{12}, J_{13}, J_{23}) (Fig. 1.32)
Din prima teorema aplicată perechilor de plăci rezultă:

$$\frac{J_1\, J_{12}}{J_2\, J_{12}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$
$$\frac{J_2\, J_{23}}{J_3\, J_{23}} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$$
$$\frac{J_3\, J_{13}}{J_1\, J_{13}} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$$

Înmulțind cele trei relații membru cu membru rezultă:

$$\frac{J_1\, J_{12}}{J_2\, J_{12}} \cdot \frac{J_2\, J_{23}}{J_3\, J_{23}} \cdot \frac{J_3\, J_{13}}{J_1\, J_{13}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = 1 \tag{1.179}$$

Conform teoremei lui Menelaus în triunghiul J_1, J_2, J_3 cele trei puncte J_{12}, J_{13}, J_{23} sunt coliniare.

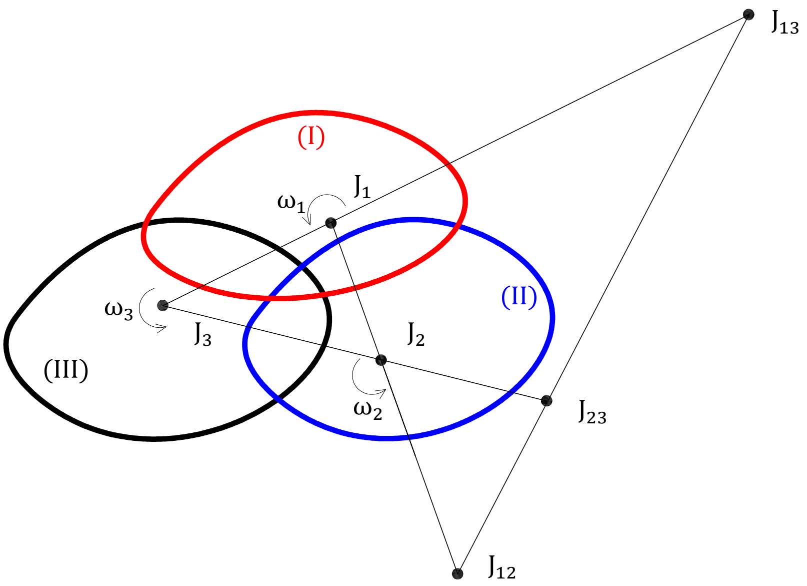


Figura 1.32

De aici rezultă a doua teoremă de coliniaritate a centrelor instantanee de rotație:
În mişcarea plan-paralelă a trei placi centrele relative de rotație J_{12}, J_{13}, J_{23} sunt coliniare.
Observații:

- dacă un corp este articulat de corpul de reazem aceasta articulație este centru absolut de rotație, iar dacă corpul este simplu rezemat pe corpul de reazem centrul său absolut de rotație se găseşte pe dreapta perpendiculară dusă pe suprafața de reazem (Fig. 1.38)

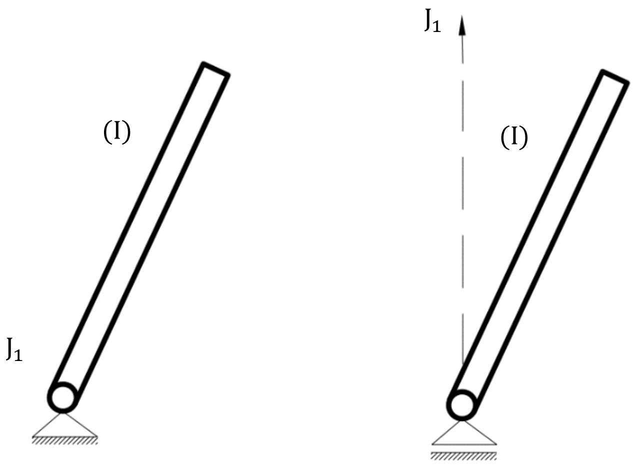


Figura 1.33

- dacă două corpuri sunt articulate între ele punctul de articulație este centru relativ de rotație (Fig. 1.34)

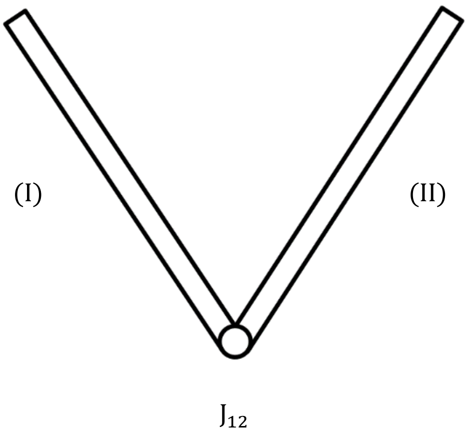


Figura 1.34

- dacă două corpuri sunt legate între ele prin doi penduli punctul de intersecție al direcțiilor pendulilor este centrul relativ de rotație (Fig. 1.35). Dacă cei doi penduli sunt paraleli centrul relativ de rotație se găsește la infinit.

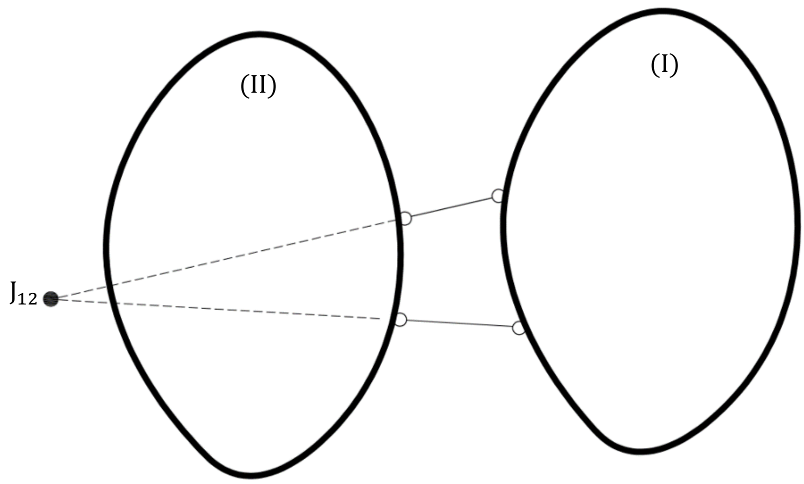


Figura 1.35

- dacă un centru relativ de rotație este la infinit corpurile care formează centrul respectiv execută unul fată de celălalt o mișcare de translație
- un sistem cu n corpuri are n centre absolute de rotație și C_n^2 centre relative de rotație

- Diagrame de deplasări

O aplicație a mișcării plan–paralele a sistemelor de corpuri o constituie trasarea diagramelor de deplasări elementare verticale și orizontale sistemele aflate în mișcare plană. Aceste diagrame reprezintă variația deplasărilor elementare verticale, respectiv orizontale ale sistemului de corpuri aflat în mișcare plan paralelă.
Diagramele se trasează cu ușurință dacă se respectă ordinea operațiilor:

- se determină pozițiile centrelor absolute și relative de rotație conform observațiilor de mai sus și a teoremelor de coliniaritate;
- se proiectează pe liniile de referință orizontală și verticală centrele relative și absolute de rotație;

- se imprimă o mişcare compatibilă cu legăturile, sistemului de corpuri cu 1 grad de libertate cinematic (configurația deplasată a sistemului se exprimă în funcție de un parametru geometric care este rotirea elementara dθ a unuia din corpuri);

- se trasează diagramele deplasărilor elementare verticale, respectiv orizontale ale sistemului de corpuri respectând următoarele (Fig. 1.36):

  -în dreptul centrelor absolute deplasările sunt nule;

  - în dreptul centrelor relative deplasările celor două corpuri care formează centrul relativ sunt egale dacă centrele relative nu se află la infinit;

  -daca un centru relativ este la infinit diagramele de deplasări ale celor două corpuri sunt paralele, adică corpurile se rotesc cu aceeaşi mărime dθ.

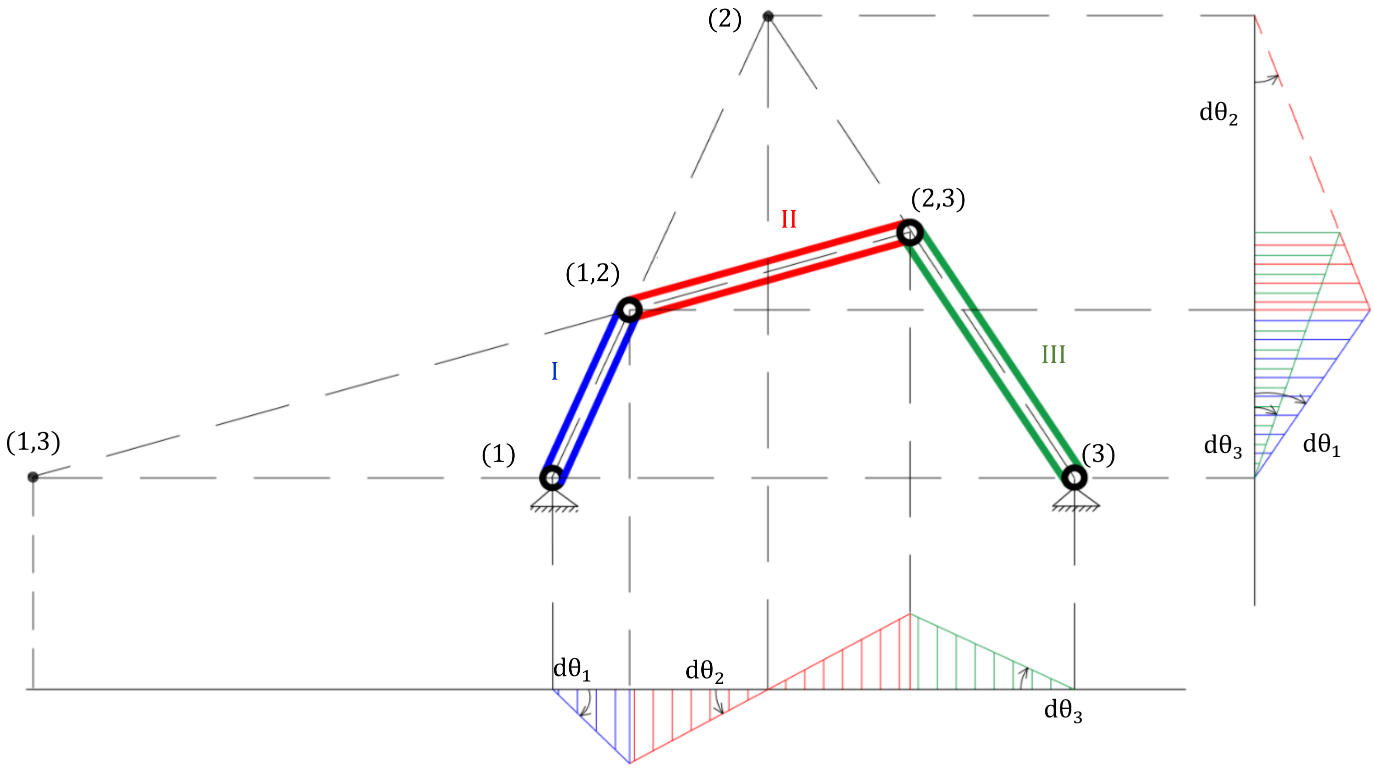


Figura 1.36

2.5 Mişcarea de rototranslație

Definiția mişcării

Mişcarea în care două puncte ale solidului rămân în tot timpul mişcării pe o dreaptă din spațiu se numeşte mişcare de rototranslație. Axa după care are loc mişcarea se numeşte axa de rototranslație.
Mişcarea se raportează la un sistem de referință fix şi la un sistem de axe mobil, care se mişcă odată cu corpul.

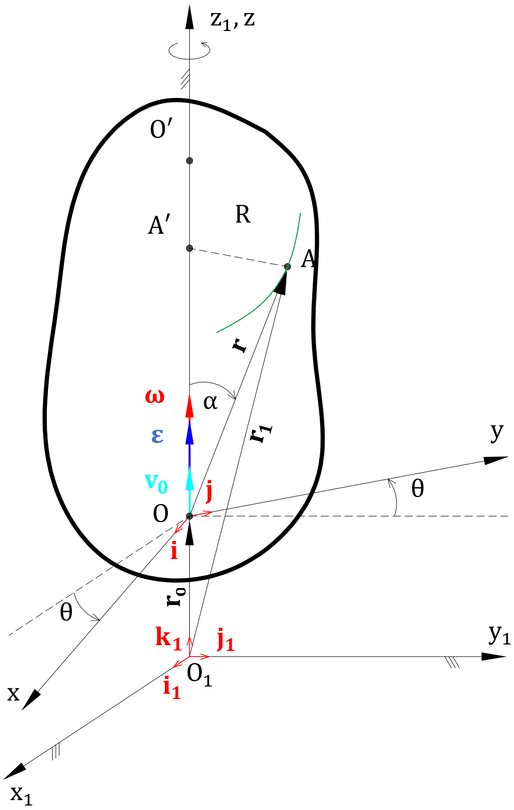


Figura 1.37

În Fig. 1.37 axa de rototranslație este axa O_1z_1.

Grade de libertate

În această mișcare corpul are două grade de libertate cinematică.
Mișcarea de rototranslație este compusă dintr-o translație instantanee de-a lungul axei de rototranslație și o rotație instantanee în jurul aceleiași axe.
Ecuațiile finite ale mișcării de rototranslație sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{r_0} &= \mathbf{r_0}(t) \\ \theta &= \theta(t) \end{aligned} \tag{1.180}$$

Ecuațiile (1.180) sunt ecuațiile finite ale mișcării corpului.

Elementele mișcării

- traiectorii

Traiectoriile punctelor ce aparțin corpului rigid, în mișcarea de rototranslație sunt curbe situate pe suprafețe cilindrice circulare. Cercul pe care se afla punctul A reprezintă traiectoria acestuia în mișcarea instantanee de rotație în jurul axei de rototranslație (Fig. 1.38).

- viteze

Viteza unghiulară
Viteza cu care se rotește corpul este viteza unghiulară ω.
Vectorul viteză unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rototranslație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k_1} = \omega\,\mathbf{k} \tag{1.181}$$

Relația (1.112) este valabilă atunci când axa de rototranslație este o_1z_1.
Viteza unui punct în mișcarea de rototranslație

$\mathbf{r}_1$ este vectorul de poziție al punctului A (punct oarecare ce aparține corpului) în sistemul de referință fix, iar $\mathbf{r}$ în sistemul de referință mobil (Fig. 1.38).

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r} \tag{1.182}$$

$$\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} + \dot{\mathbf{r}} \tag{1.183}$$

Dacă $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0$ și $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, relația (1.183) se scrie:

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{(Fig. 1.38)} \tag{1.184}$$

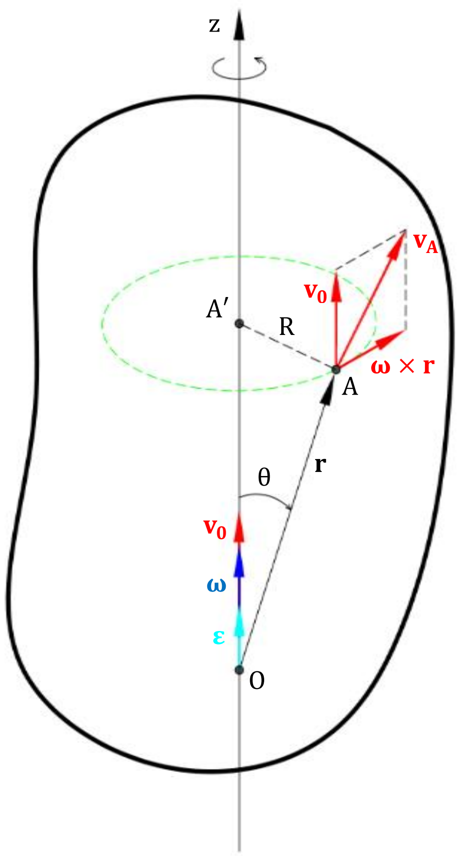


Figura 1.38

Câmpul vitezelor

Vectorul $\mathbf{v}_\mathrm{A}$ este un vector tangent la traiectorie în punctul A având același sens cu sensul de rotație al corpului rigid și modulul:

$$|\mathbf{v_A}| = \sqrt{\mathrm{v}_0^2 + \omega^2 \mathrm{R}^2} \tag{1.185}$$

Unde R este raza cercului care reprezintă traiectoria punctului A în mișcarea instantanee de rotație.

Proprietățile câmpului vitezelor (Fig. 1.39):

- nu există puncte de viteză zero pe corp, punctele de viteză minimă sunt punctele de pe axa de rototranslație și au viteza $\mathbf{v}_0$;
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rotație au vitezele egale;
- punctele egal depărtate de axa de rotație au vitezele egale în modul;
- dacă viteza $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ mișcarea este o mișcare de rotație în jurul axei cu viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega}$;
- dacă viteza unghiulară $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ mișcarea este o mișcare de translație de-a lungul axei cu viteza $\mathbf{v}_0$.

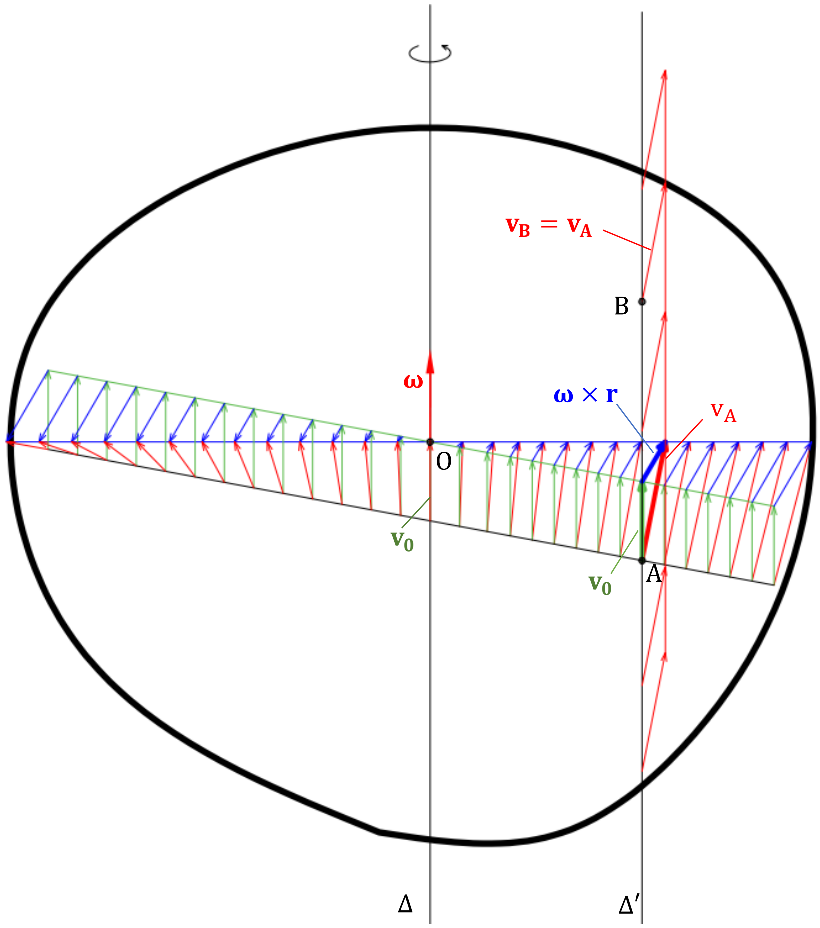


Figura 1.39

- accelerații

Vectorul accelerație unghiulară este un vector alunecător dirijat după axa de rotație astfel încât se poate scrie:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\,\mathbf{k_1} = \varepsilon\,\mathbf{k} \tag{1.186}$$

Relația (1.186) este valabilă atunci când axa de rotație este o_1z_1.

Accelerația unui punct în mișcarea de rototranslație

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\begin{aligned}\mathbf{a_A} &= \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{0} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{a_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \\ &= \mathbf{a_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\end{aligned} \tag{1.187}$$

Accelerația unui punct ce aparține solidului are 3 componente (Fig. 1.40):

- accelerația de translație $\mathbf{a}_0$
- accelerația de rotație

$$\mathbf{a_{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \tag{1.188}$$

$$|\mathbf{a_{rot}}| = |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}) = \varepsilon \mathrm{R} \tag{1.189}$$

și accelerația axipetă

$$\mathbf{a_{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.190}$$

$$|\mathbf{a_{ax}}| = |\boldsymbol{\omega}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \sin\,(\sphericalangle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) = \omega \cdot \mathrm{R} \tag{1.191}$$

Componentele $\mathbf{a}_{\mathrm{ax}}$ și $\mathbf{a}_{\mathrm{rot}}$ sunt perpendiculare.

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_{rot}} + \mathbf{a_{ax}} \tag{1.192}$$

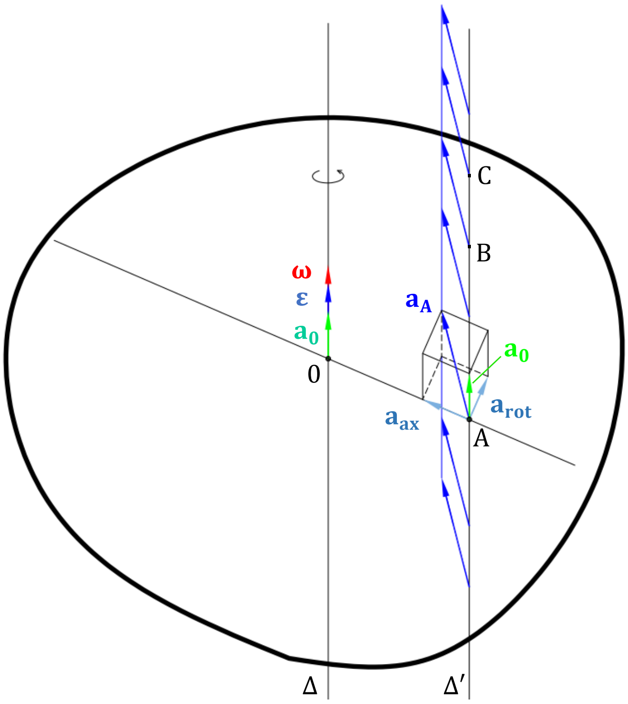


Figura 1.40

- câmpul accelerațiilor

modulul vectorului accelerație

$$|\mathbf{a_A}| = \sqrt{a_0^2 + \varepsilon^2 R^2 + \omega^4 R^2} \tag{1.193}$$

Pe baza relațiilor (1.189) (1.191) și (1.192) se poate trasa câmpul (diagrama) accelerațiilor.
Din diagramă se pot deduce proprietățile câmpului accelerațiilor (Fig. 1.40):

- nu există puncte de accelerație zero pe corp, punctele de accelerație minimă sunt punctele de pe axa de rototranslație și au accelerația $\mathbf{a}_0$;
- componentele $\mathbf{a}_{rot}$ și $\mathbf{a}_{ax}$ se găsesc într-un plan perpendicular pe axa de rototranslație;
- într-un plan perpendicular pe axa de rototranslație pentru punctele situate pe o dreaptă variația mărimii accelerației este liniară;
- punctele situate pe o dreaptă paralelă la axa de rototranslație au accelerațiile egale;
- punctele egal depărtate de axa de rototranslație au accelerațiile egale în modul.

Deplasări elementare

Într-un interval de timp elementar dt punctele solidului efectuează deplasări elementare d$\mathbf{r}$
Știind că $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r_1}}{dt} = \frac{d\mathbf{r_0}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \times \mathbf{r}$ atunci deplasarea elementară:

$$d\mathbf{r_1} = d\mathbf{r_0} + d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \tag{1.194}$$

componentele scalare ale vectorului deplasărilor elementare
dacă $\mathbf{v}_0 = \alpha\boldsymbol{\omega}$ (mișcarea de șurub) unde α este o constantă atunci:

$$\frac{d\mathbf{r_0}}{dt} = \alpha\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$$

și

$$d\mathbf{r_0} = \alpha d\boldsymbol{\theta}$$

sau

$$dr_0\, \mathbf{k_1} = \alpha\, d\theta\, \mathbf{k_1}$$

traiectoria unui punct oarecare A de pe solidul în mişcare se determină din relaţiile:

$$d\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i_1} & \mathbf{j_1} & \mathbf{k_1} \\ 0 & 0 & d\theta \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = -y_1 d\theta\, \mathbf{i_1} + x_1 d\theta\, \mathbf{j_1} \tag{1.195}$$

$$d\mathbf{r} = dx\, \mathbf{i_1} + dy_1\, \mathbf{j_1} + dz_1\, \mathbf{k_1} \tag{1.196}$$

Relaţiile (1.108) şi (1.109) reprezintă expresiile analitice ale vectorului deplasare elementară în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe.
Ţinând seama de relaţiile (1.108) şi (1.109) componentele scalare ale vectorului deplasare elementară a punctului A în sistemul de referinţă fix sunt:

$$\begin{aligned} dx_1 &= -y_1 d\theta \\ dy_1 &= x_1 d\theta \\ dz_1 &= \alpha d\theta \end{aligned} \tag{1.197}$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\theta} &= -y_1 \\ \frac{dy_1}{d\theta} &= x_1 \\ \frac{dz_1}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \tag{1.198}$$

Rezolvând sistemul de ecuaţii diferenţiale (1.137), rezultă:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin(\theta + \beta) \\ y_1 &= a \cos(\theta + \beta) \\ z_1 &= \alpha\theta + z_0 \end{aligned} \tag{1.199}$$

Relaţia (1.138) reprezintă ecuaţiile parametrice ale elicei circulare drepte cu pas constant.

2.6 Mişcarea de rotaţie în jurul unui punct fix (mişcarea sferică)

Definiţia mişcării

Mişcarea sferică este mişcarea în care un punct al corpului solid rigid rămâne fix în tot timpul mişcării.
Mişcarea se raportează la un sistem de referinţă fix şi la un sistem de axe mobil, care se roteşte o dată cu corpul.
Punctul fix O se alege originea celor două sisteme de referinţă la care se raportează mişcarea (Fig. 1.41).

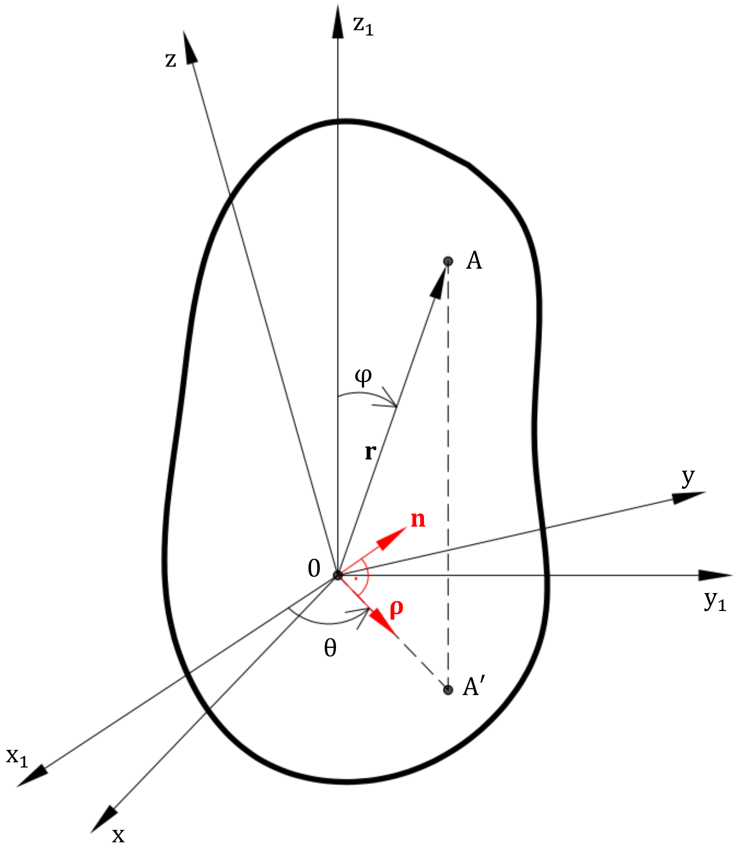


Figura 1.41

Grade de libertate

În această mișcare corpul are trei grade de libertate cinematică. Punctul fix este o articulație sferică care anulează cele trei grade de liberate deplasări lăsând libere rotirile.
Mișcarea sistemului de referință mobil reprezintă mișcarea solidului rigid. Versorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sunt vectori care își schimba orientarea în timp, în schimb modulul rămâne constant.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \mathbf{i}(t) \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}(t) \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}(t) \end{aligned} \tag{1.200}$$

Relațiile 1.180 reprezintă ecuațiile finite ale mișcării sferice.

Elementele mișcării

- Traiectorii

Traiectoriile punctelor ce aparţin corpului rigid, în mișcarea sferică sunt curbe situate pe o sferă cu centrul în punctul fix O.

- Viteze

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{OA} = \mathrm{OA}\,(\sin\varphi\cos\theta\ \mathbf{i_1} + \sin\varphi\sin\theta\ \mathbf{j_1} + \cos\varphi\ \mathbf{k_1})$$

în care $\varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$.
Derivata vectorului de poziție $\mathbf{r}$ este:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathrm{OA}\big(\dot\varphi\cos\varphi\cos\theta - \dot\theta\sin\varphi\sin\theta\,\big)\,\mathbf{i_1} + \big(\dot\varphi\cos\varphi\sin\theta - \dot\theta\sin\varphi\cos\theta\,\big)\,\mathbf{j_1} + \ \dot\varphi\sin\varphi\ \mathbf{k_1} \tag{1.201}$$

Vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ rezultă din variația ambelor unghiuri $\varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)$ și se scrie într-o primă formă prin relația:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} \tag{1.202}$$

Componenta vectorului $\boldsymbol{\omega}$, $\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ este orientată după versorul $\boldsymbol{n}$ (Fig. 1.42), iar componenta $\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$ este orientată după versorul $\mathbf{k_1}$ astfel încât vectorul $\boldsymbol{\omega}$ se poate scrie:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{i_1} + \dot{\varphi}\cos\theta\ \mathbf{j_1} + \dot{\theta}\,\mathbf{k_1}$$

Efectuând produsul $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}$ se obține:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA} = \mathrm{OA}\begin{vmatrix} \mathbf{i_1} & \mathbf{j_1} & \mathbf{k_1} \\ -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\varphi}\cos\theta & \dot{\theta} \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{vmatrix} = \tag{1.203}$$

$$= \mathrm{OA}\left[\left(\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\right)\mathbf{i_1} + \left(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta\right)\mathbf{j_1} - \dot{\varphi}\sin\theta\ \mathbf{k_1}\right]$$

Datorită identității membrului drept din relația (1.182) cu membrul drept din relația (1.203) rezultă că:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{OA}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA} \tag{1.204}$$

Toate punctele corpului solid rigid au aceiași viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$, iar relația (1.204) este valabilă pentru orice punct al corpului solid rigid.
Dreapta suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ se numește axa instantanee de rotație. Vitezele punctelor de pe această axă sunt nule.

$$\mathbf{v_P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \mathbf{0}$$

deoarece cei doi vectori $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{OP}$ sunt coliniari.
A doua relație pentru vectorul $\boldsymbol{\omega}$:
Versorii variabili $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ se scriu în sistemul de referință fix:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \alpha_{11}\,\mathbf{i_1} + \alpha_{12}\,\mathbf{j_1} + \alpha_{13}\,\mathbf{k_1} \\ \mathbf{j} &= \alpha_{21}\,\mathbf{i_1} + \alpha_{22}\,\mathbf{j_1} + \alpha_{23}\,\mathbf{k_1} \\ \mathbf{k} &= \alpha_{31}\,\mathbf{i_1} + \alpha_{32}\,\mathbf{j_1} + \alpha_{33}\,\mathbf{k_1} \end{aligned} \tag{1.205}$$

În care α_{ij} sunt cosinușii directori ai axelor mobile în raport cu cele fixe.
Matricea care are ca elemente α_{ij} se numește matrice de rotație.
Matricea de rotație este o matrice unitară ($\det\alpha = 1$).
Relația (1.205) se mai poate scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i_1} \\ \mathbf{j_1} \\ \mathbf{k_1} \end{bmatrix} \tag{1.206}$$

Relația este valabilă pentru scrierea oricărui vector $\mathbf{v}$ din sistemul mobil de referință în sistemul fix de referință.

$$\mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v_1}$$

Exprimarea vectorului $\mathbf{v_1}$ funcție de $\mathbf{v}$ se face prin:

$$\mathbf{v_1} = \alpha^{-1}\,\mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \qquad \text{(formulele lui Poisson)} \\ \dot{\mathbf{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.207}$$

$$\mathbf{r} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$$

Vectorul viteză se mai poate scrie:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = x\,\dot{\mathbf{i}} + y\ \dot{\mathbf{j}} + z\ \dot{\mathbf{k}} \tag{1.208}$$

$$\mathbf{v_x}\,\mathbf{i} + \mathbf{v_y}\,\mathbf{j} + \mathbf{v_z}\,\mathbf{k} = x\,\dot{\mathbf{i}} + y\,\dot{\mathbf{j}} + z\,\dot{\mathbf{k}} \tag{1.209}$$

Relația se înmulțește succesiv cu **i**, **j**, **k**.
Și se obține:

$$\begin{aligned} v_x &= x\,\dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{i} + y\,\dot{\mathbf{j}}\cdot i + z\,\dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{i} \\ v_y &= x\,\dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{j} + y\,\dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{j} + z\,\dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{j} \\ v_z &= x\,\dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{k} + y\,\dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{k} + z\,\dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.210}$$

Deoarece

$$\dot{\mathbf{i}} \perp \mathbf{i}$$
$$\dot{\mathbf{j}} \perp \mathbf{j}$$
$$\dot{\mathbf{k}} \perp \mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{i} = 0$$
$$\dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{j} = 0$$
$$\dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{k} = 0$$

Matriceal relația (1.187) se scrie:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{i} & \dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{i} \\ \dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{j} & 0 & \dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{j} \\ \dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{k} & \dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{k} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.211}$$

în formula vitezelor (1.204), ținând seama că

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k}$$

obținem

$$v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Astfel rezultă

$$v_x = -y\omega_z + z\omega$$
$$v_y = x\omega_z - z\omega_x$$
$$v_z = -x\omega_y + y\omega_x$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\boldsymbol{\omega}_z & \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_x & 0 & -\boldsymbol{\omega}_x \\ -\boldsymbol{\omega}_y & \boldsymbol{\omega}_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.212}$$

Comparând relațiile (1.211) și (1.212) rezultă componentele scalare ale vectorului $\boldsymbol{\omega}$,

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{k} = -\dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{j} \\ \omega_y &= \dot{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{i} = -\dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{k} \\ \omega_z &= \dot{\mathbf{i}}\cdot\mathbf{j} = -\dot{\mathbf{j}}\cdot\mathbf{i} \end{aligned} \tag{1.213}$$

Astfel încât rezultă cea de a două relație pentru vectorul ω

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{j}\cdot k)\,\mathbf{i} + (\dot{k}\cdot i)\,\mathbf{j} + (\dot{i}\cdot j)\,\mathbf{k} \tag{1.214}$$

Unghiurile lui Euler
Unghiurile Euler sunt trei unghiuri introduse de către Leonhard Euler pentru a descrie orientarea unui corp solid rigid. Pentru a descrie o astfel de orientare în spațiu sunt necesari trei parametri. Ei pot fi reprezentați în mai multe moduri, unghiurile lui Euler fiind unul dintre ele.

Unghiurile lui Euler reprezintă, trei rotații elementare (rotații în jurul unei singure axe) cu care se mișcă sistemul de referință mobil în raport cu cel fix. Orice rotație poate fi realizată prin compunerea a trei rotații elementare, precum și invers orice rotație poate fi descompusă ca o sumă de trei rotații elementare.
Unghiurile lui Euler sunt:

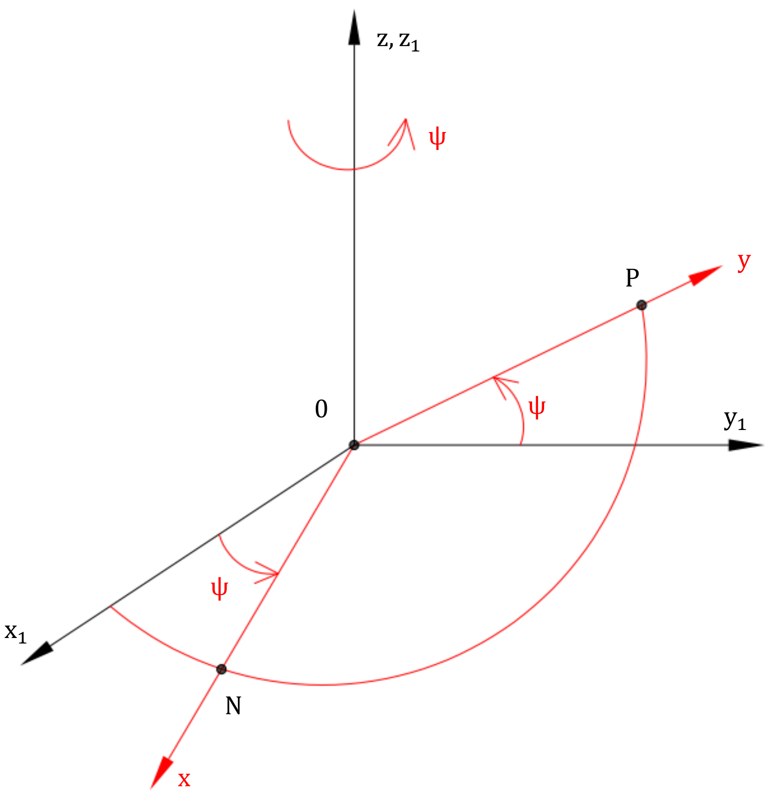
$$\begin{aligned} \psi &= \psi(t) \\ \theta &= \theta(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \tag{1.215}$$

În care :
ψ se numește unghi de precesie
θ se numește unghi de nutație
φ se numește unghi de rotație (Fig. 1.43).
Direcția O_1N se numește linia nodurilor.
Relațiile 1.215 constituie ecuațiile finite ale mișcării solidului în jurul unui punct fix exprimate în funcție de unghiurile lui Euler.
Vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ poate fi scris în funcție de unghiurile lui Euler considerând vitezele unghiulare componente datorate variației acestor unghiuri:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\varphi}} \tag{1.216}$$

în care:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\psi}} &= \dot{\psi}\, \mathbf{k_1} \\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\theta}} &= \dot{\theta}\, \mathbf{u_N} \\ \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\varphi}} &= \dot{\varphi}\, \mathbf{k} \end{aligned} \tag{1.217}$$



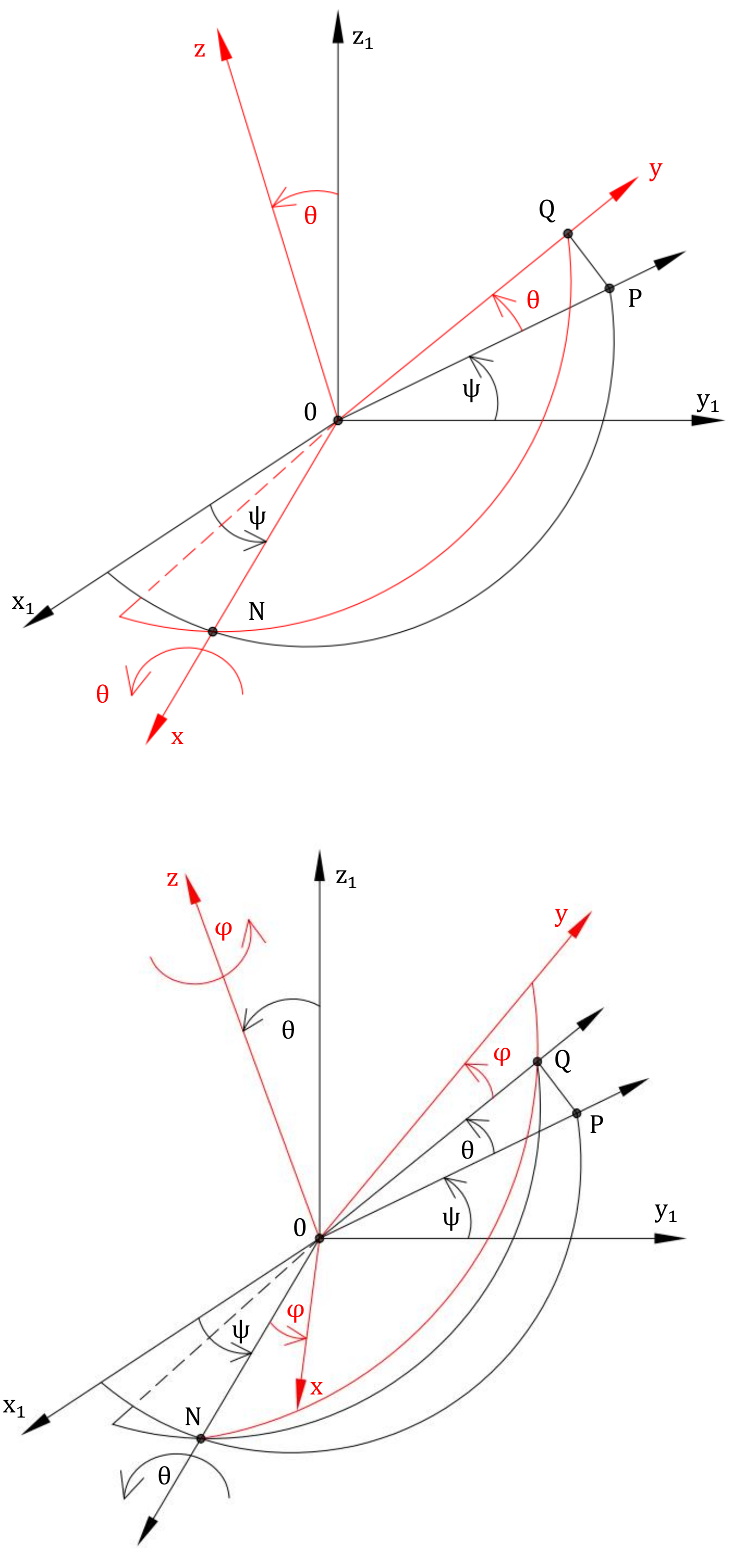


Figura 1.43

Considerând relațiile (1.217), relația (1.216) se poate scrie :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{\psi}\,\mathbf{k_1} + \omega_{\theta}\,\mathbf{u_N} + \omega_{\varphi}\,\mathbf{k} \qquad (1.218)$$

Relația (1.198) reprezintă a treia relație analitica pentru vectorul **ω** în mișcarea sferică.
Proiectând relația (1.198) pe axele sistemului mobil de referință se obțin componentele scalare ale vectorului **ω** în acest sistem.
Se înmulțește scalar relația (1.218) cu versorii **i**, **j**, **k** succesiv și se obține:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega_x} &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{i} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{i} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{i} \\
\boldsymbol{\omega_y} &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{j} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{j} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j} \\
\boldsymbol{\omega_z} &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{k} + \dot{\theta}\,\mathbf{u}_N\,\mathbf{k} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{1.219}$$

Știind că,

$$\mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{u_N}\,\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{k}\,\mathbf{k} = 1$$

relațiile (1.219) devin:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{i} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{i} \\
\omega_y &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{j} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{j} \\
\omega_z &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{k} + \dot{\varphi}
\end{aligned} \tag{1.220}$$

Proiectând relația (1.218) pe axele sistemului fix de referință se obțin componentele scalare ale vectorului $\boldsymbol{\omega}$ în acest sistem.
Se înmulțește scalar relația cu versorii $\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}, \mathbf{k_1}$ succesiv și se obține:

$$\begin{aligned}
\omega_{x_1} &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{i_1} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{i_1} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{i_1} \\
\omega_{y_1} &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{j_1} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{j_1} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j_1} \\
\omega_z &= \dot{\psi}\,\mathbf{k_1}\,\mathbf{k_1} + \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{k_1} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{k_1}
\end{aligned} \tag{1.221}$$

Știind că

$$\mathbf{k_1}\,\mathbf{k_1} = 1$$
$$\mathbf{u_N}\,\mathbf{k_1} = \mathbf{k_1}\,\mathbf{i_1} = \mathbf{k_1}\,\mathbf{j_1} = 0$$

relațiile (1.201) devin:

$$\begin{aligned}
\omega_{x_1} &= \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{i_1} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{i_1} \\
\omega_{y_1} &= \dot{\theta}\,\mathbf{u_N}\,\mathbf{j_1} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{j_1} \\
\omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\,\mathbf{k}\,\mathbf{k_1}
\end{aligned} \tag{1.222}$$

distribuția vitezelor
distribuția vitezelor la un moment dat al mișcării este identică cu distribuția vitezelor din mișcarea de rotație în jurul axei instantanee de rotație Δ.
Ecuațiile axei instantanee de rotație Δ sunt:

- în sistemul de referință fix:

$$\frac{x_1}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \tag{1.223}$$

- în sistemul de referință mobil:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} \tag{1.224}$$

Vectorul $\boldsymbol{\omega}$ fiind variabil în timp ca mărime și orientare rezultă că și axa Δ își modifică poziția în timp.
Locul geometric al pozițiilor succesive ale axei instantanee de rotație Δ în raport cu reperul fix este o suprafață conică cu vârful în O numită axoidă fixă sau con herpolodic, iar locul geometric al pozițiilor succesive ale axei instantanee de rotație Δ în raport cu reperul mobil este tot o suprafață conică cu vârful în O numită axoidă mobilă sau con polodic, a căror ecuații se determină prin eliminarea parametrului t în ecuațiile 1.223 și 1.224 (Fig. 1.44).

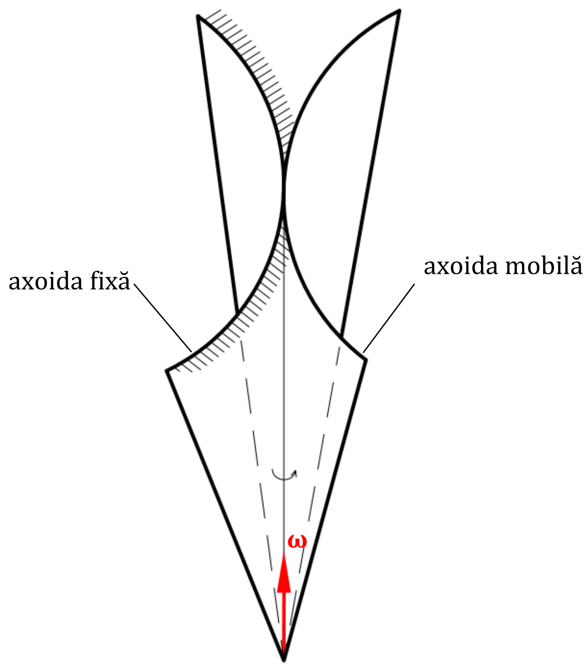


Figura 1.44

- Accelerații

Vectorul accelerație unghiulară $\boldsymbol{\varepsilon}$ este derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ și va fi dirijat după direcția tangentei la curba traiectoriei vârfului vectorului viteză unghiulară (curba hodograf) (Fig. 1.45).

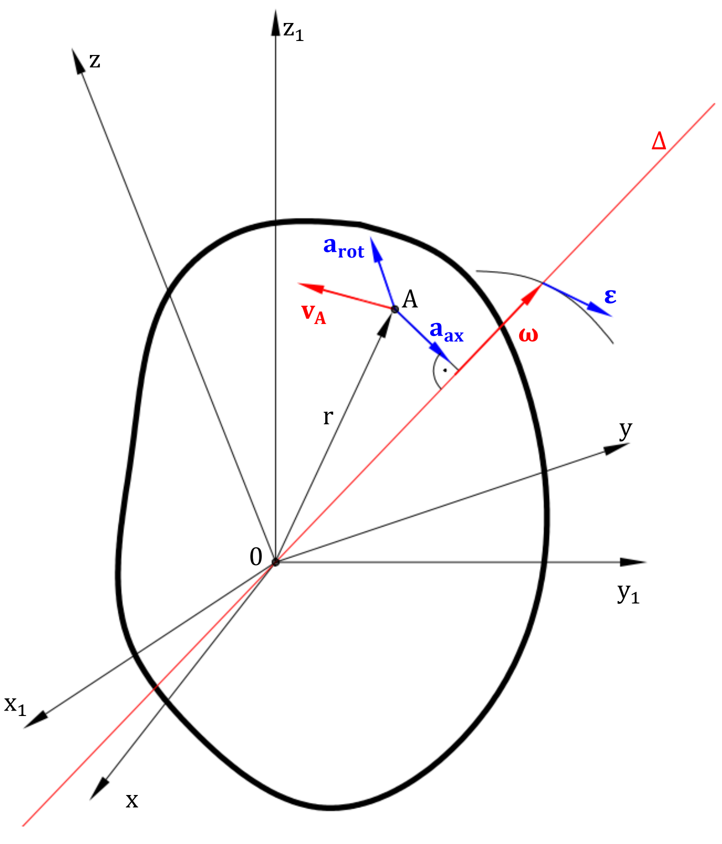


Figura 1.45

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$$

Accelerația punctului A se exprimă prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{v_A} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.225}$$

Accelerația unui punct ce aparține solidului are 2 componente:
accelerația de rotație

$$\mathbf{a_{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$$

și accelerația axipetă

$$\mathbf{a_{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.226}$$

Accelerația punctului A se mai poate exprima prin relația:

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_{rot}} + \mathbf{a_{ax}} \tag{1.227}$$

Vectorul accelerație nu mai este conținut în planul normal la axa de rotație. Punctele situate pe axa instantanee de rotație nu au accelerațiile nule deoarece pentru ele $\mathbf{a_{rot}} \neq \mathbf{0}$, dar $\mathbf{a_{ax}} = \mathbf{0}$.
Singurul punct de accelerație nulă este punctul O.

2.7 Mișcarea generală

Definiția mișcării

Mișcarea în care solidul poate ocupa orice poziție în spațiu în tot timpul mișcării se numește mișcare generală sau oarecare. Mișcarea se raportează la un sistem de referință fix și la un sistem de axe mobil, legat de corpul în spațiu în mișcare (Fig. 1.46).

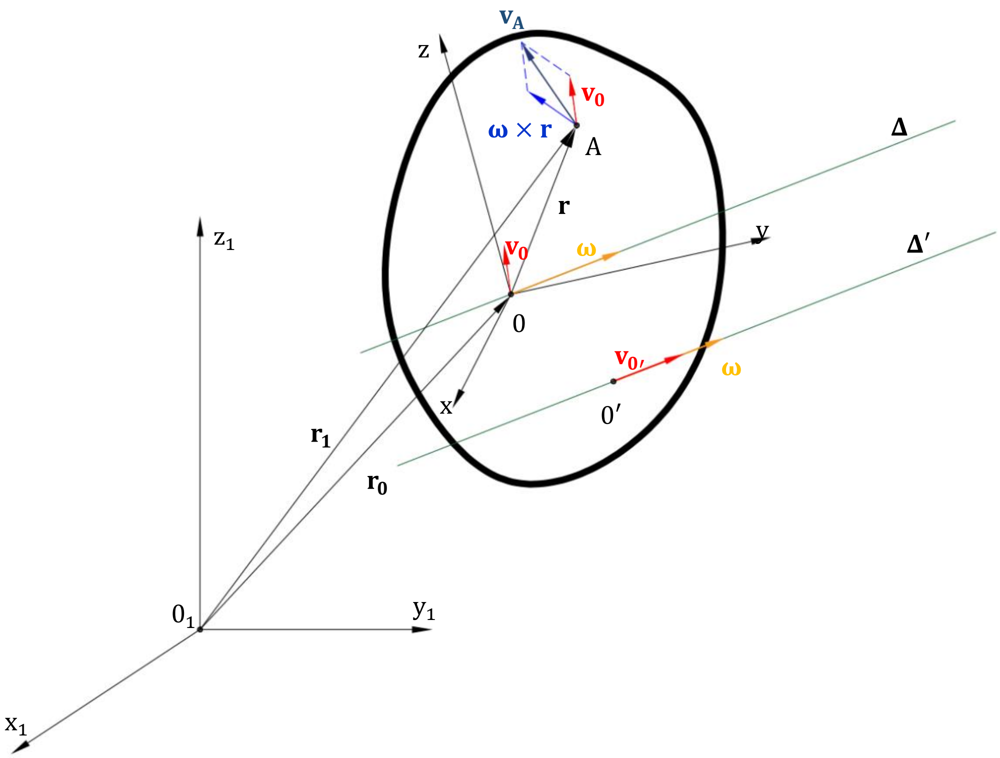


Figura 1.46

Grade de libertate

În această mișcare corpul are 6 grade de libertate cinematică.
Poziția solidului în spațiu în raport cu reperul fix este determinată de poziția punctului O și de orientarea axelor reperului mobil.
Știind că vectorul de poziție al punctului O este $r_0 = x_0\,\mathbf{i_1} + y_0\,\mathbf{j_1} + z_0\,\mathbf{k_1}$.
Ecuațiile finite a mișcării generale sunt în acest caz:

$$\begin{array}{ll} x_0 = x_0(t) & \mathbf{i} = \mathbf{i}(t) \\ y_0 = y_0(t) & \mathbf{j} = \mathbf{j}(t) \\ z_0 = z_0(t) & \mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{t}) \end{array} \tag{1.228}$$

Orientarea axelor reperului mobil se poate exprima și prin unghiurile lui Euler.
În acest caz ecuațiile finite a mișcării generale sunt :

$$\begin{array}{ll} x_0 = x_0(t) & \psi = \psi(t) \\ y_0 = y_0(t) & \theta = \theta(t) \\ z_0 = z_0(t) & \varphi = \varphi(t) \end{array} \tag{1.229}$$

Elementele mișcării

- Traiectorii

Traiectoriile punctelor ce aparţin corpului rigid, în mișcarea generală sunt curbe oarecare în spațiu.

- Viteze

Din figura 1.47 se observă că:

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}$$

Iar

$$\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{1.230}$$

viteza unghiulară
Vectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ se poate exprima cu relațiile de la mișcarea solidului cu punct fix:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k}$$

în care

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{k} = -\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathrm{j} \\ \omega_y &= \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{i} = -\dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{k} \\ \omega_z &= \dot{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{j} = -\dot{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \tag{1.231}$$

în sistemul de referință fix **v**ectorul viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ se poate exprima astfel:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{bmatrix} = \alpha^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \tag{1.232}$$

în care α^T este transpusa matricei de rotație.
Distribuția vitezelor
Vitezele punctelor solidului rigid care nu aparţin axei suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ se calculează după relația (1.229). Din această relație rezultă că distribuția vectorilor viteză din mișcarea generală se obține compunând vectorii viteză $\mathbf{v_0}$ dintr-o mișcare instantanee de translație a corpului solid, cu vectorii viteză $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ dintr-o mișcare instantanee de rotație a corpului solid, în jurul unei axe instantanee ce trece prin O.
Vitezele punctele Q ale solidului rigid care aparţin axei suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ au vitezele egale cu $\mathbf{v_0}$, $\mathbf{v_Q} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ}$, dar cei doi vectori $\boldsymbol{\omega}$ și $\mathbf{OQ}$ fiind coliniari, produsul vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OQ} = \mathbf{0}$.

Există puncte O′situate într-un plan perpendicular pe vectorul $\boldsymbol{\omega}$ care au vitezele coliniare cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$ astfel încât $\mathbf{v}_{Q'} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}$. Dreapta suport a vectorului $\boldsymbol{\omega}$, se numește în acest caz **axa instantanee de rototranslaţie $\boldsymbol{\Delta'}$.**

$$\mathbf{v}_{o'} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO'} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}$$

Înmulţind vectorial relaţia anterioară la stânga cu $\boldsymbol{\omega}$ se obţine:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OO'}) = \boldsymbol{\omega} \times \lambda\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega}^2\,\mathbf{OO'} = \mathbf{0}$$

De unde se obţine vectorul de poziţie al punctului O’

$$\mathbf{OO'} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v_0}}{\omega^2} \tag{1.233}$$

Ecuaţia vectorială a axei (Δ) este:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO'} + \lambda\,\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathrm{v}_0}{\omega^2} + \lambda\,\boldsymbol{\omega} \tag{1.234}$$

Toate punctele care aparţin suportului vectorului $\boldsymbol{\omega}$ ce trece prin O′ au vitezele egale cu viteza punctului O′, coliniare cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$.
Alegând polul corpului într-un punct O′, al axei de rototranslaţie, distribuţia vectorilor viteză din mişcarea generală poate fi reprezentată prin câmpul vectorilor viteză într-o mişcare instantanee de rototranslaţie a corpului solid.

- Acceleraţii

Acceleraţia unui punct A oarecare aparţinând solidului este

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} + \mathbf{a_{rot}} + \mathbf{a_{ax}}$$

$$\mathbf{a_A} = \mathbf{a_0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{1.235}$$

în care $\mathbf{a_0}$ este vectorul acceleraţie a polului O, $\mathbf{a_{rot}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$,este acceleraţia de rotaţie, $\mathbf{a_{ax}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$este acceleraţia axipetă. Cele două componente $\mathbf{a_{rot}}$ şi $\mathbf{a_{ax}}$ sunt identice cu componentele vectorului acceleraţie din mişcarea solidului cu punct fix. Vectorul $\boldsymbol{\varepsilon}$ este vectorul acceleraţie unghiulară dirijat după tangenta la curba hodograf (traiectoria vârfului vectorului $\boldsymbol{\omega}$) a vectorului $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 1.47).

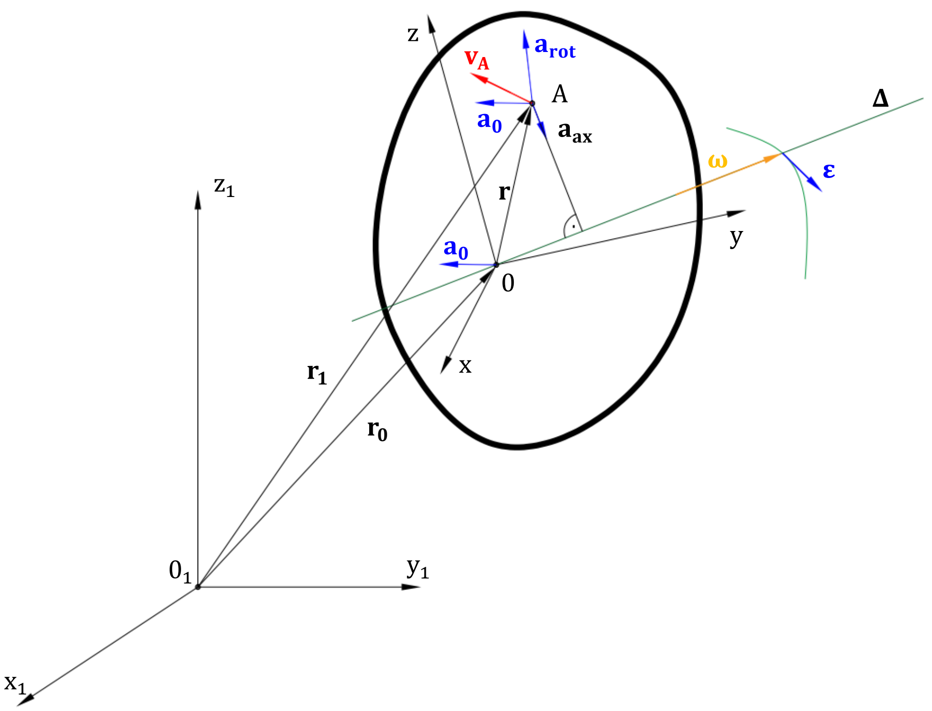


Figura 1.47

distribuția accelerațiilor
Distribuția vectorilor accelerații din mișcarea generală se obține compunând vectorii viteză $\mathbf{a_0}$ dintr-o mișcare instantanee de translație a corpului solid, cu vectorii accelerații $\mathbf{a_{rot}}$ și $\mathbf{a_{ax}}$ dintr-o mișcare instantanee de rotație a corpului solid, în jurul unui punct fix, considerând polul O la un moment dat al mișcării punctul fix.
Există un singur punct de accelerație nulă numit **polul accelerațiilor.**

- Deplasări elementare

Scriind expresia vitezei unui punct oarecare conform relației (1.230) avem:

$$\mathbf{v_a} = \mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{1.236}$$

Relația (1.236) se mai poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r_1}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r_0}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{dt}} \times \mathbf{r} \ \text{ sau}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r_1} = \mathrm{d}\mathbf{r_0} + \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \tag{1.237}$$

Relația (1.237) se mai numește relația lui Chasles[1] și arată că mișcarea generală instantanee poate fi reprezentată ca o succesiune de două mișcări instantanee simple: o translație instantanee și o rotație instantanee în jurul punctului O.

Mișcarea compusă a punctului material

Mișcarea punctului material se raportează la un sistem de referință fix sau absolut $O_1x_1y_1z_1$ și la un sistem de referință mobil sau relativ Oxyz.
Mișcarea punctului material față de sistemul de referință fix sau absolut se numește **mişcare absolută** , iar mișcarea punctului material față de sistemul de referință mobil sau relativ se numește **mişcare relativă** , iar **mişcarea de transport** este mișcarea pe care o are punctul material când este considerat ca fiind fix în sistemul de referință mobil.
Mișcarea absolută (compusă), rezultă din **compunerea** mișcării relative, cu mișcarea de transport (Fig. 1.48).

[1] Michel Floréal Chasles (1793 – 1880) matematician francez

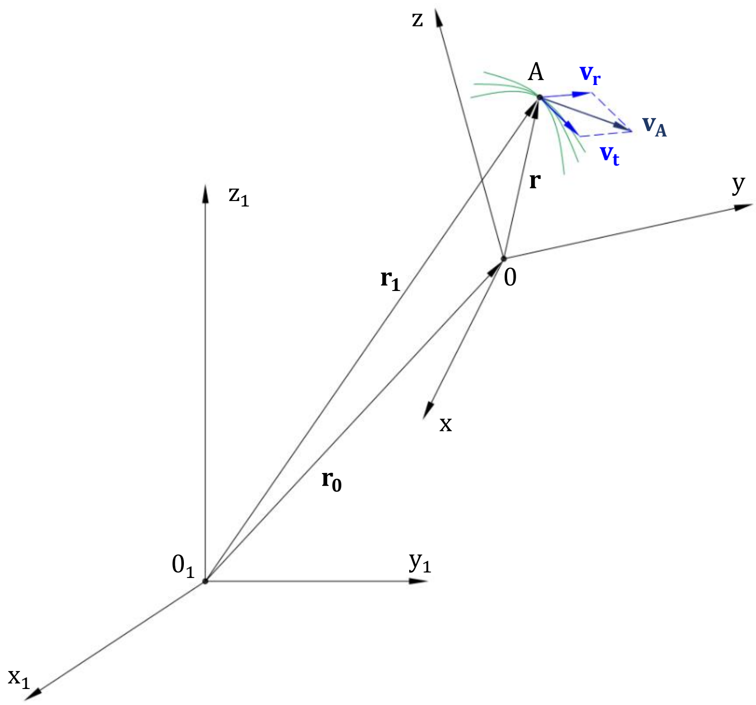


Figura 1.48

Viteze

Numim **viteză absolută $\mathbf{v_A}$**, viteza punctului material viteza în raport cu sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$, **viteză relativă $\mathbf{v_r}$**, viteza punctului material în raport cu sistemul de referință $Oxyz$, iar **viteza de transport $\mathbf{v_t}$**, este viteza punctului material când este considerat ca fiind fix în sistemul de referință mobil (în poziție de repaus relativ). Din figura (1.48) se observă că:

$$\mathbf{r_1} = \mathbf{r_0} + \mathbf{r}$$

iar

$$\mathbf{v_A} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} + \dot{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1} = \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{1.238}$$

în care

$$\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \mathbf{v_0}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v_r}$$

$$\mathbf{v_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v_t}$$

Cu notațiile de mai sus relația (1.217) devine:

$$\mathbf{v_A} = \mathbf{v_r} + \mathbf{v_t} \tag{1.239}$$

Viteza absolută a punctului material, este egală cu suma dintre viteza relativă și viteza de transport în fiecare moment al mișcării.

Accelerații

Accelerația absolută a punctului material se obține derivând vectorul viteză absolută, ținând seama că vectorii **r** și $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$ se derivează după regula de derivare a vectorilor variabili.

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right) \quad (1.240)$$

în care

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{a}_0$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \mathbf{a}_\mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{a}_\mathbf{t}$$

$$2\, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\mathbf{r} = \mathbf{a}_\mathbf{c}$$

Vectorul $\mathbf{a}_\mathbf{c}$ se numește accelerația Coriolis[2]
Accelerația Coriolis este nulă dacă:
- mișcarea de transport este o mișcare de translație ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$)
- punctul material este fix în sistemul de referință mobil (repaus relativ, $\mathbf{v}_\mathbf{r} = \mathbf{0}$)
- vectorul $\mathbf{v}_\mathbf{r}$ este paralel cu vectorul $\boldsymbol{\omega}$.

Cu notațiile de mai sus relația (1.240) devine:

$$\mathbf{a}_\mathrm{a} = \mathbf{a}_\mathbf{r} + \mathbf{a}_\mathbf{t} + \mathbf{a}_\mathbf{C} \quad (1.241)$$

Accelerația absolută a punctului material, este egală cu suma dintre accelerația relativă, accelerația de transport și accelerația Coriolis în fiecare moment al mișcării.

[2] Gaspard-Gustave de Coriolis sau Gustave Coriolis (1792 – 1843)