

Curs 11

Grinzi cu zăbrele

Grinzile cu zăbrele sunt sisteme de bare rigide articulate la capete. Aceste articulații poartă numele de noduri. Dacă barele grinzii cu zăbrele sunt conținute în același plan, grinzile se numesc plane, în caz contrar ele se numesc spațiale.

În construcții, grinzile cu zăbrele sunt elemente structurale, care au rolul de a prelua încărcări de la alte elemente structurale sau nestructurale și de a le transmite reazemelor. Ele se folosesc la acoperișuri cu deschideri mari, poduri, construcții industriale etc.

În mecanică, grinda cu zăbrele are două modele fizice:

- sisteme de puncte materiale – nodurile, legate între ele prin penduli (barele)
- sisteme de corpuri – barele, legate între ele prin articulații (nodurile).

Pentru a fi funcționale, grinzile cu zăbrele trebuie să îndeplinească două condiții:

- să fie indeformabile din punct de vedere geometric,
- să fie fixate pe corpurile de reazem.

Condiția de indeformabilitate geometrică

Dacă considerăm primul model fizic pentru grinda cu zăbrele plană, acela de sistem de puncte materiale, condiția de indeformabilitate geometrică se scrie prin condiția ca sistemul de puncte materiale să fie fixat. Dacă notăm cu m numărul gradelor de libertate ale sistemului, și cu n numărul nodurilor din sistem atunci:

$$m = 2 \cdot n - (l_i + l_e) = 0 \text{ în care}$$

$$l_i = b = \text{numărul barelor grinzii}$$

$$l_e = 3 = \text{numărul legăturilor simple necesare pentru a fixa un corp (grinda) în plan}$$

$$2 \cdot n - (b + 3) = 0 \quad (1)$$

$2 \cdot n = b + 3$ relația care se stabilește între nr. de noduri și nr. de bare ale unei grinzi cu zăbrele plane pentru a respecta condiția de indeformabilitate geometrică.

Dacă considerăm al doilea model fizic pentru grinda cu zăbrele plană, acela de sistem de corpuri- bare, condiția de indeformabilitate geometrică se pune știind că

cel mai simplu sistem indeformabil de bare este triunghiul de la care se pornește în alcătuirea grinzii, iar apoi se adaugă noi triunghiuri.

În concluzie pentru ca o grinda cu zăbrele să fie indeformabilă geometric, elementele ei, noduri și bare trebuie să respecte relația (1) și în plus barele sale trebuie să formeze triunghiuri.

Condiția de fixare pe corpurile de reazem (legături față de teren)

Grinda se consideră ca un corp solid rigid (metoda solidificării) care trebuie să fie fixat în plan. Pentru a fixa acest corp este nevoie de o articulație plană și un reazem simplu, echivalente cu 3 legături simple dispuse în două puncte.

Elementele grinzii cu zăbrele

- talpa superioară formată din barele de la partea superioară
- talpa inferioară formată din barele de la partea inferioară
- diagonalele sunt barele înclinate care se găsesc între talpa superioară și talpa inferioară
- montanții sunt barele drepte care se găsesc între talpa superioară și talpa inferioară
- diagonalele și montanții se numesc zăbrele
- nodurile sunt articulațiile grinzii

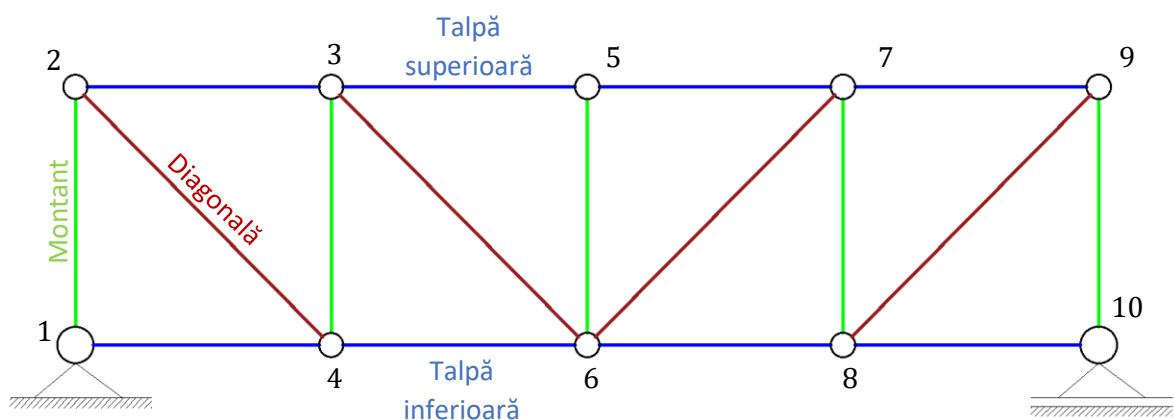


Figura 1 - Elementele grinzii cu zăbrele

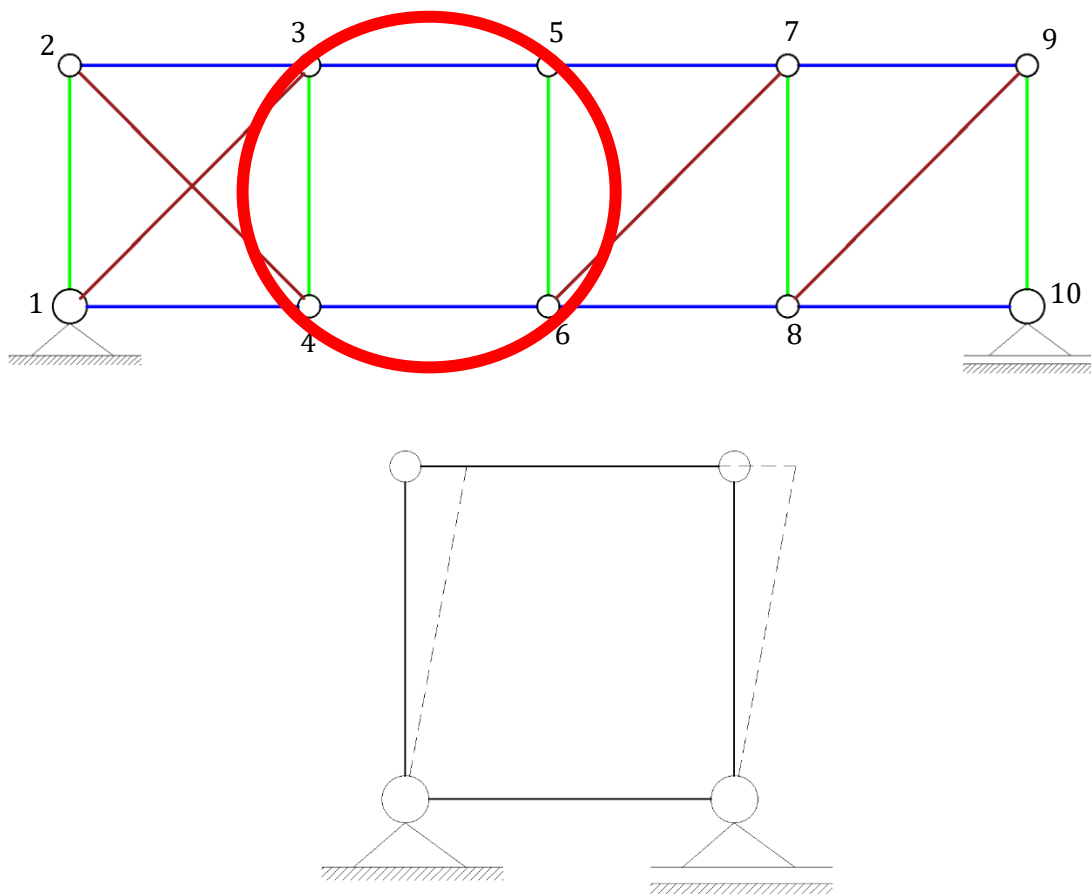


Figura 2 - Dispunere incorectă a barelor în interiorul grinzii cu zăbrele

Eforturi în bare

Ca răspuns la acțiunea forțelor exterioare aplicate grinzii cu zăbrele, în barele ei apar ca reacțiuni niște forțe numite eforturi. Aceste forțe au direcțiile barelor pe care acționează și solicită bara la întindere sau compresiune (eforturi axiale). Ele au valoare constantă pe toată lungimea barei. Efortul de întindere iese din bară și în nod, iar cel de compresiune intră în bară și în nod.

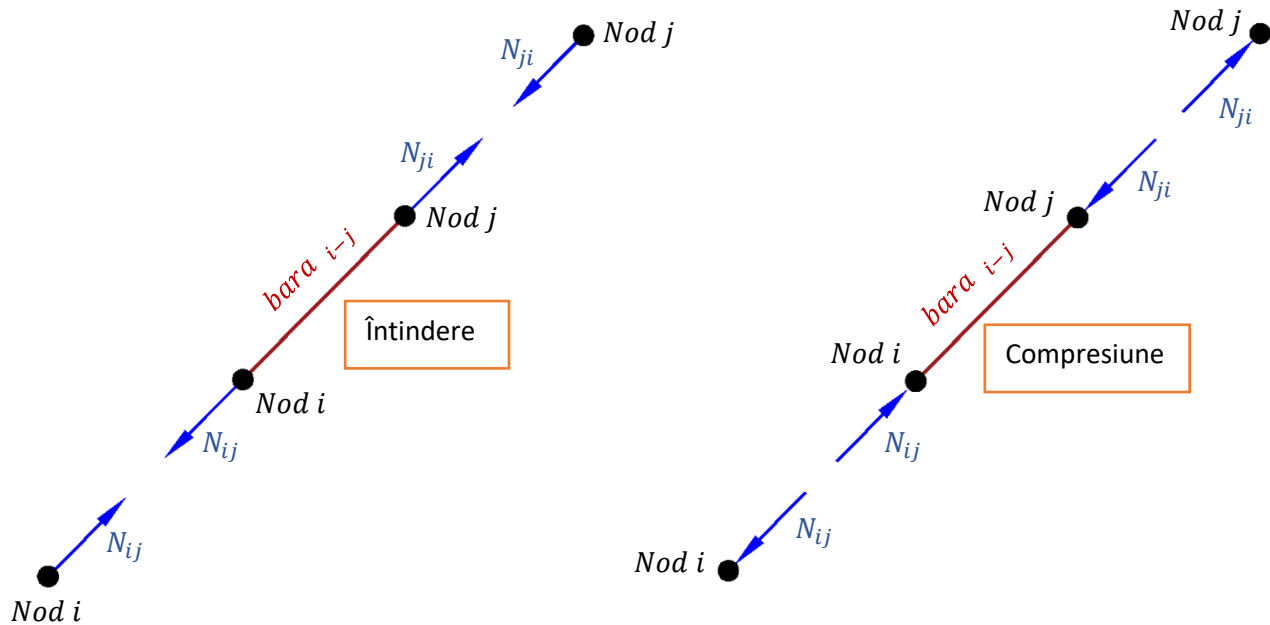


Figura 3 - Eforturi din bare

3.2.2 Problema fundamentală a grinzilor cu zăbrele:

Problema fundamentală a grinzilor cu zăbrele legat este următoarea:

Se dă grinda prin alcătuirea sa și dimensiunile sale, sistemul de forțe care acționează pe ea și legăturile sale. Se cere să se determine eforturile din bare.

Ipoteze de calcul

Pentru a determina eforturile din barele grinzii cu zăbrele se fac următoarele ipoteze de calcul:

- dimensiunile secțiunilor transversale ale barelor sunt mici în raport cu lungimile lor, de aceea barele se vor reprezenta prin axele lor
- barele sunt concurente în noduri
- nodurile sunt articulații perfecte
- forțele exterioare se aplică în noduri
- barele sunt rigide.

Rezolvarea problemei fundamentale grinzilor cu zăbrele:

- se verifică relația: $2 \cdot n - (b + 3) = 0$ (1)
- se determină reacțiunile din legăturile exterioare ale grinzii
- se determină eforturile în bare.

Determinarea eforturilor din bare

Pentru determinarea eforturilor din bare se utilizează două metode.

a) Metoda izolării nodurilor

În aceasta metoda pentru grinda cu zăbrele se folosește primul model fizic și anume sistem de puncte materiale. Aceasta metoda este similara cu metoda izolării corpurilor de la echilibrul sistemelor de corpuri.

Dacă grinda cu zăbrele este în echilibru, atunci orice nod al sau este în echilibru, sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor exterioare și interioare aferente lui. (Conform teoremei echilibrului părților)

- se numerotează nodurile
- se izolează nodurile, pornind de la un nod în care concura cel mult două bare cu efort necunoscut
- pe nod se introduce forțele exterioare, forțele de legătură exterioare și eforturile din barele care concura în nod
- eforturile necunoscute care solicita nodul se trec pe nod ca eforturi de întindere (ies din nod).
- se scriu ecuațiile de echilibru pentru nodul izolat știind ca nodul este acționat de un sistem de forțe concurente și coplanare. Dacă xOy este planul forțelor putem scrie:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases}$$

Din cele două ecuații scalare de echilibru rezultă eforturile din bare. Eforturile în bare fiind constante se trece la următorul nod în care concură cel mult două bare cu efort necunoscut și se procedează la fel ca la primul nod. Astfel se parcurg toate nodurile grinzii cu zăbrele. La ultimul nod ecuațiile de echilibru se folosesc pentru verificarea echilibrului nodului.

Observații:

- eforturile din bare se consideră întinderi dacă ele rezultă pozitive și compresiuni dacă ele rezultă negative,
- dacă într-o bară rezultă un efort egal cu zero, ea nu poate fi eliminată deoarece nu se mai respectă relația (1) de indeformabilitate geometrică,
- dacă izolăm un nod în care converg numai două bare, iar nodul este neîncărcat, atunci în ambele bare efortul este nul,
- dacă un nod este alcătuit din două bare și încărcat cu o forță F pe direcția unei bare, în cealaltă bară efortul este nul,
- dacă un nod este alcătuit din două bare și care are un reazem simplu pe direcția unei bare, atunci în cealaltă bară efortul este nul deoarece reacțiunea corespunzătoare reazemului are rolul forței F ,
- dacă un nod este neîncărcat și este alcătuit din trei bare dintre care două sunt în prelungire, atunci în cea de-a treia bară efortul este nul,
- pentru determinarea efortului într-o anumită bară trebuie parcurse toate nodurile până la ea.

b) Metoda secțiunilor

În aceasta metodă se consideră grinda ca un singur corp. Dacă grinda este în echilibru fiecare parte a sa va fi în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor exterioare și interioare aferente lui. (Conform teoremei echilibrului părților).

Se efectuează o secțiune prin grindă care să cuprindă 3 bare, astfel încă cele 3 bare să nu fie toate concurente sau toate paralele. Astfel grinda se împarte în două părți în echilibru aflate sub acțiunea forțelor exterioare, a reacțiunilor exterioare și a eforturilor din barele secționate.

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru una din cele două părți considerând aceasta parte ca pe un corp solicitat de un sistem de forțe coplanare. Obținem astfel un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute și anume eforturile în barele secționate.

Se rezolvă sistemul de ecuații și se află necunoscutele.

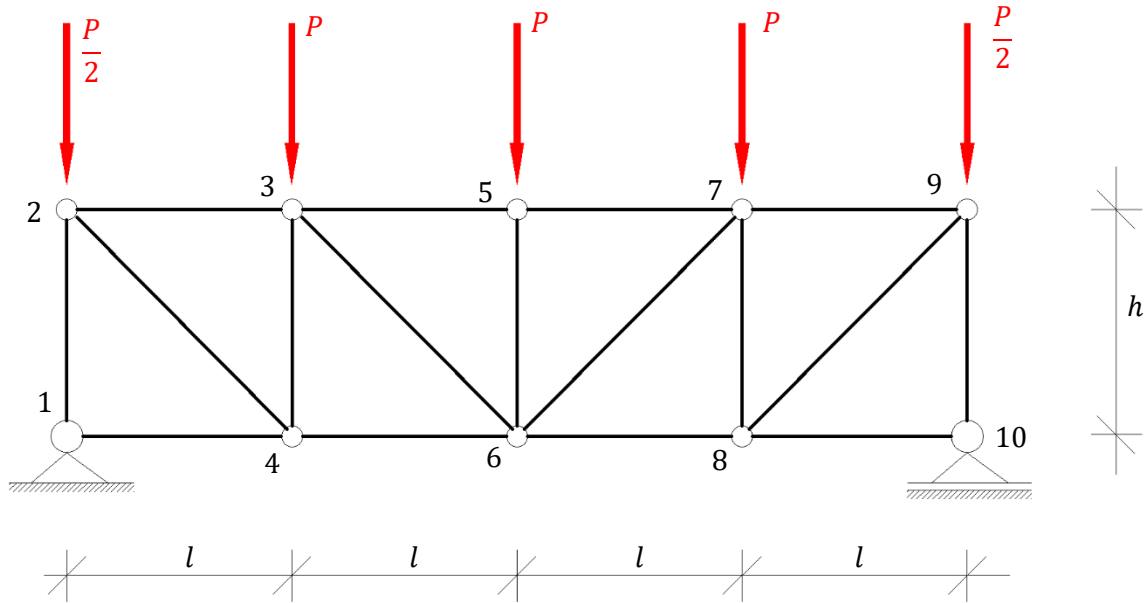
În etapa următoare se secționează grinda prin alte 3 bare respectând aceleași condiții ca și în primul caz.

Dacă vrem să calculăm efortul într-o anumită bară a grinzii cu zăbrele se face secțiunea prin grinda care cuprinde acea bară.

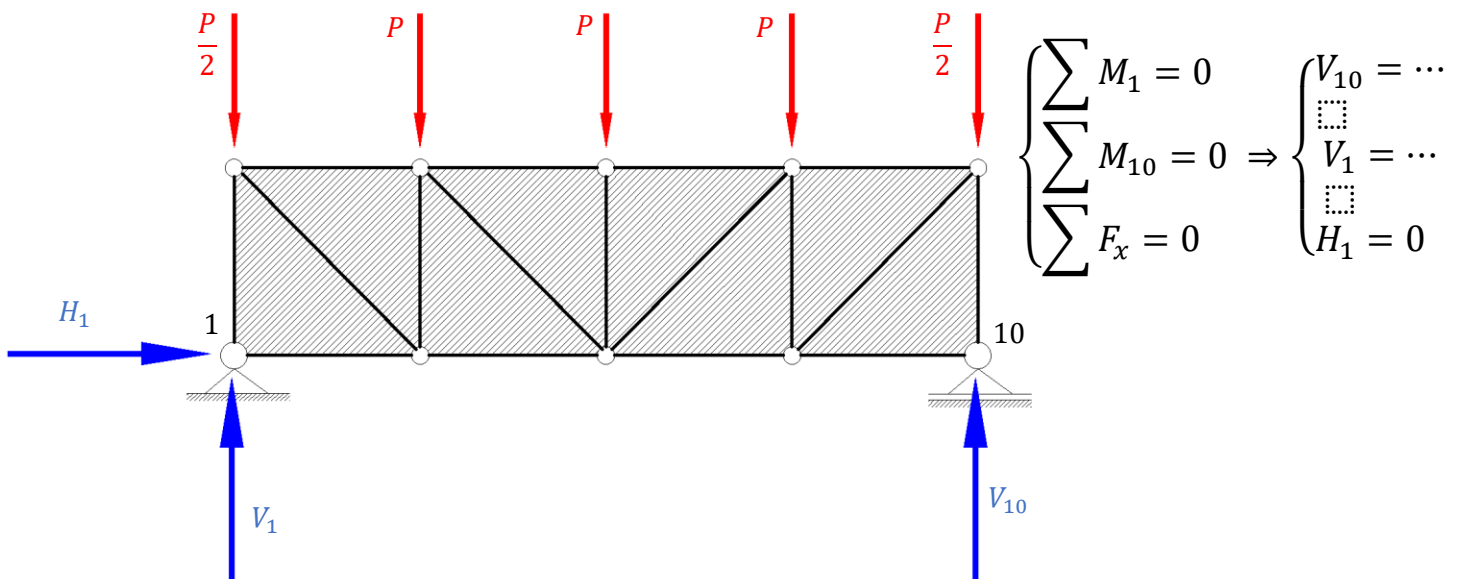
Pentru a afla eforturile în toate barele grinzii aceasta metoda se combina cu metoda izolării nodurilor.

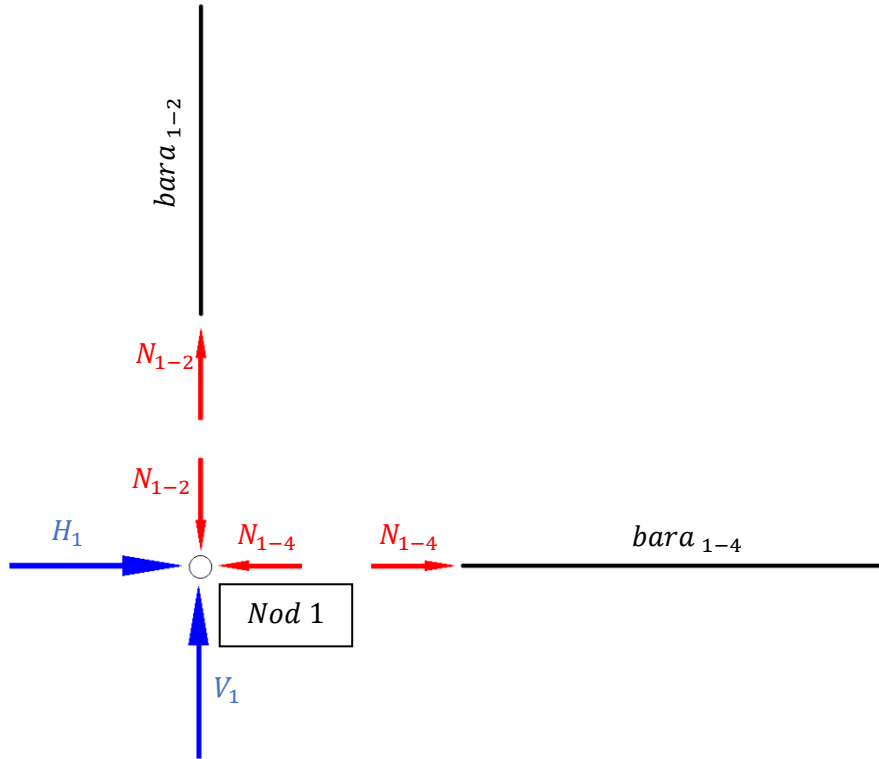
Exemplificare metode de rezolvare

a) Metoda izolării nodurilor



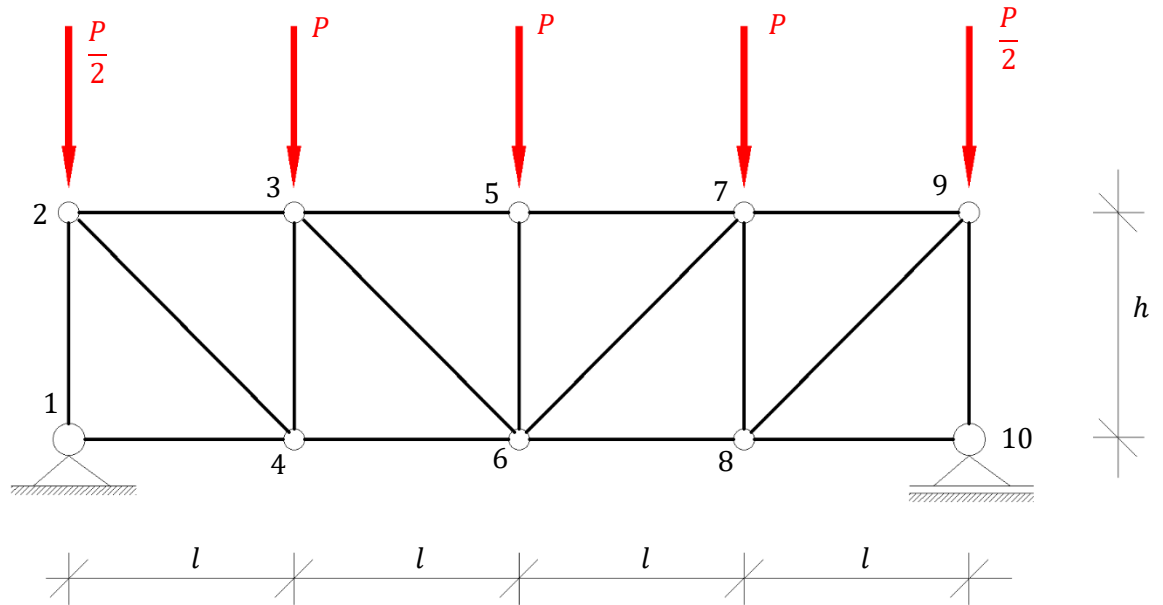
Se calculează forțele de legătură exterioare (reacțiunile din articulația 1 și din reazemul simplu 10):



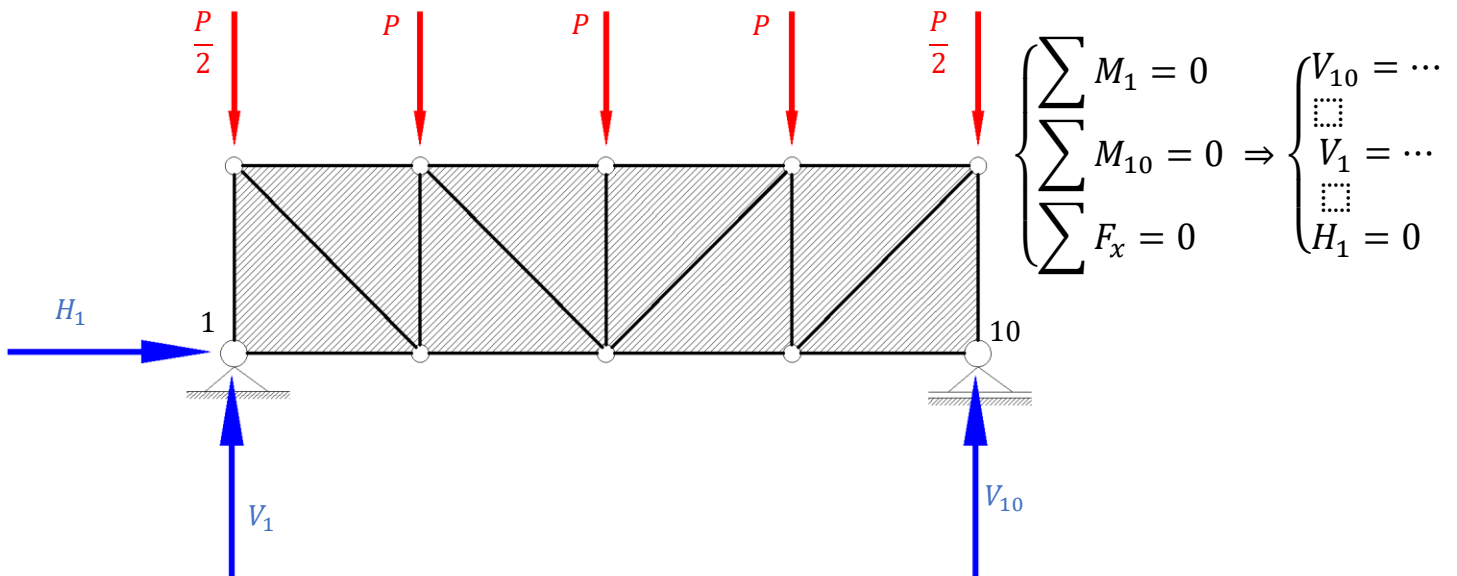


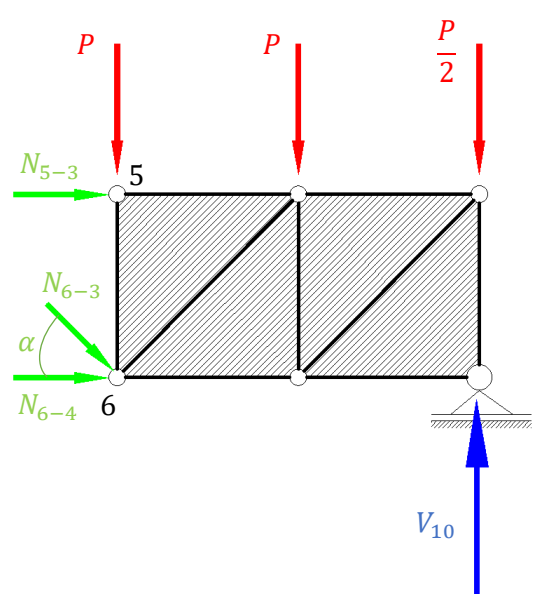
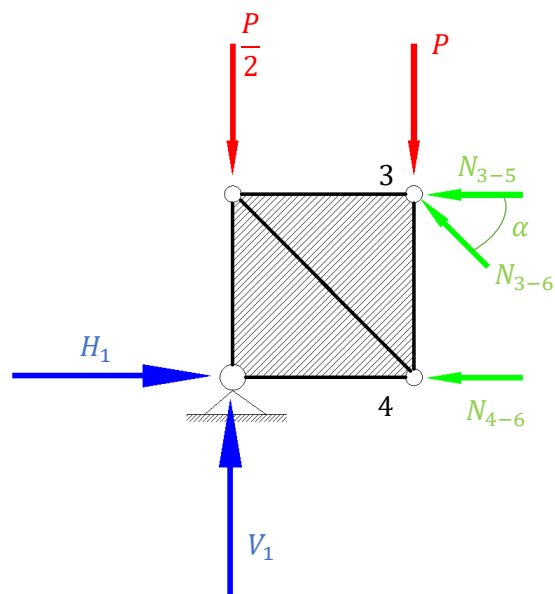
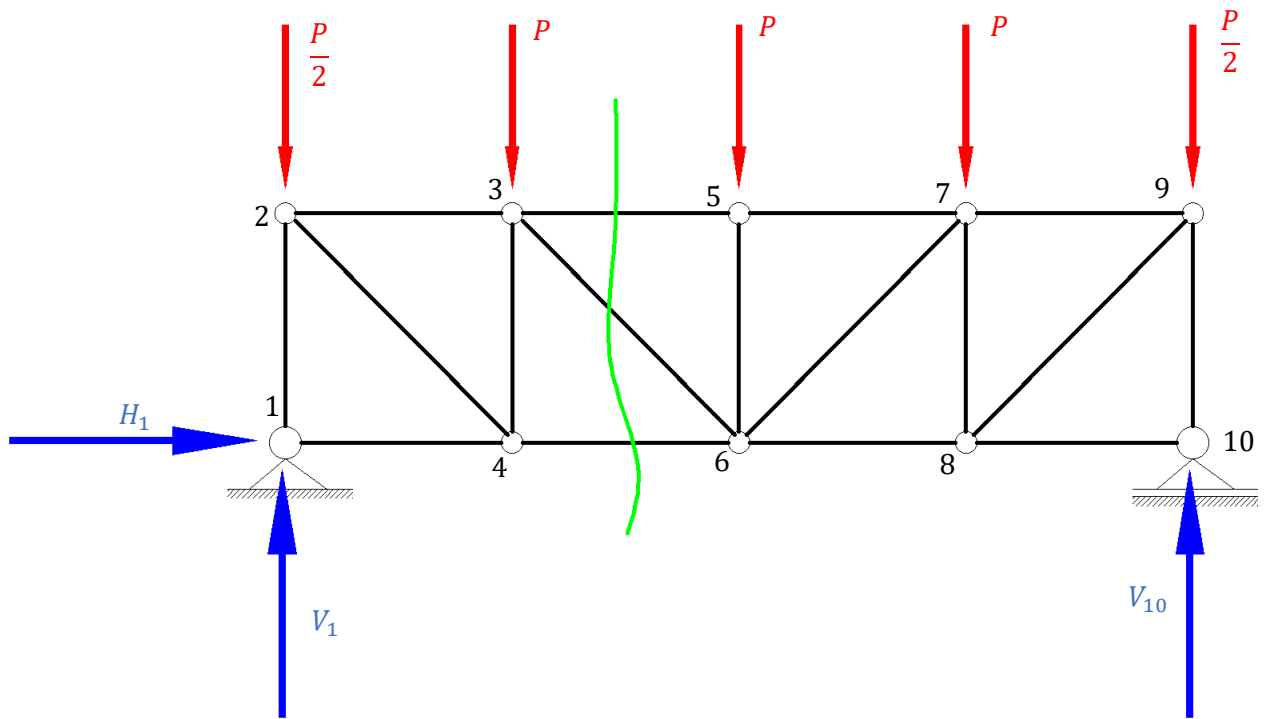
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_1 - N_{1-4} = 0 \\ V_1 - N_{1-2} = 0 \end{cases}$$

b) Metoda secțiunilor



Se calculează forțele de legătură exterioare (reacțiunile din articulația 1 și din reazemul simplu 10):





Pentru a determina cât mai ușor (d.p.d.v. matematic) valorile eforturilor din barele secționate, putem sa scriem următoarele ecuații (folosind metode echilibrului părților):

$$\begin{cases} \sum M_3 = 0 \text{ (pe corpul din stanga)} \\ \sum M_6 = 0 \text{ (pe corpul din dreapta)} \Rightarrow \\ \sum F_x = 0 \text{ (pe corpul din stanga)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -V_1 \cdot l + H_1 \cdot h + \frac{P}{2} \cdot l - N_{4-6} \cdot h = 0 \\ -N_{5-3} \cdot h - P \cdot l - \frac{P}{2} \cdot 2l + V_{10} \cdot 2l = 0 \\ H_1 - N_{4-6} - N_{3-6} \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_{4-6} = \dots \\ N_{5-3} = \dots \\ N_{3-6} = \dots \end{cases}$$