DINAMICA

2.1INTRODUCERE ÎN DINAMICĂ

Dinamica este partea mecanicii care studiază, bazându-se pe rezultatele cinematicii, mişcările mecanice ale punctelor materiale, sistemelor de puncte materiale, corpurilor solide, sau ale sistemelor de corpuri, luând în considerare proprietățile lor inerțiale (mase, momente statice, momente de inerție), forțele şi momentele care acţioneaza asupra lor sau care rezultă ca efect al miscarii.

Dynamics, branch of physical science and subdivision of mechanics that is concerned with the motion of material objects in relation to the physical factors that affect them: force, mass, momentum, energy. (Encyclopædia Britannica)

Cuvântul dinamică derivă din substantivele greceşti δυναμικός - dynamikos (puternic) sau δύναμις – dynamis (putere, energie)

Mişcarea este o proprietate intrinsecă a materiei în sensul că nu exista materie în repaus absolut, după cum nu poate fi concepută mişcarea fără suport material.

Mecanica clasica este constituita pe baza a trei principii fundamentale,numite lex (legi), descrise de I. Newton[1] în 1687 în lucrarea ”Principiile matematice ale filozofiei naturale”

Principiul inertiei (lex prima).

Orice corp își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atât timp cât asupra sa nu acționează alte forțe sau suma forțelor care acționează asupra sa este nulă. Acest principiu a fost dat initial, într-o formulare asemanatoare, de Galileo Galilei[2](1632)

Experienţa arată că un corp material se opune acţiunilor exterioare menite să-i schimbe starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă descrisă de principiul inertiei.

Această opozitie la schimbarea stării de mişcare sau de repaus reprezintă inerţia corpurilor materiale.

Principiul fundamental al dinamicii (lex secunda).

Acceleratia unui punct material este proportională cu forţa aplicată si este îndreptată în direcţia după care acţionează forţa

Newton a introdus masa m a punctului material pentru a exprima această proportionalitate între forţă si acceleraţie:

$$\mathbf{F} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{a}$$

În teoria sa, Newton consideră masa drept măsură a cantităţii de materie conţinută în corpul material¸si element caracteristic al existenţei acestuia

În comentariul făcut de Newton principiului fundamental al dinamicii, comentariu denumit **Corolarul I**, este precizată modalitatea de compunere a forțelor care acţionează asupra unui punct material, și anume regula paralelogramului.

Aceasta era cunoscuta în statica încă din antichitate (Heron[3]), dar o formulare precisă a sa a fost data abia de Stevin[4] (1586)

Principiul paralelogramului (independentei actiunii forţelor):.

Un punct material aflat sub acţiunea simultan a a două forţe descrie (pornind din repaus) diagonala unui paralelogram având ca laturi aceste forte, în acelasi timp în care ar descrie separat fiecare latura sub actiunea forţei corespunzatoare.

Principiul acţiunii si reacţiunii (lex tertia).

Oricărei acţiuni îi corespunde întotdeauna o reacţiune egală ¸si contrară, sau acţiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale şi îndreptate în sens contrar

Cu alte cuvinte,fiind date punctele materialeM_1 M_2 aflate suficient de departe de alte puncte materiale pentru ca acestea sa nu le influenteze mişcarea, dacă M_1 actionează asupra lui M_2 cu forta $\mathbf{F_{12}}$, atunci ¸si M_2 actioneaza asupra lui M_1 cu forta $\mathbf{F_{21}}$, astfel încât vectorii $\mathbf{F_{12}}$ și $\mathbf{F_{21}}$ sunt coliniari cu segmentul M_1M_2¸si $\mathbf{F_{12}} + \mathbf{F_{21}} = \mathbf{O}$. $\mathbf{F_{12}}$ este acţiunea respectiv $\mathbf{F_{21}}$ este reacţiunea.

[1] Isaac Newton (1643 – 1727) matematician, fizician, astronom, alchimist, teolog englez
[2] Galileo Galilei (1564 – 1642) fizician, matematician, astronom și filosof italian
[3] Heron din Alexandria (10 - 70 d.Hr.) matematician, enciclopedist grec
[4] Simon Stevin (1548 - 1620) matematician și inginer flamand

Se cuvine subliniat faptul că avem de a face cu o interacţiune , fortele $\mathbf{F_{12}}$ şi $\mathbf{F_{21}}$ fiind aplicate simultan.

Problema fundamentală a dinmicii este următoarea: cunoscând sistemul material (masă, momente de inerţie), sistemul de forţe care acţionează în orice moment pe sistemul material şi condiţiile iniţiale ale mişcării se cere să se determine mişcarea lui (ecuaţiile finite ale mişcării, traiectoria, viteza şi acceleraţia).

2.2 Dinamica punctului material

Punctul material (particula), este o noţiune prin care este desemnat un corp material ale cărui dimensiuni şi rotaţii instantanee proprii sunt neglijabile.(vezi cap 1.2.1.introducerea in cinematica punctului material)

De asemeni, prin punct material înţelegem şi cea mai "mica"diviziune dintr-un corp material care are proprietăţile fizice ale acestuia. El este si cel mai simplu model fizic din mecanica.

Punctul material poate ocupa orice poziţie în spaţiu şi se numeşte **liber,** sau are restricţii de mişcare şi se numeşte **legat.**

Restricţiile se numesc legături., iar legăturile sunt echivalente cu forţe de legătură sau reacţiuni.

2.2.1. Dinamica punctului material liber

Punctul A(m) se mişcă pe traiectorie şi este acţionat de o forţă **F** sau de vectorul rezultant al unui sistem de forţe concurente.

Problema fundamentală a punctului material liber este următoarea: fiind dat punctul material de masă m, sistemul de forţe care acţionează în orice moment pe punctul material şi condiţiile iniţiale ale mişcării se cere să se determine mişcarea lui (ecuaţiile finite ale mişcării, traiectoria, viteza şi acceleraţia).

Scriind relaţia principiului fundamental al dinamicii rezultă:

$$m \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \tag{2.1}$$

în care $t \geq t_0$.

Relaţia (2.1) este o ecuaţie diferenţială de ordinul al II lea, care se integrează ţinând cont de condiţiile iniţiale ale mişcării:

$t = t_0$
$\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$
$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v_0}$

Aceasta reprezintă o problemă Cauchy[5] din care rezultă ecuaţia vectorială finită a mişcării punctului.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{2.2}$$

2.2.1.1 proiectarea relaţiei (2.1) pe axele unui sistem cartezian triortogonal de referinţă

Dacă

$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$
$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}$
$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}$
$\mathbf{F} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$

[5] Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) matematician francez.

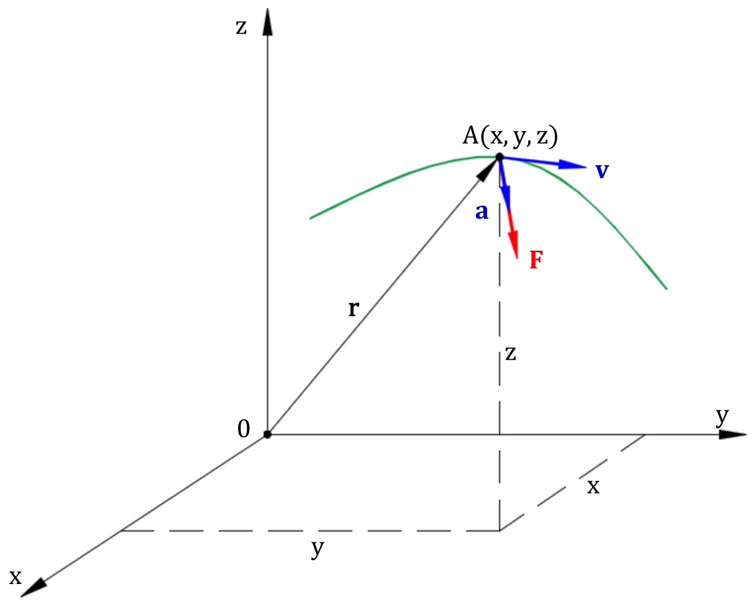


Figura 2.1

Proiectând relaţia (2.1) pe axele sistemului de referinţă cartezian triortogonal se obţin ecuaţiile diferenţiale ale lui Newton:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = \frac{1}{m} X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ &\ddot{y} = \frac{1}{m} Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ &\ddot{z} = \frac{1}{m} Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ &t = t_0, x = x_0, y = y_0, z = z_0 \\ &\dot{x} = v_{0x}, \dot{y} = v_{0y}, \dot{z} = v_{0z} \end{aligned} \tag{2.3}$$

După integrarea relaţiilor (2.3) rezultă ecuaţiile carteziene finite ale mişcării:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \tag{2.4}$$

2.2.1.2 proiectarea relaţiei (2.1) pe axele sistemului cilindric de coordonate (fig.2.2)

Dacă

$$\mathbf{r}' = r\,\boldsymbol{\rho} + z\,\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}}' = \mathbf{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{\rho} + r\dot{\theta}\,\mathbf{n} + \dot{\mathbf{z}}\,\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{\rho} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{n} + \ddot{z}\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_\rho\,\boldsymbol{\rho} + F_n\,\mathbf{n} + F_z\,\mathbf{k}$$

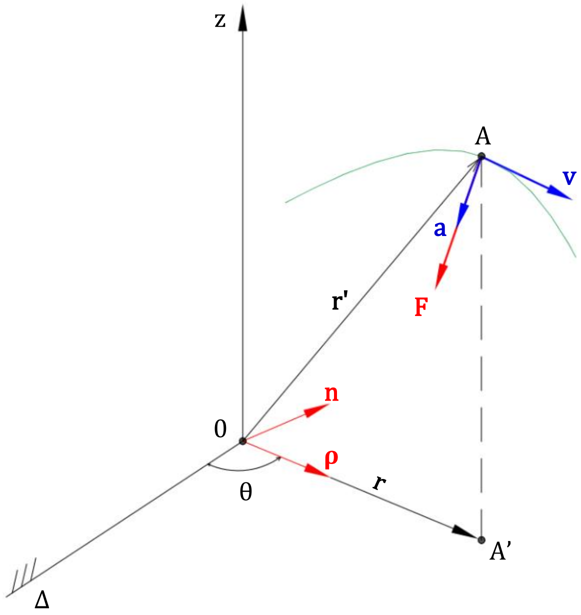


Figura 2.2

Proiectând relația (2.1) pe axele sistemului de referinţă cilindric rezultă:

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{m}F_\rho(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\
&r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{m}F_n(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\
&\ddot{z} = \frac{1}{m}F_z(t, r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) \\
&t = t_0, r = r_0, \theta = \theta_0, z = z_0 \\
&\dot{r} = \dot{r}_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0, \dot{z} = v_{0z}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

După integrarea relaţiilor (2.5) rezultă ecuaţiile finite ale mişcării punctului în coordonate cilindrice:

$$r = r(t), \theta = \theta(t), z = z(t) \tag{2.6}$$

Proiectarea relației (2.1) pe axele triedului lui Frenet (coordonate intrinseci) (fig.2.3):

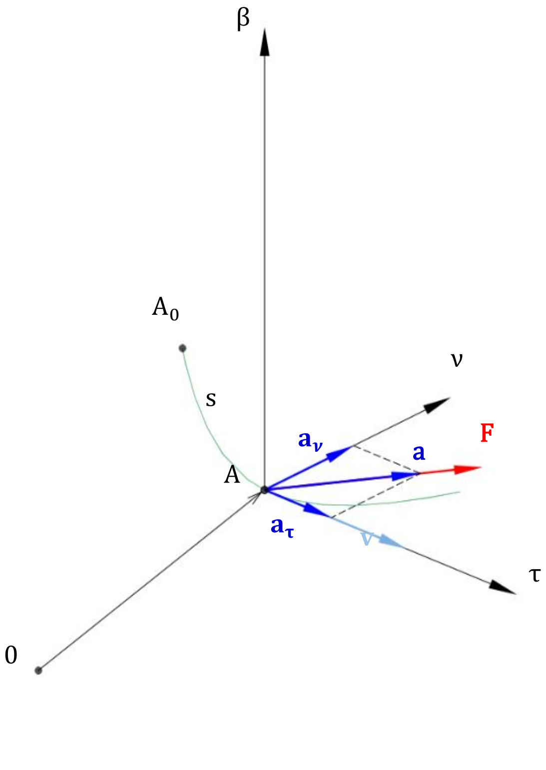


Figura 2.3

Dacă

$s = s\,(t)$

$\mathbf{v} = \dot{s}\,\boldsymbol{\tau}$

$\mathbf{a} = \ddot{s}\,\boldsymbol{\tau} + \frac{s^2}{\rho}\,\boldsymbol{\nu}$

$\mathbf{F} = F_\tau\,\boldsymbol{\tau} + F_\nu\,\boldsymbol{\nu} + F_\beta\,\boldsymbol{\beta}$

Proiectând relaţia (2.1) pe axele triedului lui Frenet avem:

$$\begin{aligned} &\ddot{s} = \frac{1}{m}F_\tau(t,s,\dot{s}) \\ &\frac{s^2}{\rho} = \frac{1}{m}F_\nu(t,s,\dot{s}) \\ &0 = \frac{1}{m}F_\beta(t,s,\dot{s}) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

$t = t_0, s = s_0, \dot{s} = v_0$

După integrarea relaţiilor (2.7) rezultă ecuaţia finită a mişcării punctului material în coordonate intrinseci:

$$s = s(t) \qquad (2.8)$$

__2.2.1.4 Dinamica mişcării centrale a punctului material__

Mişcarea centrală este mişcarea pe care o execută un punct material sub acţinuea unei forţe centrale. Forţa centrală **F**, este forţa a cărei direcţie trece tot timpul printr-un punct fix O. Vectorul de poziţie al punctului material A(m) este **r**. Ecuaţia diferenţială vectorială 2.1 devine:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = F\,\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (2.9)$$

în care vectorii **F** şi **r** au aceiaşi direcţie, la fel şi vectorii **F** şi **r̈**.

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \;\Rightarrow \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = C$$

de unde rezultă că traiectoria punctului material în mişcarea centrală este plană.

Dacă se proiectează relaţia (2.9) pe axele unui sistem de coordonate polare rezultă:

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \pm\frac{1}{m}F \\ &r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\ddot{\theta} = 0 \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Din a două ecuaţie a sistemului de ecuaţii (2.10) rezultă:

$$\frac{1}{r}\left(r^2\dot{\theta}\right)' = 0 \;\Rightarrow r^2\dot{\theta} = C \qquad (2.11)$$

Relaţia (2.11) este valabilă şi în momentul iniţial al mişcării

$r_0^2\,\dot{\theta}_0 = C$

Sistemul de ecuaţii (2.10) se scrie:

$$\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \pm\frac{F}{m} \\ &r^2\dot{\theta} = C \\ &\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\cdot\frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta} = -C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left[-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left[-C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot\dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Înlocuind pe $\ddot{r}$ şi $\dot{\theta}$ în prima ecuaţie din sistemul de ecuaţii (2.12) rezultă:

$$-\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) - r\left(\frac{C}{r^2}\right) = \pm\frac{F}{m}$$
$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \mp\frac{Fr^2}{mC^2} \qquad (2.13)$$

Relaţia reprezintă ecuaţia diferenţială, în coordonate polare a traiectoriei punctului material supus unei forţe centrale numită ecuaţia lui Binet[6].

Semnul + corespunde unei forţe centrale atractive. Iar semnul - corespunde unei forţe centrale de respingere.

Necunoscuta acestei ecuaţii este $\frac{1}{r}$. Condiţiile iniţiale de determinare a constantelor de integrare sunt:

$$\theta = \theta_0$$
$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)_{(\theta=\theta_0)}$$

Se determină astfel ecuaţia traiectoriei în coordonate polare $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(\theta)$.

<u>2.2.1.5. Dinamica punctului material sub acţiunea unei forţe elastice</u>

O forţă centrală exercitată de un punct (pol) ca forţă de atracţie asupra punctului material şi având mărimea direct proporţională cu distanţa de la punct la pol se numeşte forţă elastică (fig.2.4)

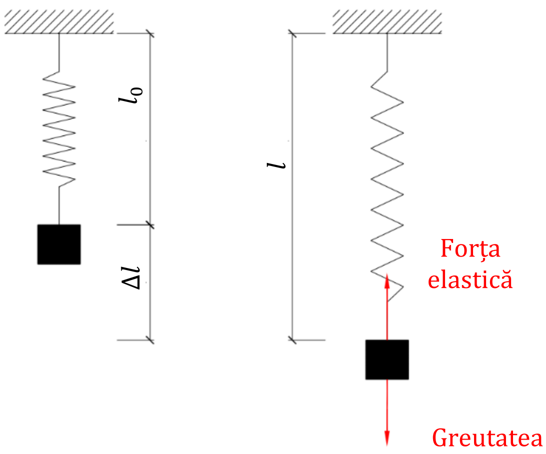


Figura 2.4

$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r} \qquad (2.14)$$

în care

F - este forţa elastică

k - este coeficientul de proporţionalitate

r - este vectorul de poziţie al punctului material

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{k}\,\mathbf{r}$$
$$m\,\ddot{\mathbf{r}} + k\,\mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Dacă se împarte relaţia cu m şi se notează $\frac{k}{m} = \omega^2$ se obţine:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0} \qquad (2.15)$$

Ecuaţia este o ecuaţie diferenţială vectorială liniară cu coeficienţi constanţi de ordinul al II- lea., omogenă care se rezolvă căutând soluţii de forma:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C} \cdot e^{\lambda t} \qquad (2.16)$$

[6] Jacques Philippe Marie Binet (1786 - 1856) matematician și astronom francez.

Înlocuind relaţia (2.16) în ecuaţia (2.15) se obţine ecuaţia caracteristică:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{2.17}$$

Cu rădăcinile

$$\lambda_{1,2} = \pm i\,\omega \tag{2.18}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (2.15) se scrie:

$$\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 \cdot e^{i\omega t} + \mathbf{C}_2 \cdot e^{-i\omega t} \tag{2.19}$$

Conform formulelor lui Euler[7]

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$
$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t$$

Înlocuind aceste formule în relaţia (2.19) şi schimbând constantele de integrare se obţine

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{A}} \cos \omega t + \bar{\mathbf{B}} \sin \omega t \tag{2.20}$$

Constantele de integrare A şi B se obţin din condiţiile iniţiale ale mişcării

La $t = t_0 = 0$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0}$$
$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v_0}$$

Şi rezultă

$$\mathbf{A} = \mathbf{r_0}$$
$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v_0}}{\omega} \tag{2.21}$$

Înlocuind expresiile în obţinem ecuaţia vectorială finită a mişcării:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} \cos \omega t + \frac{\mathbf{v_0}}{\omega} \sin \omega t \tag{2.22}$$

Proiectând relaţia pe axele unui sistem de referinţă obţinem componentele scalare ale vectorului **r**

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t \\ y &= y_0 \cos \omega t + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \tag{2.23}$$

Propietăţile mişcării

- traiectoria este o curbă plană închisă
- traiectoria nu trece prin polul 0
- mişcarea punctului este periodică

perioada mişcării:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

frecvenţa mişcării:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

frecvenţa circulară sau pulsaţia mişcării este:

$$\omega = 2\pi\nu$$

Dacă $\mathbf{r_0}$ şi $\mathbf{v_0}$ sunt doi vectori coliniari mişcarea este rectilinie oscilatorie având traiectoria după direcţia comună a celor doi vectori.

2.2.2. Dinamica punctului material legat

Punctul material este în mişcare şi este supus la legături care îi suprimă din gradele de libertate.

Problema fundamentală a punctului material legat este următoarea: fiind dat punctul material de masă m, sistemul de forţe care acţionează în orice moment pe punctul material, legăturile la care este supus şi condiţiile iniţiale ale mişcării, se cere să se determine mişcarea lui (ecuaţiile finite ale mişcării, traiectoria, viteza şi acceleraţia) precum şi reacţiunea dinamică

[7] Leonhard Euler (1707 – 1783)

Ecuaţia mişcării punctului material legat, rezultă din ecuaţia fundamentală a dinamicii pentru acest caz:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{T} \tag{2.24}$$

în care:

N este forţa de legătură, iar **T** este forţa de frecare.

$|\mathbf{T}| = -\mu'\,|\mathbf{N}|$ în care μ' este coeficientul de frecare dinamic.

Studiind acest caz în coordonate intrinseci rezultă:

$$\begin{aligned} \ddot{s} &= \frac{1}{m}\,F_\tau + T \\ \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \frac{1}{m}\left(F_\nu + N \right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Se obţine astfel un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi cu necunoscutele $s = s(t)$, şi $N = N(t)$.

2.2.3. Dinamica mişcării relative a punctului material

Din cinematica mişcării compuse a punctului material se ştie că:

$$\mathbf{a_a} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a_t} + \mathbf{a_c} \tag{2.26}$$

Din principiul al doilea al dinamicii avem:

$$m \cdot \mathbf{a_a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{T} \tag{2.27}$$

Înlocuind expresia acceleraţiei absolute în relaţia rezultă:

$$\begin{aligned} &m \cdot (\mathbf{a_r} + \mathbf{a_t} + \mathbf{a_c}) = \mathbf{F} \\ &m\,\mathbf{a_r} = \mathbf{F} - m\,\mathbf{a_t} - m\,\mathbf{a_c} = \mathbf{F} + \mathbf{F_t} + \mathbf{F_c} \\ &\text{sau} \\ &m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{F_t} + \mathbf{F_c} \end{aligned} \tag{2.28}$$

în care s-a notat:

$\mathbf{F_t} = -m\,\mathbf{a_t}$ - forţa complementară de transport

$\mathbf{F_c} = -m\,\mathbf{a_c}$ - forţa complementară Coriolis[8].

Prin integrarea ecuaţiei se obţine ecuaţia finită a mişcării punctului $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

2.3. MOMENTE DE INERŢIE

Propietăţile inerţale ale corpurilor sunt: masa, momentul static şi momentul de inerţie.

Momentul de inerţie este o mărime fizică tensorială care exprimă măsura prin care un corp se opune modificării stării sale de repaus relativ sau de mişcare de rotaţie uniformă la acţiunea unui moment al forţei. Conceptul a fost introdus de Leonhard Euler în lucrarea sa *" Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum"* în 1765. Deorece priveşte rotaţia corpurilor, termenul este uneori interpretat ca *inerţie rotaţională*.

Prima lege a lui Newton, care descrie inerţia unui corp în mişcarea rectilinie, poate fi extinsă la inerţia unui corp care se roteşte în jurul unei axe utilizând momentul de inerţie. Astfel, un corp care se roteşte cu viteză unghiulară constantă în jurul unei axe va rămâne în această mişcare cu excepţia cazului când va fi acţionat de un moment exterior.

Momentul de inerţie este analog masei (*masă inerţială*) din mişcarea rectilinie, care măsoară rezistenţa (inerţia) corpurilor în această mişcare.

Tensorul este o entitate matematică definită în cadrul algebrei şi geometriei, frecvent utilizat în fizică, pentru a extinde noţiunile de scalar, vector şi matrice.

Pentru a descrie mişcarea unui corp ce nu-şi modifică structura în timp, abstract, fizica foloseşte conceptul de vector. Pentru corpurile, care îşi schimbă structura în timp, nu mai este posibilă descrierea mişcării lor prin intermediul vectorilor, deoarece nu mai pot fi reduse la un singur punct reprezentativ, iar pentru care îşi modifică structura în timp este nevoie să se introducă o noua noţiune care să păstreze şi informaţia despre structura obiectului. Tensorul este noţiunea care permite descrierea nu doar a traiectoriei corpului, ci şi a structurii sale pe parcursul mişcării.

---

[8] Gaspard-Gustave de Coriolis sau Gustave Coriolis (1792 – 1843)

Un tensor poate fi reprezentat ca o matrice multi-dimensională de valori numerice care depinde de sistemul de referinţă.
Tensorii sunt entităţi geometrice introduse în domeniile matematicii şi al fizicii Se consideră un corp raportat la un sistem de referinţă Oxyz.
Se adoptă modelul mecanic al corpului solid rigid de continuu material având masa distribuită în mod continuu şi se asociază punctului oarecare A elementul diferenţial de masă dm (fig.2.5).

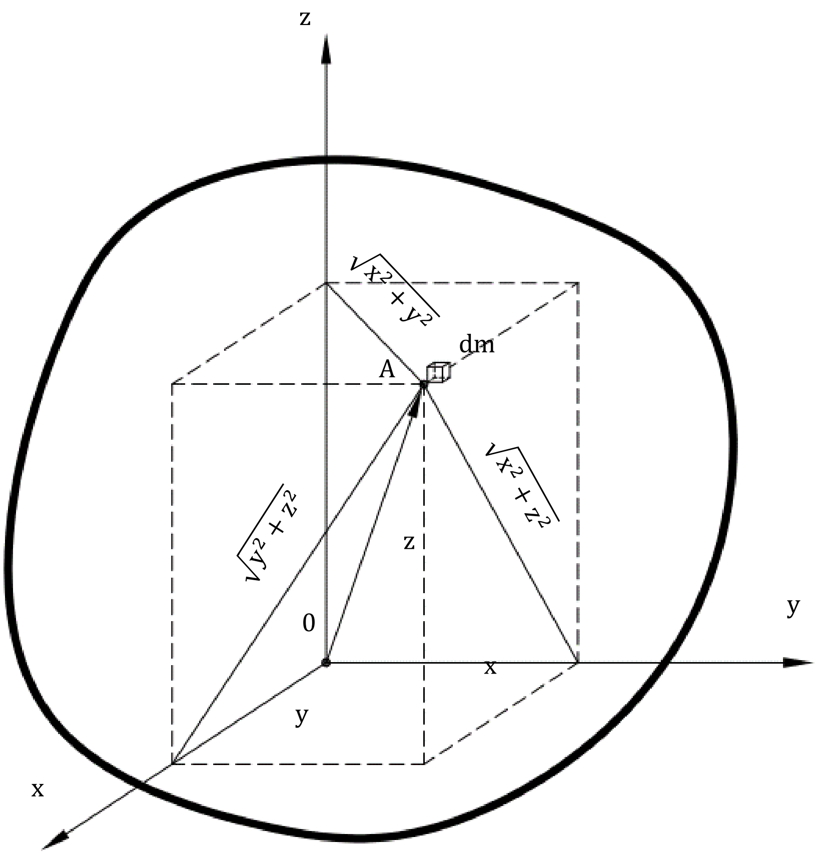


Figura 2.5

2.3.1 momente de inertie masice

Vectorul de poziţie are expresia :

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

căruia i se asociază tensorul de poziţie:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Se definesc momentele statice ale corpului în raport cu planele de coordonate:

$$S_{y0z} = \int_C x\,dm$$

$$S_{x0z} = \int_C y\,dm \tag{2.30}$$

$$S_{x0y} = \int_C z\,dm$$

Tensorul moment static al corpului în raport cu polul O va fi:

$$\mathbf{S_0} = \int_C \mathbf{r}\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} 0 & -S_{x0y} & S_{x0z} \\ S_{x0y} & 0 & -S_{y0z} \\ -S_{x0z} & S_{y0z} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Teorema momentelor statice are în acest caz expresia:

$$\mathbf{S_0} = M \cdot \mathbf{r_c} \tag{2.32}$$

unde $\mathbf{r_c}$ este tensorul de poziţie al centrului de masă C.

$$\mathbf{r_c} = \begin{bmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Şi M masa totală a corpului:

$$M = \int_C \mathrm{dm}$$

Dacă $0 \equiv C$ atunci $\underline{S_c} = \underline{0}$. În sistemul de referinţă ales se definesc momentele de inerţie axiale în raport cu axele de coordonate x,y,z şi momentele de inerţie centrifugale.

Momente de inerţie axiale;

$$J_x = \int_C (y^2 + z^2)\,\mathrm{dm}$$

$$J_y = \int_C (x^2 + z^2)\,\mathrm{dm} \tag{2.34}$$

$$J_z = \int_C (x^2 + y^2)\,\mathrm{dm}$$

Momente de inerţie centrifugale

$$J_{xy} = J_{yx} = \int_C xy\,\mathrm{dm}$$

$$J_{xz} = J_{zx} = \int_C xz\,\mathrm{dm} \tag{2.35}$$

$$J_{yz} = J_{zy} = \int_C yz\,\mathrm{dm}$$

Tensorul moment de inerţie în raport cu polul O este:

$$\mathbf{J_0} = \int_C \mathbf{r}\,\mathbf{r^T}\,\mathrm{dm} = \int_C \mathbf{r^T}\,\mathbf{r}\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

Momentele de inerţie axiale sunt pozitive, iar momente de inerţie centrifugale pot fi şi pozitive şi negative

2.3.2. variaţia tensorului moment de inerţie la translaţia axelor sistemului de referinţă

Cunoscând tensorul moment de inerţie J_0, se determină tensorul moment de inerţie al corpului în raport cu un alt sistem de referinţă cu originea în punctul O'a cărui axe sunt paralele cu axele sistemului de referinţă cu originea în puncul O.(fig2.6) Vectorul de poziţie al punctului A în sistemul de referinţă translatat este:

$$\mathbf{r'} = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k}$$

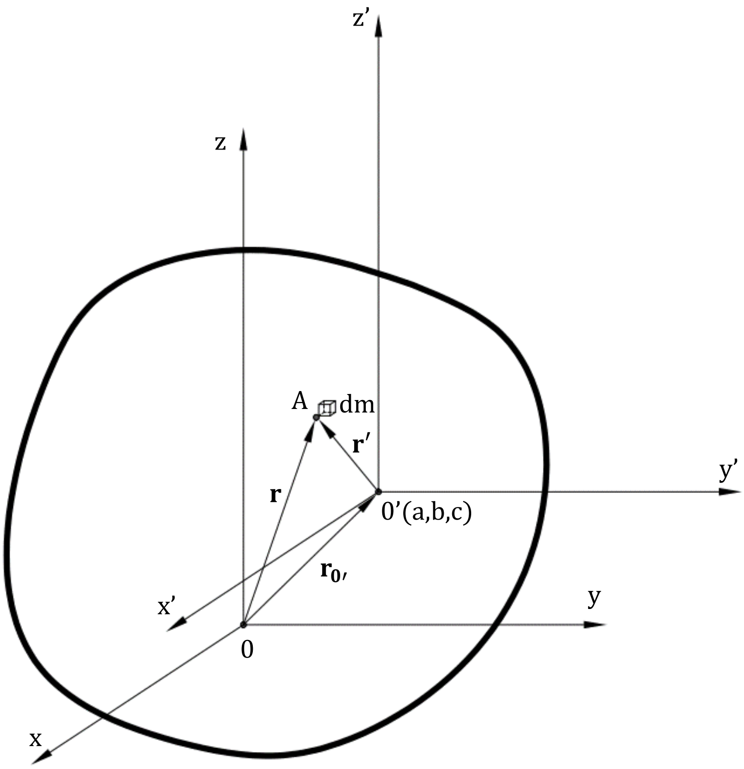


Figura 2.6

Coordonatele puncului O' fiind a,b,c vectorul de poziţie al punctului O' este

$$\mathbf{r_{0'}} = \mathrm{a}\,\mathbf{i} + \mathrm{b}\,\mathbf{j} + \mathrm{c}\,\mathbf{k}$$

Tensorii corespunzători celor doi vectori sunt

$$\mathbf{r}\,' = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\mathbf{r_{0'}} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Relaţiile între cei trei vectori ca şi între tensorii corespunzători sunt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_{0'}} + \mathbf{r}\,'$$

$$\mathbf{r}\,' = \mathbf{r} - \mathbf{r_{0'}}$$

$$\mathbf{J_{0'}} = \int_C \mathbf{r}\,(\mathbf{r}\,')^{\mathrm{T}}\,\mathrm{dm} = \int_C (\mathbf{r}\,')^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}\,'\,\mathrm{dm} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

$$\mathbf{J_{0'}} = \int_C (\mathbf{r} - \mathbf{r_{0'}})^{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_{0'}})\,\mathrm{dm} = \int_C \left(\mathbf{r}^{\mathbf{T}} - \mathbf{r}_{\mathbf{0'}}^{\mathbf{T}}\right) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_{0'}})\,\mathrm{dm} =$$
$$= \int_C \mathbf{r}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}\,\mathbf{dm} - \left(\int_C \mathbf{r}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{dm}\right) \cdot \mathbf{r_{0'}} - \mathbf{r}_{\mathbf{0'}}^{\mathbf{T}}\left(\int_C \mathbf{r}\,\mathbf{dm}\right) - \mathbf{r}_{\mathbf{0'}}^{\mathbf{T}}\left(\int_C \mathbf{dm}\right) \cdot \mathbf{r_{0'}} \tag{2.40}$$

Ştiind că

$$\mathbf{S_0^T} = \int\limits_{C} \mathbf{r^T}\, dm$$

$$\mathbf{S_0} = \int\limits_{C} \mathbf{r}\, dm \qquad (2.41)$$

$$M = \int\limits_{C} dm$$

Relaţia 2.41se scrie

$$\mathbf{J_{0'}} = \mathbf{J_0} - \mathbf{S_0^T} \cdot \mathbf{r_{0'}} - \mathbf{r_{0'}^T} \cdot \mathbf{S_0} + \mathbf{r_{0'}^T} \cdot M \cdot \mathbf{r_{0'}} \qquad (2.42)$$

Dacă

$0 \equiv C$ atunci $\mathbf{S_C} = \mathbf{0}$

Şi relatia devine

$$\mathbf{J_{0'}} = \mathbf{J_o} + \mathbf{r_{0'}^T} \cdot M \cdot \mathbf{r_{0'}} \qquad (2.43)$$

Scriind expresiile termenilor ce intervin în relaţia se obţine

$$\begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -c & -b \\ -c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

Identificând termenii din ambii membri ai relaţiei obţinem:

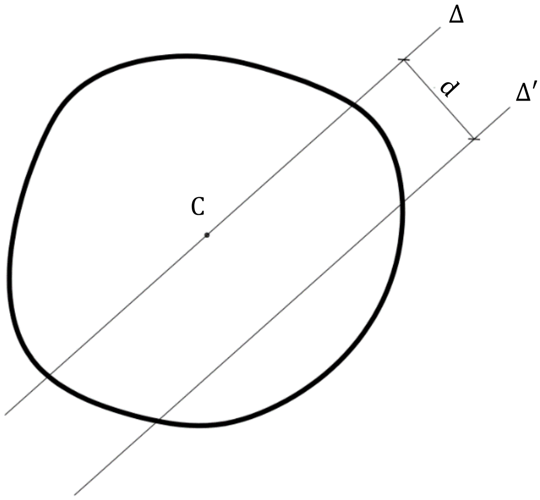
$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x + M(b^2 + c^2) \\ J_{y'} &= J_y + M(c^2 + a^2) \\ J_{z'} &= J_z + M(a^2 + b^2) \\ J_{x'y'} &= J_{xy} + Mab \\ J_{y'z'} &= J_{yz} + Mbc \\ J_{z'x'} &= J_{zx} + Mca \end{aligned} \qquad (2.44)$$

Dacă momentul de inerţie al unui corp în raport cu o axă oarecare Δ este J_Δ iar Δ' este o axă paralelă cu Δ, iar distanţa dintre cele două axe este d, atunci:

(fig2.7)

$$J_{\Delta'} = J_\Delta + M \cdot d^2 \qquad \text{(fig 2.7)}$$

Relaţia se numeşte formula lui Steiner[9] pentru translaţia axelor



[9] Jakob Steiner (1796 –1863)

Figura 2.7

2.3.3 Variaţia tensorului moment de inerţie la rotaţia axelor sistemului de referinţă

Cunoscând tensorul moment de inerţie J_0, se determină tensorul moment de inerţie al corpului în raport cu un alt sistem de referinţă cu originea în punctul O'a cărui axe x',y',z' sunt rotite în raport cu axele sistemului de referinţă cu originea în puncul O.(fig.2.8).

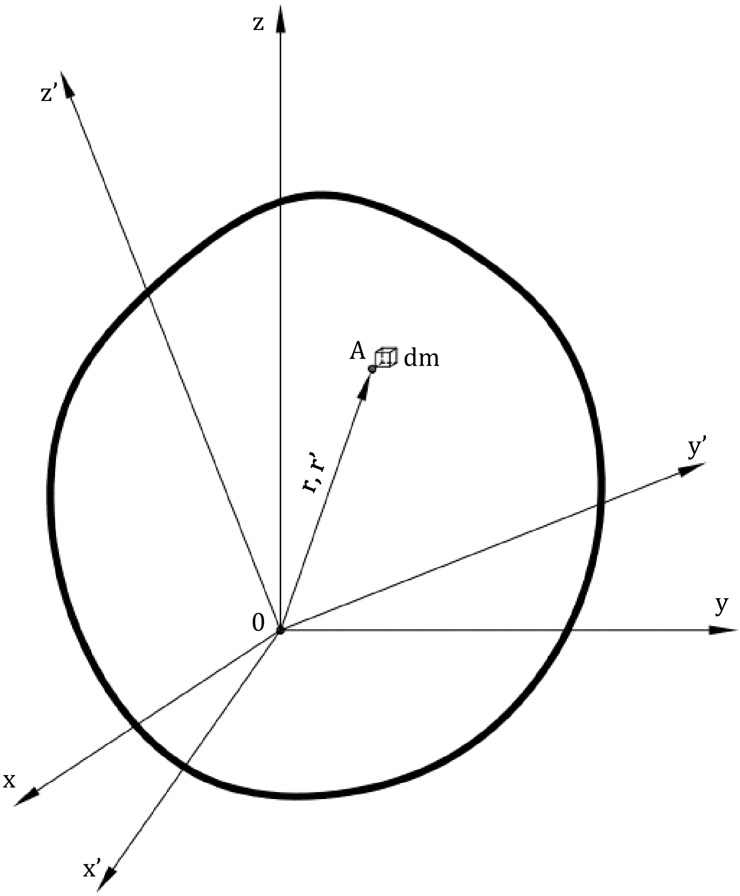


Figura 2.8

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Versorii axelor de coordonate x,y,z,sunt $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ iar ai axelor x',y',z' sunt $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$. Trecerea de la sistemul de referinţă $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la sistemul de referinţă $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ se face cu matricea de rotaţie:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

ale carei elemente sunt cosinuşii directori ai celor două sisteme de axe. Astfel,

$$\begin{matrix} \alpha_{11} = \cos(i', i) & \alpha_{21} = \cos(j', i) & \alpha_{31} = \cos(k', i) \\ \alpha_{12} = \cos(i', j) & \alpha_{22} = \cos(j', j) & \alpha_{32} = \cos(k', j) \\ \alpha_{13} = \cos(i', k) & \alpha_{23} = \cos(j', k) & \alpha_{33} = \cos(k', k) \end{matrix} \tag{2.46}$$

Astfel

$$\begin{bmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

şi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

Propietăţile matricii de rotaţie

(i) matricea $\underline{\alpha}$ este unitară $\det(\underline{\alpha}) = 1$.

(ii) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$

(iii) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{*}$

Unde $\underline{A}^{*}$ este matricea adjunctă.

Tensorul de poziţie al punctului A în sistemul de axe rotit este:

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \tag{2.49}$$

$$\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} 0 & -z' & y' \\ z' & 0 & -x' \\ -y' & x' & 0 \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{0}'} = \int\limits_{C} (\mathbf{r}')^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{r}' \,\mathrm{dm} = \int\limits_{C} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}})^{\mathbf{T}} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}}) \,\mathrm{dm} = \boldsymbol{\alpha} \left(\int\limits_{C} \mathbf{r}^{\mathbf{T}} \mathbf{r} \,\mathrm{dm} \right) \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}} = \boldsymbol{\alpha}\ \mathbf{J}_{\mathbf{0}}\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}} \tag{2.51}$$

Scriind expresiile termenilor ce intervin în relaţia se obţine:

$$\begin{bmatrix} J_{x'} & -J_{x'y'} & -J_{x'z'} \\ -J_{y'x'} & J_{y'} & -J_{y'z'} \\ -J_{z'x'} & -J_{z'y'} & J_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{x} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{y} & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_{x'} &= J_x\alpha_{11}^2 + J_y\alpha_{12}^2 + J_z\alpha_{13}^2 - 2\left(J_{xy}\alpha_{11}\alpha_{12} + J_{yz}\alpha_{12}\alpha_{13} + J_{xz}\alpha_{13}\alpha_{11}\right) \\ J_{y'} &= J_x\alpha_{21}^2 + J_y\alpha_{22}^2 + J_z\alpha_{23}^2 - 2\left(J_{xy}\alpha_{21}\alpha_{22} + J_{yz}\alpha_{22}\alpha_{23} + J_{xz}\alpha_{23}\alpha_{21}\right) \\ J_{z'} &= J_x\alpha_{31}^2 + J_y\alpha_{32}^2 + J_z\alpha_{33}^2 - 2\left(J_{xy}\alpha_{31}\alpha_{32} + J_{yz}\alpha_{32}\alpha_{33} + J_{xz}\alpha_{13}\alpha_{11}\right) \\ J_{x'y'} &= -\left(J_x\alpha_{11}\alpha_{12} + J_y\alpha_{12}\alpha_{22} + J_z\alpha_{13}\alpha_{23}\right) + J_{xy}\left(\alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{21}\alpha_{12}\right) + \\ &\quad + J_{yz}\left(\alpha_{12}\alpha_{23} + \alpha_{31}\alpha_{22}\right) + J_{xz}\left(\alpha_{13}\alpha_{21} + \alpha_{21}\alpha_{13}\right) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dacă momentul de inerţie al unui corp în raport cu polul O este J_O iar Δ este o axă oarecare, având cosinuşii directori l,m,n în raport cu axele x,y,z:

$$J_{\Delta} = J_x l^2 + J_y m^2 + J_z n^2 - 2\left(J_{xy}\, lm + J_{yz}\, mn + J_{xz}\, nl\right) \tag{2.53}$$

în care

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (\text{fig. } 2.9)$$

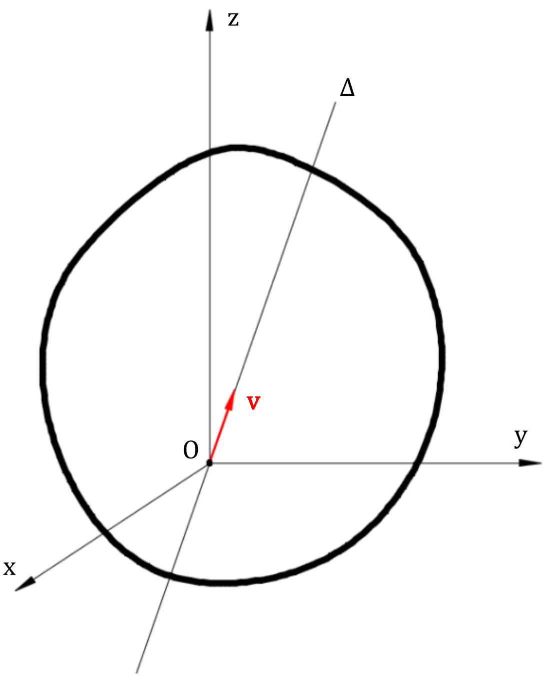


Figura 2.9

2.3.4. Momente de inerţie principale. Direcţii principale de inerţie

Axele pentru care momentele de inerţie au valori extreme (maxime sau minime) se numesc axe principale de inerţie, iar momentele de inerţie în raport cu aceste axe se numesc momente de inerţie principale. Planele determinate de axele principale de inerţie se numesc plane principale de inerţie.(fig.2.10)

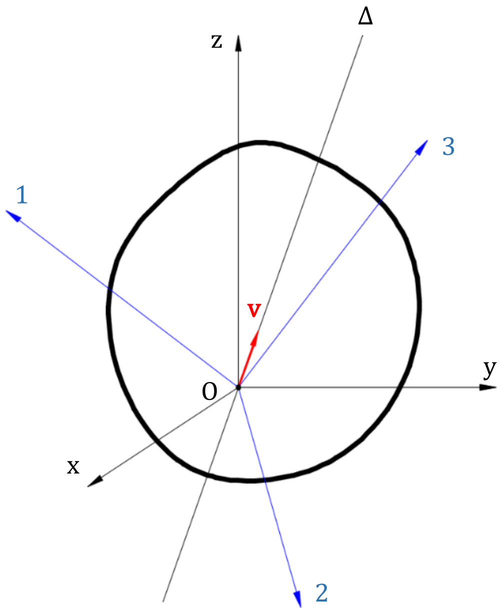


Figura 2.10

Determinarea momentelor de inerţie principale se face utilizând teoria multiplicatorilor lui Lagrange .

$$L(l,m,n) = J_\Delta - \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) \tag{2.54}$$

Extremele expresiei coincid cu extremele lui J_Δ Pentru a determina aceste extreme se pun condiţiile:

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0, \frac{\partial L}{\partial m} = 0, \frac{\partial L}{\partial n} = 0 \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial l} &= \frac{\partial L_\Delta}{\partial l} - 2\lambda l = 2J_x l - 2J_{xy} m - 2J_{xz} n - 2\lambda l = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial m} &= \frac{\partial L_\Delta}{\partial m} - 2\lambda m = 2J_y m - 2J_{xy} l - 2J_{yz} n - 2\lambda m = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial n} &= \frac{\partial L_\Delta}{\partial n} - 2\lambda n = 2J_z n - 2J_{yz} m - 2J_{xz} l - 2\lambda n = 0 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Se formează sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} (J_x - \lambda)\, l - J_{xy} m - J_{xz} n &= 0 \\ -J_{xy} l + \left(J_y - \lambda\right) m - J_{yz} n &= 0 \\ -J_{xz} l - J_{yz} m + (J_z - \lambda) n &= 0 \end{aligned} \tag{2.57}$$

care mai poate fi scris

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Notând cu :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Avem

$$\mathbf{J_0} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} \tag{2.60}$$

Problema extremelor lui J_Δ este o problemă de valori proprii[10]. Valorile proprii ale matricei $\mathbf{J_0}$ sunt momentele de inerţie principale, iar vectorii proprii asociaţi vor determina direcţiile principale de inerţie. Dacă se notează cu 1,2,3 direcţiile principale şi cu J_1, J_2, J_3 momentele de inerţie principale atunci:

$$\begin{aligned} J_1 &= \lambda_1 \quad - \text{cu vectorul propriu } v_1 \\ J_2 &= \lambda_2 \quad - \text{cu vectorul propriu } v_2 \\ J_3 &= \lambda_3 \quad - \text{cu vectorul propriu } v_3 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Momentele de inerţie principale se determină din condiţia ca sistemul de ecuaţii să admită soluţii nebanale $l, m, n \neq 0$ şi ca urmare determinantul sistemului trebuie să fie egal cu 0.

$$\det(\mathbf{J_0} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \tag{2.62}$$

$$\begin{vmatrix} (\mathbf{J_x} - \boldsymbol{\lambda}) & -\mathbf{J_{xy}} & -\mathbf{J_{xz}} \\ -\mathbf{J_{xy}} & (\mathbf{J_y} - \boldsymbol{\lambda}) & -\mathbf{J_{yz}} \\ -\mathbf{J_{xz}} & -\mathbf{J_{yz}} & (\mathbf{J_z} - \boldsymbol{\lambda}) \end{vmatrix} = 0$$

Dezvoltând determinantul se obţine o ecuaţie de gradul 3 cu necunoscuta λ

$$P(\lambda) = c_1\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_3\lambda + c_4 = 0 \tag{2.63}$$

Numită şi ecuaţia caracteristică a matricei $\underline{J_0}$, iar funcţia polinomială $P_3(\lambda)$ este polinomul caracteristic.

Soluţiile acestei ecuaţii $\lambda_1 = J_1, \lambda_2 = J_2, \lambda_3 = J_3$ sunt momentele de inerţie principale.

Se rezolvă sistemul de ecuaţii (2.56) înlocuind succesiv valorile λ_i şi se obţin valorile l_i, m_i, n_i.

$$i = 1,2,3$$
$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$$

Vectorii proprii sunt reprezentaţi de versorii $\mathbf{v_i}$ care dau direcţiile principale

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= l_1\, \mathbf{i} + m_1\, \mathbf{j} + n_1\, \mathbf{k} \\ \mathbf{v_2} &= l_2\, \mathbf{i} + m_2\, \mathbf{j} + n_2\, \mathbf{k} \\ \mathbf{v_3} &= l_3\, \mathbf{i} + m_3\, \mathbf{j} + n_3\, \mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Componentele scalare ale vectorilor proprii sunt elemenetele matricii spectrale $\underline{V}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Matricea spectrală este o matrice unitară ($\det(\underline{\mathbf{V}}) = 1$).

$$\mathbf{V^{-1}} = \mathbf{V^T}$$

Matricea de inerţie principală

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{V^T} \cdot \mathbf{J_0} \cdot \mathbf{V}$$

Momentul de inerţie faţă de o axă Δ de cosinuşi directori l,m,n este în raport cu axele principale:

$$J_\Delta = J_1\, l^2 + J_2\, m^2 + J_3\, n^2 \tag{2.67}$$

Ortogonalitatea axelor principale este dată de ortogonalitatea vectorilor proprii ai matricei.

2.3.5. momentele de inerţie ale unei plăci plane

Se consideră că planul plăcii este xoy ($z = 0$) şi că $dm = \rho dA$ cu ρ constant (fig.2.11)

---

[10] Fie $\mathbf{A}$ o matrice pătratică de ordininul n cu elemente reale. $\lambda \in \mathcal{C}$ este valoarea proprie a matricei $\mathbf{A}$ dacă $\exists\, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^2, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ astfel încât $\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{x} = 0$. Unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul n iar $\mathbf{x}$ se numeşte vector propriu al matricei $\mathbf{A}$ asociat valorii proprii λ.

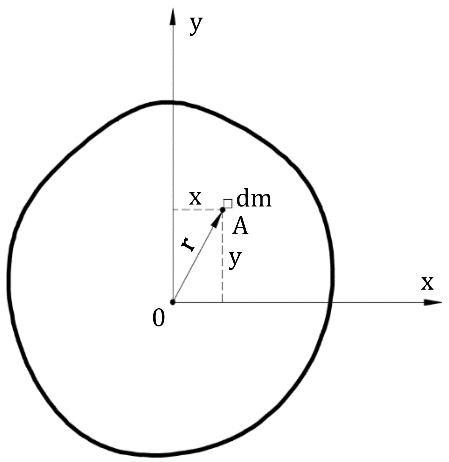


Figura 2.11

$$J_x = \int_C y^2\, dm = \rho \int_C y^2\, dA$$

$$J_y = \int_C x^2\, dm = \rho \int_C x^2\, dA$$

$$J_z = \int_C (x+y)^2\, dm = J_0 = J_x + J_y \qquad (2.68)$$

$$J_{xy} = \int_C xy\, dm = \rho \int_C xy\, dA$$

Relaţiile (2.67) se pot scrie în general sub forma:

$$\mathbf{J} = \rho\, \mathbf{I} \qquad (2.69)$$

în care I se numeşte moment de inerţie geometric şi are următoarele expresii:

$$I_x = \int_C y^2\, dA$$

$$I_y = \int_C x^2\, dA$$

$$J_z = \int_C (x+y)^2\, dA = J_0 = J_x + J_y \qquad (2.70)$$

$$J_{xy} = \int_C xy\, dA$$

Tensorul moment de inerţie geometric:

$$\mathbf{I_0} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \text{ sau } \mathbf{I_0} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \qquad (2.71)$$

<u>Variaţia tensorului moment de inerţie la translaţia axelor sistemului de referinţă</u>

Translaţia axelor se face cu vectorul $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$ şi considerând pe $c = 0$ în relaţiile (2.69) şi $O = C$ (centrul de masă) obţinem:

$$I_{x'} = I_x + Ab^2$$
$$I_{y'} = I_y + Aa^2 \qquad (2.72)$$
$$I_{x'y'} = I_{xy} + Aab$$

unde A este aria suprafeţei plane.

Dacă momentul de inerţie al unei suprafeţe în raport cu o axă oarecare Δ este I_Δ, Δ' este o axă paralelă cu Δ, iar distanţa dintre cele două axe este d, atunci

$$I_{\Delta'} = I_\Delta + Ad^2 \tag{2.73}$$

Relaţia se numeşte formula lui Steiner pentru translaţia axelor.

Variaţia tensorului moment de inerţie la rotaţia axelor sistemului de referinţă

Particularizând relaţia (2.51) pentru cazul momentelor de inerţie geometrice avem:

$$\mathbf{I_{0'}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{I_0} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{T}} \tag{2.74}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ - matricea de rotație} \tag{2.75}$$

Înlocuind expresiile termenilor în relaţia (2.73) obţinem:

$$\begin{bmatrix} I_{x'} & -I_{x'y'} \\ -I_{x'y'} & I_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2\theta + I_Y \sin^2\theta - 2 \cdot I_{xy} \sin\theta \cdot \cos\theta \\ I_{y'} &= I_x \sin^2\theta + I_Y \cos^2\theta - 2 \cdot I_{xy} \sin\theta \cdot \cos\theta \\ I_{x'y'} &= \left(I_x - I_y\right) \sin\theta \cos\theta + I_{xY}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \end{aligned} \tag{2.77}$$

Momente de inerţie principale. Direcţii principale de inerţie

Considerând relaţia (2.51) corespunzătoare momentelor de inerţie geometrice rezultă

$$\mathbf{I_0}\, \mathbf{v} = \lambda\, \mathbf{v} \tag{2.78}$$

unde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

$$\det(\mathbf{I_0} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0 \tag{2.80}$$

$$\begin{vmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.81}$$

Rezultă ecuaţia de gradul doi în λ

$$\lambda^2 - \left(I_x + I_y\right)\lambda + I_x I_y - I_{xy}^2 = 0 \tag{2.82}$$

$$\lambda_{1,2} = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{2.83}$$

Direcţiile principale rezultă din rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} (I_x - I_1)\cos\alpha_1 - I_{xy}\sin\alpha_1 = 0 \\ -I_{xy}\cos\alpha_1 - \left(I_y - I_1\right)\sin\alpha_1 = 0 \end{cases} \tag{2.84}$$

Şi

$$\begin{cases} (I_x - I_2)\cos\alpha_2 - I_{xy}\sin\alpha_2 = 0 \\ -I_{xy}\cos\alpha_2 - \left(I_y - I_2\right)\sin\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{2.85}$$

Soluţiile sistemelor sunt:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{I_{xy}}{I_y - I_2} = \frac{I_x - I_2}{I_{xy}} \end{aligned} \tag{2.86}$$

Ortogonalitatea axelor principale este dată de ortogonalitatea vectorilor proprii ai matricei.

2.4. Teoremele generale ale dinamicii

Teoremele generale ale dinamicii enunţă variaţia mărimilor cinetice impuls, moment cinetic şi energie cinetică atât pentru punctul material cât şi pentru sistemele de puncte materiale şi corpul solid rigid (CSR) Teoremele generale se deduc din legea a lui Newton exprimând principiul acţiunii forţei sub o altă formă

2.4.1. Teorema de variaţie a impulsului

2.4.1.1. Impuls

- **Punct material**

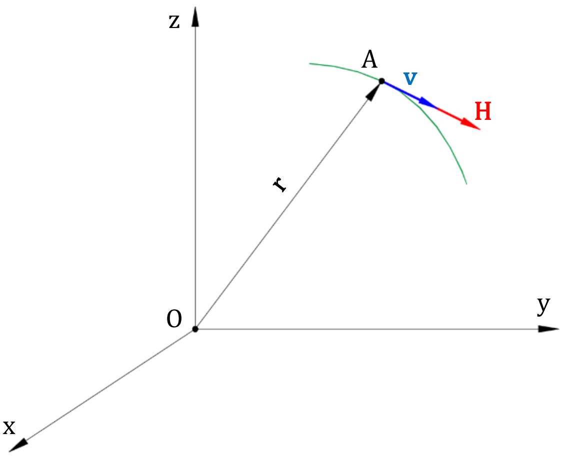


Figura 2.12

Impulsul unui punct material este un vector de expresie

$$\mathbf{H} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{v} \tag{2.87}$$

în care

- m este masa punctului material,
- **v** este viteza punctului material.

Vectorul impuls are aceiaşi direcţie şi acelaşi sens ca şi vectorul viteză(fig.2.12)

Dacă

$$\mathbf{H} = \mathrm{H_x}\,\mathbf{i} + \mathrm{H_y}\,\mathbf{j} + \mathrm{H_z}\,\mathbf{k} \tag{2.88}$$

şi

$$\mathbf{v} = \dot{\mathrm{x}}\,\mathbf{i} + \dot{\mathrm{y}}\,\mathbf{j} + \dot{\mathrm{z}}\,\mathbf{k} \tag{2.89}$$

atunci:

$$\begin{aligned} \mathrm{H_x} &= \mathrm{m}\,\dot{\mathrm{x}} \\ \mathrm{Hy} &= \mathrm{m}\,\dot{\mathrm{y}} \\ \mathrm{Hz} &= \mathrm{m}\,\dot{\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{2.90}$$

Modulul vectorului impuls al punctului material este:

$$|\mathbf{H}| = \mathrm{m}\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2} \tag{2.91}$$

Dimensional

$$[\mathrm{H}] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1} \tag{2.92}$$

- **Sistem de puncte materiale**

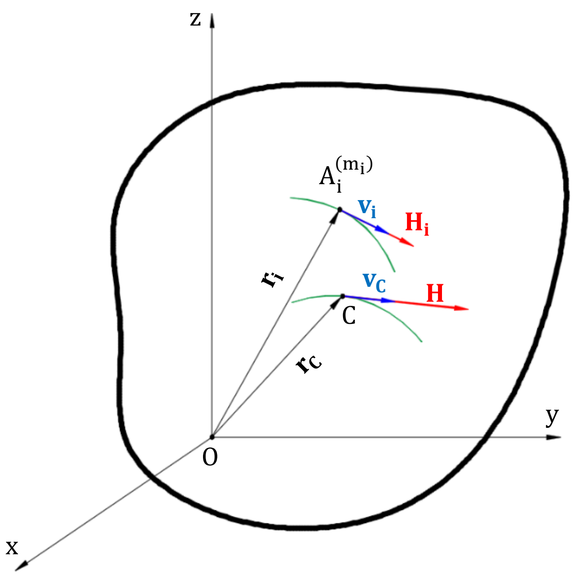


Figura 2.13

Impulsul total al unui sistem de puncte materiale este egal cu suma impulsurilor punctelor din sistem:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{H_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \mathbf{v_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k}) \quad \text{(fig. 2.13)} \tag{2.93}$$

Componentele scalare ale vectorului impul total al sistemului de puncte materiale sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} H_x &= \sum m_i \cdot \dot{x}_i \\ H_y &= \sum m_i \cdot \dot{y}_i \\ H_z &= \sum m_i \cdot \dot{z}_i \end{aligned} \tag{2.94}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \mathbf{v_i} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \mathbf{r_i} = \frac{d}{dt} M \cdot \mathbf{r_C} = M \cdot \mathbf{v_C} \\ \mathbf{H} &= M \cdot \mathbf{v_C} \end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\sum m_i \cdot \mathbf{r_i} = M \cdot \mathbf{r_c} - \text{ din teorema momentelor statice (Mecanică I)} \tag{2.96}$$

în care

- M este masa sistemului de puncte materiale
- $\mathbf{v_c}$ este viteza centrului de masă al sistemului de puncte materiale

Pentru orice sistem de puncte materiale impulsul total este egal cu impulsul centrului său de masă. Relaţia este valabilă şi pentru CSR.

Componentele scalare ale vectorului impul total al sistemului de puncte materiale sunt în acest caz

$$\begin{aligned} H_x &= M\,\dot{x}_c \\ H_y &= M\,\dot{y}_c \\ H_z &= M\,\dot{z}_c \end{aligned} \tag{2.97}$$

Modulul vectorului impuls total al sistemului de puncte materiale este:

$$|\mathbf{H}| = M\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2} \tag{2.98}$$

2.4.1.2. Teorema de variaţie a impulsului

- **Punct material**

Pornind de la ecuaţia fundamentală a dinamicii

$$m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F} \Rightarrow m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow \frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{F}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{F} \qquad (2.99)$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului impuls al unui punct material de masă m este egală, tot timpul mişcării cu forţa sau vectorul rezultant al sistemului de forţe care acţionează pe punctul material.

- <u>Sistem de puncte materiale</u>

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i}\, \dot{\mathbf{v}}_\mathbf{i} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m_i}\, \mathbf{a_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F_{ij}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i} \qquad (2.100)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{F_{ij}} = \mathbf{0} - \textbf{vectorul rezultant al forţelor interioare este nul}$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului impuls total al unui sistem de puncte materiale de masă M este egală, tot timpul mişcării cu forţa rezultantă a sistemului de forţe exterioare care acţionează pe sistemul de puncte materiale.

Dacă se ţine sema de relaţia:

$$\mathbf{H} = \mathrm{M} \cdot \mathbf{v_c}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathrm{M} \cdot \mathbf{a_c} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i} \qquad (2.101)$$

Relaţia (2.100) exprimă teorema mişcării centrului de masă.

Centrul de masă au unui sistem de puncte materiale (sau CSR) are legea de mişcare a unui punct în care se consideră concentrată toată masa sistemului acţionat de forţa rezultantă a sistemului de forţe exterioare.

2.4.1.3. <u>Teorema de conservare a impulsului</u>

- <u>Punct material</u>

Dacă $\mathbf{F} = \mathbf{0}$,

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{H} = \mathrm{m} \cdot \mathbf{v} = \text{constant} \qquad (2.102)$$

Dacă forţa care acţionează punctul material este nulă impulsul punctului se conservă pe toată durata mişcării.

Relaţia 2.101 arată că mişcarea punctului este rectilinie şi uniformă.

- <u>Sistem de puncte materiale</u>

Dacă

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F_i} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{H} = \text{constant} \qquad (2.103)$$

Dacă forţa rezultantă care acţionează sistemul de puncte materiale este nulă, impulsul total al sistemul de puncte materiale se conservă pe toată durata mişcării.

2.4.2. <u>Teorema de variaţie a momentului cinetic</u>

2.4.2.1. <u>Moment cinetic</u>

- <u>Punct material</u>

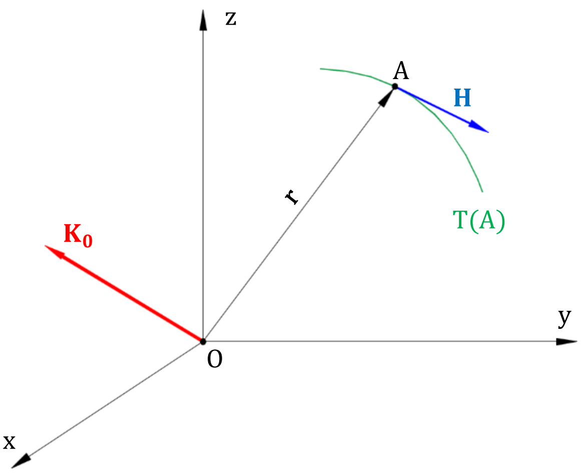


Figura 2.14

Momentul cinetic în raport cu un punct fix O al unui punct material este un vector de expresie:

$$\mathbf{K_0} = \mathbf{r} \times \mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathrm{m}\, \mathbf{v} \tag{2.104}$$

în care

r este vectorul de poziţie în raport cu punctul fix O al punctului material,
m este masa punctului material,
v este viteza punctului material (fig.2.14).

Dacă

$$\mathbf{K_0} = \mathrm{K_{0x}}\, \mathbf{i} + \mathrm{K_{oy}}\, \mathbf{j} + \mathrm{K_{oz}}\, \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \\ \mathrm{m\,x} & \mathrm{m\,y} & \mathrm{m\,z} \end{vmatrix} \tag{2.105}$$

și

$$\mathbf{v} = \mathrm{x}\, \mathbf{i} + \mathrm{y}\, \mathbf{j} + \mathrm{z}\, \mathbf{k}$$

atunci

$$\begin{aligned} \mathrm{K_{ox}} &= \mathrm{m}\,(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ \mathrm{K_{oy}} &= \mathrm{m}\,(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ \mathrm{K_{oz}} &= \mathrm{m}\,(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned} \tag{2.106}$$

Modulul vectorului moment cinetic al punctului material este:

$$|\mathbf{H}| = \mathrm{m}\sqrt{(y\dot{z} - z\dot{y})^2 + (z\dot{x} - x\dot{z})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})^2} \tag{2.107}$$

Dimensional

$$[\mathrm{K_0}] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-1} \tag{2.108}$$

- <u>sistem de puncte materiale</u>

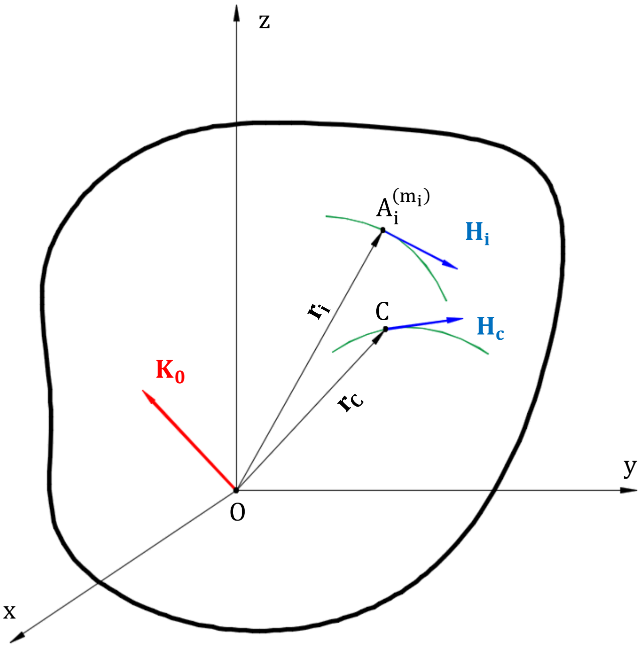


Figura 2.15

Mişcarea este raportată la un sistem de referinţă inerţial Oxyz şi la un sistem de referinţă mobil Cx'y'z' cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale (C) şi care este translatat în raport cu primul sistem de referinţă.

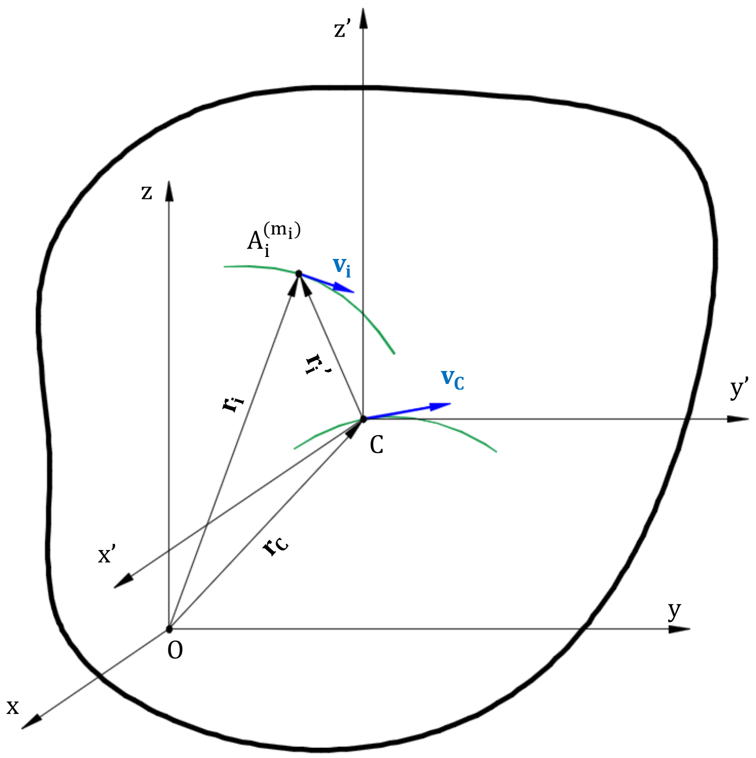


Figura 2.16

Se observă din figura 2.16 că:

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_c} + \mathbf{r_i}' \tag{2.109}$$

Derivând relaţia 2.108 se obţine:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i{}'}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i{}' \tag{2.110}$$

Deoarece sistem de referinţă mobil C x'y'z' se află în mişcare de translaţie faţă de primul sistem de referinţă $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ şi relaţia (2.109) devine

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}_i' \ \ \textbf{sau}$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i{}' \tag{2.111}$$

în care $\mathbf{v}_i{}'$ este viteza punctului A_i în raport cu centrul de masă C.
Momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale este:

$$\mathbf{K_0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_{\mathbf{0}_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i(\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i{}') = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i{}'$$

$$\mathbf{K_0} = \sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^{n} m_i(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}_i{}') \times \mathbf{v}_i{}' = \sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_i{}' + \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i{}'$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_i \, \mathbf{r}_i = M \, \mathbf{r}_c$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{v}_i{}' = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\mathbf{r}_i{}'}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{r}_i{}' = \mathbf{0}$$

$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{r}_i{}'$ este momentul static al sistemului de puncte în raport cu centrul său de masă.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \mathbf{r}_i' \times \mathbf{v}_i' = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i' \times m_i \, \mathbf{v}_i{}' = \mathbf{K_C}$$

unde $\mathbf{K_c}$ este momentul cinetic total al sistemului de puncte în raport cu centrul său de masă.
Astfel momentul cinetic total al sistemului de puncte $\mathbf{K_0}$ devine:

$$\mathbf{K_0} = \mathbf{r}_c \times M \, \mathbf{v}_c + \mathbf{K}_c \tag{2.112}$$

Relaţia exprimă teorema lui Kőnig[11] pentru moment cinetic.

Momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale,în mişcare, în raport cu un pol O este egal cu momentul cinetic al centrului său de masă la care se adaugă momentul cinetic al sistemului în mişcarea sa în raport cu centrul său de masă $\mathbf{K_c}$.

Mişcarea sistemului de puncte materiale faţă de centrul de masă este o mişcare sferică respectiv o mişcare instantanee în jurul axei instantanee de rotaţie.

2.4.2.2. Calculul momentului cinetic al CSR în diferite mişcări

- mişcarea de translaţie

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c$$

$$\mathbf{K_0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \, \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \, \mathbf{v}_c = \sum_{i=1}^{n} (m_i \, \mathbf{r}_i) \times \mathbf{v}_c = M \, \mathbf{r}_c \times \mathbf{v}_c = \mathbf{r}_c \times M \, \mathbf{v}_c$$

$$\mathbf{K_0} = \mathbf{r}_c \times M \, \mathbf{v}_c \tag{2.113}$$

- mişcarea de rotaţie în jurul unei axe

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \tag{2.114}$$

[11] Johann Samuel König (1712 – 1757) matematician si teolog german

$$\mathbf{K_0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times m_i\, \mathbf{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times m_i\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, [\mathbf{r_i} \times\, (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i})] = \\ = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\mathbf{r_i^2}\boldsymbol{\omega} -\, (\mathbf{r_i}\, \boldsymbol{\omega})\mathbf{r_i}\right] \tag{2.115}$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ şi $\mathbf{r_i}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\, \mathbf{i} + \omega_y\, \mathbf{j} + \omega_z\, \mathbf{k} \\ \mathbf{r} = x_i\, \mathbf{i} + y_i\, \mathbf{j} + z_i\, \mathbf{k} \tag{2.116}$$

Relaţia (2.114) devine:

$$\mathbf{K_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \cdot \left(\omega_x\, \mathbf{i} + \omega_y\, \mathbf{j} + \omega_z\, \mathbf{k}\right) - \left(x_i\boldsymbol{\omega_x} + y_i\boldsymbol{\omega_y} + z_i\boldsymbol{\omega_z}\right) \cdot \\ \cdot (x_i\, \mathbf{i} + y_i\, \mathbf{j} + z_i\, \mathbf{k}) \tag{2.117}$$

Scriind expresia analitică pentru $\mathbf{K_0}$ rezultă:

$$\mathbf{K_0} = K_{0x}\, \mathbf{i} + K_{oy}\, \mathbf{j} + K_{0z}\, \mathbf{k} \tag{2.118}$$

Şi efectuând calculele în membrul drept al relaţiei (2.116) rezultă componentele scalare ale vectorului $\mathbf{K_0}$ în mişcarea de rotaţie în jurul unei axe fixe.

$$K_{0x} = J_x\, \omega_x - J_{xy}\, \omega_y - J_{xz}\, \omega_z \\ K_{0y} = -J_{yx}\, \omega_x + J_y\, \omega_y - J_{yz}\, \omega_z \\ K_{0z} = -J_{xz}\, \omega_x - J_{yz}\, \omega_y + J_z\, \omega_z \tag{2.119}$$

Dacă axa de rotaţie este Oz,

$$\omega_x = \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega$$

relaţiile devin:

$$K_{0x} = -J_{xz}\, \omega \\ K_{0y} = -J_{yz} \\ K_{0z} = J_z\, \omega \tag{2.120}$$

Dacă axa Oz este şi axă principală de inerţie

$$J_{xz} = J_{yz} = 0 \\ K_{0z} = J_z\, \omega \tag{2.121}$$

În general dacă CSR are o mişcare de rotaţie în jurul unei axe principale de inerţie Δ, momentul cinetic este un vector dirijat după axa Δ şi are expresia:

$$K_\Delta = J_\Delta\, \omega \tag{2.122}$$

2.4.2.3. Teorema de variaţie a momentului cinetic

- punct material

$$\mathbf{\dot{K}_0} = \mathbf{\dot{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M_0}(\mathbf{F}) \tag{2.123}$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului moment cinetic al unui punct material de masă m aflat în mişcare, în raport cu punctul fix O este egală, tot timpul mişcării cu momentul forţei care acţionează pe punctul material, în raport cu acelaşi punct fix O.

- sistem de puncte materiale

$$\mathbf{\dot{K}_0} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{\dot{r}_i} \times m_i\, \mathbf{v_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times m_i\, \mathbf{\dot{v}_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v_i} \times \mathbf{m_i}\, \mathbf{v_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times m_i\, \mathbf{a_i} \\ = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \left(\mathbf{F_i} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F_{ij}}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r_i} \times \mathbf{F_{ij}} = \mathbf{M_0}(\mathbf{F_i}) \tag{2.124}$$

Derivata de ordinul I în raport cu timpul a vectorului moment cinetic în raport cu punctul fix O al unui sistem de puncte materiale aflat în mişcare, este egală, tot timpul mişcării cu momentul rezultant al sistemului de forţe care acţionează pe sistemul de puncte materiale, în raport cu acelaşi punct fix O.

Teorema de conservare a momentului cinetic

- **punct material**

Dacă

$$\mathbf{M_0}(\mathbf{F}) = \mathbf{0},$$

$$\dot{\mathbf{K_0}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{K_0} - \text{ constant} \tag{2.125}$$

Dacă momentul forţei care acţionează pe punctul material, în raport cu punctul fix O, este nul atunci momentul cinetic al punctului material se conservă pe toată durata mişcării.

- **sistem de puncte materiale**

Dacă

$$\mathbf{M_0} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K_0} = \mathbf{0} \implies \mathbf{K_0} - \text{ constant} \tag{2.126}$$

Dacă momentul rezultant al sistemului de forţe exterioare, care acţionează sistemul de puncte materiale, este nul în raport cu punctul O, atunci momentul cinetic total al sistemul de puncte materiale se conservă pe toată durata mişcării.

2.4.3. Lucrul mecanic

Lucrul mecanic[12] este o mărime fizică definită ca produsul dintre componenta forţei care acţionează asupra unui corp în direcţia deplasării punctului ei de aplicaţie şi mărimea acestei deplasări. E o mărime ce caracterizează schimbarea stării dinamice a sistemului.
Formula dimensională pentru lucru mecanic se scrie sub forma:

$$[\mathrm{F}] = [\mathrm{F}]\,[\mathrm{s}] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}$$

În Sistemul Internaţional de măsuri forţa se măsoară în newtoni şi lungimea în metri, rezultă că unitatea de măsură pentru lucru mecanic este:

$$[\mathrm{L}] = \mathrm{Nm} = \mathrm{J}\ (\text{joule})$$

2.4.3.1. Lucrul mecanic al unei forţe constante

Se consideră un punct material, care sub acţiunea unei forţe constante **F** efecuează o deplasare rectilinie A_1A_2. Fie $\mathbf{r_1}$ şi $\mathbf{r_2}$vectorii de poziţie ai punctelor A_1 şi A_2 în raport cu un reper O şi $\mathbf{r} = \mathbf{A_1A_2}$ vectorul deplasare.
Prin definiţie L, lucrul mecanic al forţei constante **F** corespunzător deplasării **r**, este produsul scalar dintre vectorul forţă **F** şi vectorul deplasare **r**:

$$\mathrm{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \cos(\mathbf{F}, \mathbf{r}) = \mathrm{F} \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{F}}\mathbf{r} = \mathrm{r} \cdot \mathrm{pr}_{\mathbf{r}}\mathbf{F} \tag{2.127}$$

Din relaţia (2.126) se observă că lucrul mecanic al forţei constante **F** corespunzător deplasării **r**, este produsul scalar dintre modulul vectorul forţă **F** şi proiecţia vectorului deplasare **r** pe direcţia forţei sau produsul scalar dintre modulul vectorului deplasare **r** şi proiecţia vectorul forţă **F** pe direcţia vectorului deplasare **r**.

2.4.3.2. Lucrul mecanic al unei forţe variabile

Se consideră un punct material, care sub acţiunea unei forţe variabile **F** se deplasează pe o curbă oarecare (C) . Vectorii **r** şi $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$ definesc poziţiile instantanee ale punctului A într-un sistem de axe triortogonal cartezian Oxyz. Deplasarea elementară d**r** se efectuează în întrevalul elementar de timp dt

[12].Termenul de" lucru' (în limba franceză "travail") al unei forțe a fost utilizat pentru prima oară într-un articol din 1826 al matematicianului și inginerului mecanic francez Gaspard-Gustave Coriolis și apoi în cartea "Du calcul de l'effet des machines" din 1829 a aceluiași autor. Înainte de denumirea dată de Coriolis, Carnot se referea la acest concept cu numele "putere motrice" în lucrarea sa din 1824 "Despre puterea motrice a focului "(Sur la puissance motrice du feu). Denumirea de "lucru mecanic" a fost introdusă de Jean-Victor Poncelet

Prin definiţie dL, lucrul mecanic elementar al forţei variabile **F** corespunzător deplasării elementare $d\mathbf{r}$ este produsul scalar dintre vectorul forţă **F** şi vectorul deplasare elementară $d\mathbf{r}$:

$$\mathrm{dL} = \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2.128}$$

În baza relaţiei (1.8) din cinematică

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{v}\,\mathrm{dt}$$

Formula (2.127) devine:

$$\mathrm{dL} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,\mathrm{dt} \tag{2.129}$$

Dacă se scriu expresiile analitice ale vectorilor din formulele (2.127) şi (2.128):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathrm{X}\,\mathbf{i} + \mathrm{Y}\,\mathbf{j} + \mathrm{Z}\,\mathbf{k} \\ \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathrm{dx}\,\mathbf{i} + \mathrm{dy}\,\mathbf{j} + \mathrm{dz}\,\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathrm{x}}\,\mathbf{i} + \dot{\mathrm{y}}\,\mathbf{j} + \dot{\mathrm{z}}\,\mathbf{k} \end{aligned} \tag{2.130}$$

Relaţia (2.127) devine

$$\begin{aligned} \mathrm{dL} &= \mathrm{X\,dx} + \mathrm{Y\,dy} + \mathrm{Z\,dz} \\ \mathrm{dL} &= \mathrm{X}\,\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{Y}\,\dot{\mathrm{y}} + \mathrm{Z}\,\dot{\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{2.131}$$

Lucrul mecanic total efectuat de forţa variabilă **F** prin mişcarea punctului A pe curba (C) din poziţia A_1 în poziţia A_2 este:

$$\mathrm{L} = \int_{A_1A_2} \mathrm{dL} = \int_{A_1A_2} \mathbf{F}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{A_1A_2} (\mathrm{X\,dx} + \mathrm{Y\,dy} + \mathrm{Z\,dz}) = \int_{A_1A_2} (\mathrm{X}\,\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{Y}\,\dot{\mathrm{y}} + \mathrm{Z}\,\dot{\mathrm{z}})\;\mathrm{dt} \tag{2.132}$$

Un caz special al forţei variabile **F** îl constituie forţa conservativă [13].
Un câmp de forţe se numeşte conservativ (potenţial) dacă există un câmp scalar U astfel încât:

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\,\mathbf{U} \tag{2.133}$$

$$\mathrm{X} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}, \quad \mathrm{Y} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}} \tag{2.134}$$

$$\mathrm{L} = \int_{A_1A_2} \mathrm{dL} = \int_{A_1A_2} \mathrm{grad\,U}\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{A_1A_2} \mathrm{dU} = \mathrm{U}_2 - \mathrm{U}_1 \tag{2.135}$$

În acest caz lucrul mecanic total depinde numai de poziţia iniţială şi finală a punctului.

2.4.3.3. Lucrul mecanic al unui sistem de puncte materiale

Lucrul mecanic elementar total al unui sistem de puncte materiale este:

$$\mathrm{dL} = \mathrm{dL}_{\mathrm{ext}} + \mathrm{dL}_{\mathrm{int}} \tag{2.136}$$

în care $\mathrm{dL}_{\mathrm{ext}}$ este lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare şi $\mathrm{dL}_{\mathrm{int}}$ este lucrul mecanic elementar al forţelor interioare, care în cazul CSR este nul.
Lucrul mecanic elementar al forţelor exterioare care acţionează pe un CSR este:

$$\mathrm{dL}_{\mathrm{ext}} = \mathbf{R} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_{\mathbf{c}} + \mathbf{M}_{\mathbf{c}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{2.137}$$

în care **R** şi $\mathbf{M_c}$ este torsorul în punctul C (centrul de masă al CSR) al sistemului forţelor exterioare care acţionează pe CSR.

---

[13] O forță conservativă ce acționează asupra unui sistem închis efectuează un lucru mecanic, prin care energia este convertită doar între formele cinetică și potențială. Aceasta înseamnă că, pentru un sistem închis, energia mecanică totală se conservă întotdeauna când o forță conservativă acționează asupra sistemului. Deci forța este legată direct de diferența de energie potențială dintre două locuri din spațiu,[a] și poate fi considerată o mărime caracteristică a câmpului potențial, la fel cum direcția și debitul de curgere a unui râu poate fi considerată a fi o mărime caracteristică a unei zone cu relief denivelat.[b]
Forțe conservative sunt gravitația, forța electromagnetică, și forța elastică

Şi $\mathbf{r_c}$, $d\boldsymbol{\theta}$ sunt deplasarea respectiv rotaţia elementară a centrului de masă al CSR.

2.4.4. Energia cinetică[14]

2.4.4.1. Punct material

Energia cinetică sau energia de mişcare a unui punct material de masă m, aflat în mişcare de translaţie cu viteza $\mathbf{v_i}$ în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este o mărimea fizică scalară definită de relaţia:

$$E = \frac{m\,v^2}{2} \tag{2.138}$$

Sistem de puncte materiale

Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale A_i de mase m_i, aflat în mişcare de translaţie cu vitezele $\mathbf{v_i}$ în raport cu un sistem de referinţă inerţial, este o mărimea fizică scalară definită de relaţia:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{2.139}$$

Mişcarea este raportată la un sistem de referinţă inerţial Oxyz şi la un sistem de referinţă mobil Cx'y'z' cu originea în centrul de masă al sistemului de puncte materiale (C) şi care este translatat în raport cu primul sistem de referinţă.

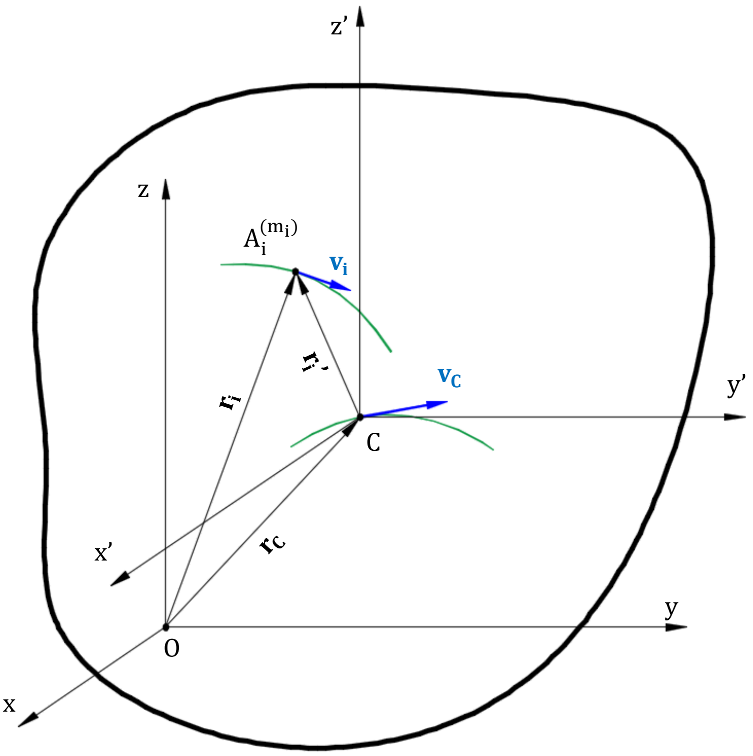


Figura 2.17

Se observă din figura 2.17 că:

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_c} + \mathbf{r_i'} \tag{2.140}$$

Derivând relaţia (2.122) se obţine:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{\partial \mathbf{r_i'}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i'} \tag{2.141}$$

Deoarece sistem de referinţă mobil Cx'y'z' se află în mişcare de translaţie faţă de primul sistem de referinţă $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ şi relaţia (2.140) devine:

$$\mathbf{r_i} = \mathbf{r_c} + \frac{\partial \mathbf{r_i'}}{\partial \mathbf{t}} \quad \textbf{sau}$$

[14] Expresi "energia cinetică" i se atribuie Lordului Kelvin. Adjectivul cinetică provine din substantivul grecesc "kinesis " care inseamna mişcare

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{v_c} + \mathbf{v_i'} \tag{2.142}$$

În care $\mathbf{v_i'}$ este viteza punctului A_i în raport cu centrul de masă C.
Tinând seama de relația (2.141) relația (2.138) devine:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\mathbf{v_c} + \mathbf{v_i'})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_c^2} + \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_c}\,\mathbf{v_i'} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_i'}^2$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_c^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\mathbf{v_c^2} = \frac{1}{2}M\,\mathbf{v_c}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_c}\mathbf{v_i'} = \mathbf{v_c}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_i'} = \mathbf{v_c}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r_i'} = 0$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v_i'}^2 = E'$$

Cu notațiile de mai sus energia cinetică a unui sistem de puncte materiale devine:

$$E = \frac{1}{2}M\,v_c^2 + E' \tag{2.143}$$

Relația (2.142) reprezintă expresia teoremei lui Kőnig pentru energia cinetică.
Energia cinetică a unui sistem de puncte materiale, aflat în mişcare, este egală cu energia cinetică a centrului său de masă la care se adaugă energia cinetică al sistemului în mişcarea sa în raport cu centrul său de masă.

2.4.4.2. Calculul energiei cinetice al CSR în diferite mişcări

- mişcarea de translaţie

$$\mathbf{v_i} = \mathbf{v_c}$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,v_c^2 = \frac{1}{2}M\,v_c^2 \tag{2.144}$$

- mişcarea de rotaţie în jurul unei axe

$$\mathbf{v_i} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i}$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i})^2 \tag{2.145}$$

Dacă scriem expresiile analitice ale vectorilor $\boldsymbol{\omega}$ şi $\mathbf{r_i}$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\,\mathbf{i} + \omega_y\,\mathbf{j} + \omega_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r_i} = x_i\,\mathbf{i} + y_i\,\mathbf{j} + z_i\,\mathbf{k}$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_i} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_k \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \left(\omega_y z_i - \omega_z y_i\right)\mathbf{i} + \left(\omega_z z_i - \omega_x z\right)\mathbf{j} + \left(\omega_x y_i - \omega_y x_i\right)\mathbf{k}$$

Relația (2.144) devine:

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\left(\omega_y z_i - \omega_z y_i\right)^2 + (\omega_z x_i - \omega_x z)^2 + \left(\omega_x y_i - \omega_y x_i\right)^2\right]$$

După efectuarea calculelor relația (2.145) devine

$$E = \frac{1}{2}\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2\right) - \left(J_{xy}\omega_x\omega_y + J_{yz}\omega_y\omega_z + J_{zx}\omega_z\omega_x\right) \tag{2.146}$$

Dacă axa de rotaţie este Oz

$$\begin{gathered}\omega_x = \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega\end{gathered} \tag{2.147}$$

Relația (2.146) devine

$$E = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \tag{2.148}$$

- **<u>mişcarea plan paralelă</u>**

$$E = \frac{1}{2} M\, v_c^2 + \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \tag{2.149}$$

În care J_Δ este momentul de inerţie al plăcii în raport cu o axă Δ perpendiculară pe planul mişcării.

2.4.4.3. Teorema de variaţie a energiei cinetice

- **<u>punct material</u>**

$$E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \cdot 2 \cdot v \cdot \dot{v} = m \cdot v \cdot \dot{v} = m \cdot \dot{v} \cdot v = m \cdot a \cdot v = F \cdot v = F \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = F \frac{dr}{dt} \Longrightarrow dE = F\, dr = dL$$

$$dE = dL \tag{2.150}$$

Variaţia energiei cinetice a unui punct material de masă m aflat în mişcare, este egală, tot timpul mişcării, cu lucrul mecanic elementar al forţei care acţionează pe punctul material, prin deplasarea sa elementara d**r.**

- **<u>sistem de puncte materiale</u>**

În cazul unui sistem de puncte materiale teorema de variaţie a energiei cinetice este:

$$dE = dL_{int} + dL_{ext} \tag{2.151}$$

în cazul CSR $dL_{int} = 0$.

$$dE = dL_{ext} = R \cdot dr_c + M_c \cdot d\theta \tag{2.152}$$

Variaţia energiei cinetice a unui CSR aflat în mişcare, este egală, tot timpul mişcării, cu lucrul mecanic elementar al torsorului în C (centrul de masaă) al sistemului de forţe exterioare care acţionează pe CSR .
Expresia integrală a teoremei de variaţie a energiei cinetice este:

$$E_2 - E_1 = L_{12} \tag{2.153}$$

Diferenţa energiilor cinetice, ale unui sistem material în mişcare, în două poziţii (1) şi (2) este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţele exterioare aplicate sistemului prin trecerea acestuia din poziţia (1) în poziţia (2).

MECANICĂ ANALITICĂ

3.1 Introducere

În anul 1788 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a publicat la Paris lucrarea „Mécanique analytique", care conţine atât contributiile lui, cât şi sinteza principalelor contributii ale înaintaşilor săi, dintre care amintim pe Jean Bernoulli (1654-1705), Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), Leonhard Euler (1707-1783) şi Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Aceasta poate fi considerată prima lucrare de mecanică analitică, contributii semnificative fiind aduse apoi şi de către Karl Gustav Jacobi (1804-1851), Rowan Hamilton (1805-1865), Jules Henri Poincaré (1854-1912) ş.a.

Mecanica analitică este rezultatul îmbinarii conceptelor din mecanica newtoniană cu concepte ale matematicii (calcul diferenţial, calcul variaţional, ecuaţii diferenţiale, etc). Mecanica analitică este forma cea mai concisă si mai cuprinzatoare a legilor mecanicii, în care se stabilesc metode foarte generale de studiu ale mişcării sistemelor de corpuri, sisteme caracterizate de un număr foarte mare de coordonate.

Astfel mecanica analitică reformulează problema mişcării acestor sisteme reducând numărul necunoscutelor.

Ecuatiile de mişcare din mecanica analitica se exprima diferit fata de cele ale mecanicii newtoniene, dar rezultatul aplicarii lor în studiul unui sistem fizic dat este identic cu cel obtinut când se utilizeaza ecuatiile mecanicii newtoniene.

Principiile mecanicii analitice se exprima într-un mod complex, conţinutul lor fizic fiind mai putin evident faţă de cel al principiilor mecanicii newtoniene. Marele avantaj al acestor principii este că pot cuprinde nu numai legile mecanicii newtoniene ci şi alte legi din fizică.

3.2 Legături aplicate sistemelor materiale

Fie un sitem de puncte materiale A_i. Dacă în orice moment t al mişcării, vectorii de poziţie ai celor n puncte materiale $\mathbf{r_i}(t)$ (i = 1,n) şi vitezele lor $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}(t)$ pot lua valori arbitrare atunci spunem că sistemul este liber. În caz contrar sistemul este supus la legături.

Numim *legătură,* orice conditie de ordin geometric sau cinematic care limitează posibilitatile de mişcare ale unui corp.

Din punct de vedere matematic, o legătură se poate exprima sub forma cea mai generală, astfel:

$$f(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \dots, \mathbf{r_n}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{2}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{n}, t) = 0 \qquad (3.1)$$

Relaţia (3.1) reprezintă o condiţie de ordin geometric (prin intermediul vectorilor de poziţie $\mathbf{r_i}$) şi cinematic (prin intermediul vectorilor viteză $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i}$) care limitează posibilităţile de mişcare ale punctelor materiale din sistem.

Orice legătură este echivalentă cu forţe de legătură. Aceste forţe de legătură obligă sistemul material , să se mişte pe o anumită curbă sau pe o anumită suprafaţă, fără a părăsi curba sau suprafaţa respectivă.

3.3Clasificarea legăturilor

Legăturile pot fi clasificate pe baza a cel puţin trei criterii, şi anume:

1. după modul în care sunt exprimate **-** prin *egalităţi* sau prin *inegalităţi,*
2. în funcţie de absenţa sau prezenţa explicită a *timpului* în expresiile lor;
3. în funcţie de absenţa sau prezenţa explicită a *vitezei* în expresiile lor;

1. Din punctul de vedere al primului criteriu de clasificare, legăturile pot fi exprimate prin *egalităţi* - şi atunci sunt numite *bilaterale* - sau prin *inegaliăţi* - caz în care sunt numite *unilaterale.*

2. Din punctul de vedere al celui de-al doilea criteriu, legăturile pot conţine în expresiile lor analitice timpul în mod explicit **-** şi atunci ele se numesc *reonome* sau *nestaţionare,* sau, dimpotrivă, timpul nu apare în mod explicit în aceste expresii – caz în care legăturile se numesc *scleronome* sau *staţionare*

3. Din punctul de vedere al celui de-al treilea criteriu, legăturile pot fi *geometrice* sau *finite* - dacă în expresiile lor analitice nu intervin vitezele în mod explicit - şi, respectiv, *cinematice* sau *diferenţiale* - dacă vitezele apar în mod explicit în expresiile lor analitice.
De exemplu relaţia (3.1) reprezintă o legătură reonomă, bilaterală, diferenţială

$$f_j(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \dots, \mathbf{r_n}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{1}, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{2}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{n}, t) = 0, \quad j = (1, l) \tag{3.1}$$

Relaţia (3.2) reprezintă o legătură reonomă, bilaterală, geometrică

$$f_j(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}, \dots, \mathbf{r_n}, t) = 0 \tag{3.2}$$

Derivând relaţia (3.2) în raport cu timpul se obţine:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial r_i} \dot{\mathbf{r}}_\mathbf{i} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, (j = 1, l) \tag{3.3}$$

Care arată că orice legătură geometrică poate fi scrisă ca o relaţie diferenţială liniară.

În schimb nu toate legăturile diferentiale pot fi integrate. Acele legaturi diferentiale care pot fi integrate împreună cu cele geometrice se numesc legaturi olonome, iar cele ce nu sunt integrabile împreună cu cele unilaterale se numesc neolonome.

3.4.Clasificarea deplasărilor

Deplasările sistemelor materiale pot fi finite dacă se efectuează într-un interval finit de timp Δt sau infinitezimale (elementare) dacă se efectuează într-un interval de timp infinitezimal (elementar) dt.
În cele ce urmează ne referim la deplasările elementare.

Deplasările efectuate sub acţiunea forţelor exterioare se numesc deplasări reale. Aceste deplasări se exprimă prin relaţia:

$$d\mathbf{r_i} = \mathbf{v_i}\, dt \tag{3.4}$$

Deplasările unui sistem material pot fi considerate şi cele posibile, compatibile cu legăturile sistemului. Aceste deplasări se numesc deplasări virtuale. Aceste deplasări sunt independente de timp. Spre deosebire de deplasarea reală care este unică deplasările virtuale nu sunt unice, orice deplasare cinematic posibilă este o deplasare virtuală.
Deplasarea reală este una din deplasările virtuale. Deplasările virtuale au expresia:

$$\delta\mathbf{r_i} = \delta x_i\, \mathbf{i} + \delta y_i\, \mathbf{j} + \delta z\, \mathbf{k}$$

În cazul unui punct A pe o suprafaţă $\varphi(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ considerată ca o legătură bilaterală, scleronomă atât deplasările reale cât şi cele virtuale au loc în planul tangent la suprafaţă în punctul A (perpendicular pe gardientul ei).

$$\text{grad}\, \varphi \cdot d\mathbf{r_i} = 0 \quad \text{și} \quad \text{grad}\, \varphi \cdot \delta\mathbf{r_i} = 0 \tag{3.5}$$

Dacă legătura este reonomă $\varphi(x_i, y_i, z_i, t) = 0$ deplasările reale nu mai au loc în planul tangent pe când deplasările virtuale au loc în planul tangent.Deplasarea reala nu mai este una din deplasările virtuale. Relaţia (3.5) se va exprima doar pentru deplasările virtuale:

$$\text{grad}\, \varphi \cdot \delta\mathbf{r_i} = 0 \tag{3.6}$$

3.5. Principiul lui d'Alembert

Considerând un sistem de puncte materiale A_i de mase m_i, i = 1,n, supus la legături şi acţionat de forţele exteriioare $\mathbf{F_i}$. Izolând punctul A_i asupra lui se introduc forţele date $\mathbf{F_i}$,şi forţele de legătură $\mathbf{R_i}$. Se aplică principuil al doilea al dinamicii:

$$m_i\mathbf{a_i} = \mathbf{F_i} + \mathbf{R_i} \tag{3.7}$$

Relaţia (3.8) se mai poate scrie:

$$\mathbf{F_i} - m_i\mathbf{a_i} + \mathbf{R_i} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{F_i'} = m_i\mathbf{a_i}$ se numeşte forţă de inerţie, astfel încât relaţia (3.9) se scrie:

$$\mathbf{F_i} + \mathbf{F_i'} + \mathbf{R_i} = \mathbf{0} \qquad (3.8)$$

Relaţia (3.10) exprimă principiul lui D'Alembert.

Pentru fiecare punct material aflat în mişcare , rezultanta forţelor date $\mathbf{F_i}$, a forţelor de inerţie $\mathbf{F_i'}$ şi a forţelor de legătură R_i este egală cu 0 în orice moment al mişcării.

Principul lui D'Alembert exprimă o condiţie de echilibru dinamic.

3.6 .Torsorul fortelor de inertie

La un sistem de puncte materiale în mişcare forţele de inerţie formează un sistem de forţe distribuite, care se reduc în punctul O la un torsor format din vectorul rezultant $\mathbf{R'}$ şi vectorul moment rezultant $\mathbf{M_0'}$(fig.3.1):

$$\begin{aligned}
\mathbf{R'} &= -\sum_{i=1}^{n} m_i\,\mathbf{a_i} = -\sum_{i=1}^{n} m\,\dot{\mathbf{v}}_\mathbf{i} = -\left(\sum_{i=1}^{n} m\,\mathbf{v_i}\right)^{\cdot} = -\dot{\mathbf{H}} \\
\mathbf{M_0'} &= -\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times m_i\,\mathbf{a_i} = -\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{r_i} \times m_i\,\mathbf{v_i}\right)^{\cdot} = -\dot{\mathbf{K}}_\mathbf{0}
\end{aligned} \qquad (3.9)$$

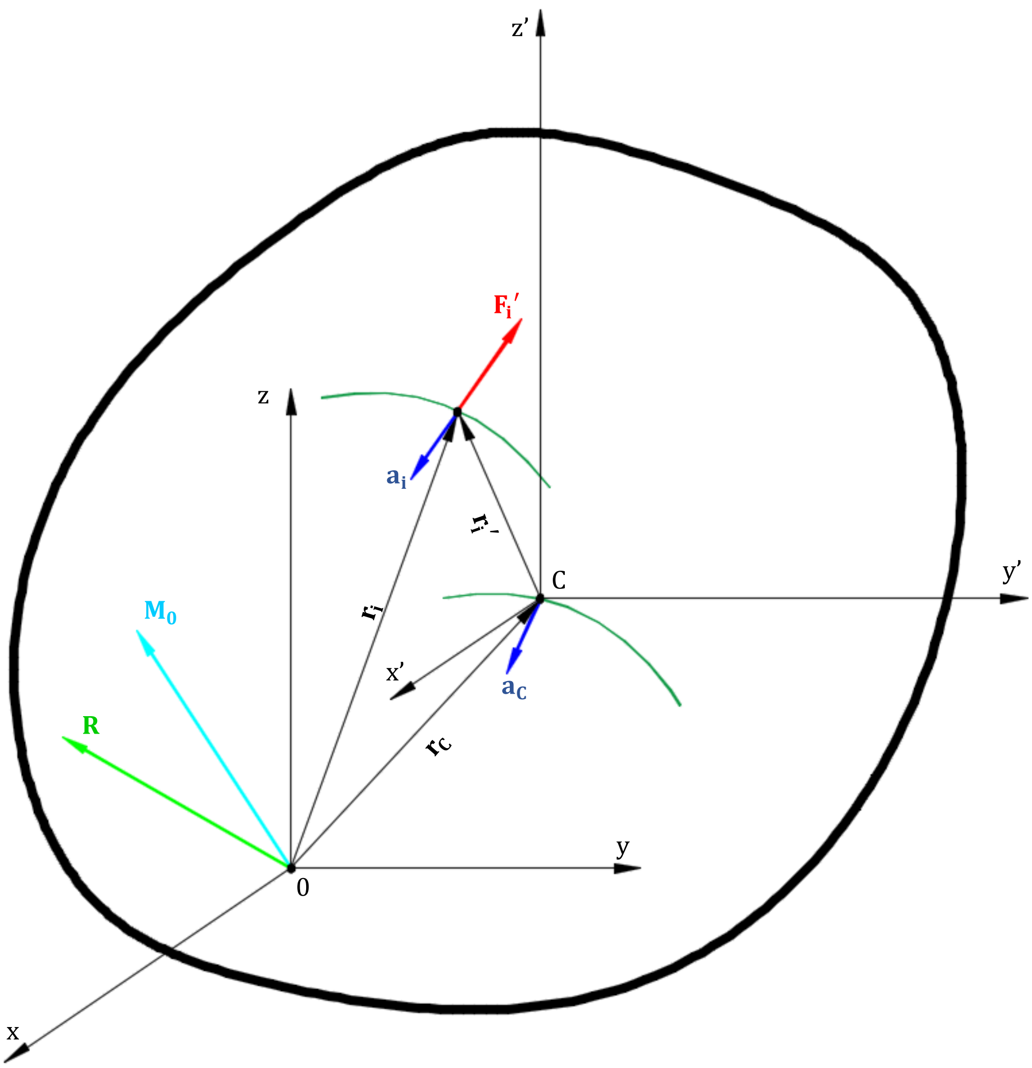


Figura 3.1

Ştiind că :

$$\mathbf{H} = M \cdot \mathbf{v_c}$$
$$\mathbf{K_0} = \mathbf{r_c} \times M\,\mathbf{v_c} + \mathbf{K_c} \qquad (3.10)$$

$$\mathbf{R}' = -\dot{\mathbf{H}} = -M\mathbf{a_c}$$
$$\mathbf{M}'_0 = -\dot{\mathbf{K}}_0 = -\mathbf{r_c} \times M\mathbf{a_c} - \dot{\mathbf{K}}_c \qquad (3.11)$$

Calculul torsorului forţelor de inerţie în mişcările particulare:

- <u>**mişcarea de translaţie**</u>

În raport cu centrul de masă torsorul forţelor de inerţie este format din:

$$\mathbf{R}' = -M\mathbf{a_c}$$
$$\mathbf{M}'_0 = -\mathbf{r_c} \times M\mathbf{a_c} \qquad (3.12)$$

- <u>**mişcarea de rotaţie cu axă fixă**</u>

Axa de rotaţie este axa Oz , iar în acest caz ,

$$\omega_x = \omega_y = 0$$
$$\omega_z = \omega$$

$$\mathbf{R}' = -\dot{\mathbf{H}} = -M\mathbf{a_c}$$

$$\mathbf{a_c} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r_c} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r_c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_c & \omega x_c & 0 \end{vmatrix} = -(\varepsilon y_c - \omega^2 x_c)\,\mathbf{i} + (\varepsilon x_c - \omega^2 y_c)\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}'_0 = -\dot{\mathbf{K}}_0$$

$$\mathbf{K_0} = -J_{xz}\omega\,\mathbf{i} - J_{yz}\omega\,\mathbf{j} + J_Z\omega\,\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = -J_{xz}\dot{\omega}\,\mathbf{i} - -J_{xz}\omega\,\dot{\mathbf{i}} - J_{yz}\dot{\omega}\,\mathbf{j} - J_{yz}\omega\,\dot{\mathbf{j}} + J_Z\dot{\omega}\,\mathbf{k} \quad (\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{0}) \qquad (3.14)$$

$$\dot{\omega} = \varepsilon$$
$$\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} = \omega\,\mathbf{j} \qquad (3.15)$$
$$\dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} = -\omega\,\mathbf{i}$$

Înlocuind relaţiile (3.15) în relaţia (3.14) rezultă:

$$\dot{\mathbf{K}}_0 = -J_{xz}\,\varepsilon\,\mathbf{i} - J_{xz}\omega^2\,\mathbf{j} - J_{yz}\,\varepsilon\,\mathbf{j} + J_{yz}\omega^2\,\mathbf{i} + J_z\varepsilon\,\mathbf{k}$$
$$\dot{\mathbf{M}}_0 = \left(-J_{xz}\,\varepsilon + J_{yz}\,\omega^2\right)\mathbf{i} + \left(-J_{xz}\,\omega^2 - J_{yz}\,\varepsilon\right)\mathbf{j} + J_z\,\varepsilon\,\mathbf{k} \qquad (3.16)$$

Componentele scalare ale vectorilor torsorului de reducere, în O, ale sistemului forţelor de inerţie sunt :

$$R'_x = M(\omega^2 x_c + \varepsilon y_c)$$
$$R'_y = M(-\varepsilon x_c + \omega^2 y_c) \qquad (3.17)$$
$$R'_z = 0$$

$$M'_x = J_{xy}\varepsilon - J_{yz}\omega^2$$
$$M'_y = J_{xz}\omega^2 + J_{yz} \qquad (3.18)$$
$$M'_z = -J_z\varepsilon$$

Dacă axa oz este axă principală de inerţie atunci

$$\begin{aligned}
&x_c = y_c = 0\\
&R'_x = R'_y = R'_z\\
&J_{xz} = J_{yz} = 0\\
&M'_x = M'_y = 0\\
&M'_z = -J_z\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.19}$$

<u>**mişcarea plan paralelă**</u>

$$\begin{aligned}
&R' = -H = -ma_c\\
&R'_x = M(\omega^2\, x_c + \varepsilon\, y_c)\\
&R'_y = M(-\varepsilon\, x_c + \omega^2 y_c)\\
&R'_z = 0\\
&M'_0 = -\dot{K}_0\\
&K_0 = -J_{xz}\,\omega\, i - J_{yz}\omega\, j + J_z\,\omega\, k\\
&M'_x = J_{xz}\,\varepsilon - J_{yz}\,\omega^2\\
&M'_y = J_{xz}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon\\
&M'_z = -J_z\,\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Principiul lui d'Alembert se foloseşte în cadrul metodei cineto statice pentru rezolvarea unor tipuri de aplicaţii de dinamică:

Etapele de rezolvare a aplicaţiilor folosind metoda cineto-statică sunt urmaătoarele:

- se face un studiu cinematic în care determină nunărul gradelor de libertate ale sistemului şi tipul mişcării care se efectuează
- se fac eventualele compuneri de mişcări
- se separă corpurile sistemului şi se face schema forţelor date,de inerţie şi reacţiuni care acţionează pe fiecare corp
- se scriu ecuaţiile de echilibru cineto static pentru fiecare corp din care rezultă un sistem de ecuaţii al cărui necunoscute sunt acceleraţiile corpurilor şi forţele de legătură
- se rezolvă sistemul de ecuaţii determinând necuoscutele aplicaţiei

<u>**Principiul lucrului mecanic virtual**</u>

Lucrul mecanic virtual este produsul dintre vectorul forţă şi vectorul deplasare virtuală:

$$\delta L_i = F_i \cdot \delta r_i \tag{3.21}$$

Scriind principiul lui d'Alembert pentru punctul A_i al unui sistem de puncte materiale de mase m_i avem:

$$\mathbf{F_i} + \mathbf{F'_i} + \mathbf{R_i} = \mathbf{0} \tag{3.22}$$

Pentru toate punctele sistemului se poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F_i} + \mathbf{F'_i} + \mathbf{R_i}) = \mathbf{0} \tag{3.23}$$

Înmulţind relaţia (3.23) cu δr_i rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F_i} + \mathbf{F'_i} + \mathbf{R_i})\,\delta\mathbf{r_i} = 0 \ \text{ sau} \tag{3.24}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F_i} + \mathbf{F'_i})\,\delta\mathbf{r_i} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{R_i}\,\delta\mathbf{r_i} = 0 \tag{3.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R_i}\,\delta\mathbf{r_i} = \sum_{i=1}^{n}\lambda\cdot \text{grad}\ \varphi_j \cdot \delta\mathbf{r_i} = 0\,;\ \text{cei doi vectori } \mathbf{R_i} = \lambda\cdot\text{grad}\ \varphi_j \text{ şi } \delta\mathbf{r_i} \text{ fiind perpendiculari} \tag{3.26}$$

Relaţia (3.24) se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F_i} + \mathbf{F_i'})\,\delta\mathbf{r_i} = 0 \tag{3.27}$$

Principiul lucrului mecanic virtual se poate enunţa astfel:
În cazul unui sistem de puncte materiale în mişcare forţele date $\boldsymbol{F_i}$ şi forţele de inerţie $\boldsymbol{F_i'}$ efectuează în orice moment al mişcării un lucru mecanic virtual nul, pentru orice deplasare dată sistemului compatibilă cu legăturile sale, dacă legăturile sunt ideale (fără frecare).
Unui sistem material cu m grade de libertate i se pot da m deplasări virtuale independente. Fiecărui grad de libertate îi corespunde o ecuaţie de lucru mecanic virtual nul.În aceste ecuaţii acceleraţiile punctelor intervin ca necunoscute.
Principiul lucrului mecanic virtual se aplică şi sistemelor materiale aflate în repaus. În acest caz forţele de inerţie $\mathbf{F_i'}$ sunt nule.

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F_i}\,\delta\mathbf{r_i} = 0 \tag{3.28}$$

Condiţia ca un sistem material să fie în repaus este ca lucrul mecanic virtual al forţelor date să fie nul, pentru orice deplasare dată sistemului compatibilă cu legăturile sale, dacă legăturile sunt ideale (fără frecare).
Principiul lucrului mecanic virtual se foloseşte în cadrul metodei deplasărilor virtuale cu care se rezolvă trei tipuri de aplicaţii:
-aplicaţii de dinamică
-aplicaţii de statică
-aplicaţii pentru determinarea forţelor de legătură
Etapele de rezolvare a aplicaţiilor folosind metoda deplasărilor virtuale sunt urmaătoarele:

- se face un studiu cinematic în care determină nunărul gradelor de libertate ale sistemului şi tipul mişcării care se efectuează
- se fac eventualele compuneri de mişcări
- se face schema forţelor date şi de inerţie care acţionează pe sistemul material
- se face schema deplasărilor virtuale pentru fiecare grad de libertate al sistemului
- se scriu ecuaţiile de lucru mecanic virtual al forţelor date si de inerţie corespunzătoare fiecărui grad de libertate din care rezultă un sistem de ecuaţii al cărui necunoscute sunt acceleraţiile sistemelor materiale
- se rezolvă sistemul de ecuaţii determinând necuoscutele aplicaţiei

1. $f = 0$ bilaterale
$f > 0$ unilaterale

2. f(t) =0 reonome (nestationare)
$f = 0$ scleronome (stationare)
3. $f = 0$ geometrice (finite)
$f(v) = 0$ cinematice (diferentiale)
$f(v) = 0$ cinematice (diferentiale) integrabile + $f = 0$ geometrice (finite) = legături olonome
$f(v) = 0$ cinematice (diferentiale) neintegrabile + $f > 0$ unilaterele
= legături neolonome

[a]^ Singh, Sunil Kumar (25 august 2007). „Conservative force”. Connexions. Accesat la 4 ianuarie 2008.
[b] e.g. Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. (1963). Lectures on Physics, Vol 1. Addison-Wesley; Kleppner, D., Kolenkow, R. J. (1973). An introduction to mechanics. McGraw-Hill.