Elemente de teoria sistemelor multivariabile

Aurelian D. Ignat-Coman

E-mail: Aurelian.Ignat@aut.utcluj.ro

Universitatea Tehnică din Cluj Napoca

Str. Constantin Daicoviciu nr 15, 400020 Cluj - Napoca, Romania

Universitatea Tehnică din Cluj Napoca
Str. Constantin Daicoviciu nr 15, 400020 Cluj - Napoca, Romania

Cuprins

1 Introducere **1**

2 Sisteme multivariabile. Generalităţi **3**
1 Introducere 3
2 Sisteme liniare invariante în timp 10
3 Polii şi zerourile sistemelor 11
4 Problema realizării minimale 14

3 Controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor multivariabile liniare invariante în timp **17**
1 Controlabilitatea sistemelor liniare invariante în timp 20
1.1 Grammianul de controlabilitate 23
1.2 Matricea de controlabilitate 24
1.3 Testul Popov-Belevitch-Hautus 27
1.4 Descompunerea sistemelor în partea controlabilă şi în partea necontrolabilă. Descompunerea modală a sistemelor 30
1.5 Controlabilitatea pe ieşire şi controlabilitatea funcţională 37
2 Observabilitatea sistemelor liniare invariante în timp 41
2.1 Grammianul de observabilitate 44
2.2 Matricea de observabilitate 44
2.3 Testul Popov-Belevitch-Hautus 48
2.4 Descompunerea sistemelor în partea observabilă şi în partea neobservabilă 50
3 Sisteme duale 54
4 Studiu de caz 57
5 Probleme de studiu 60

4 Polii şi zerourile sistemelor multivariabile liniare invariante în timp **63**
1 Polii şi zerourile sistemelor monovariabile ($SISO$) 63
2 Polii sistemelor multivariabile ($MIMO$) 70

3 Zerourile de transmisie 73
3.1 Metode pentru determinarea zerourilor de transmisie 75
3.2 Zerourile sistemului la infinit 80
4 Zerourile de decuplare 83
4.1 Zerourile de decuplare pe intrare 84
4.2 Zerouri de decuplare pe ieşire 86
4.3 Zerourile de decuplare pe intrare şi pe ieşire 88
4.4 Zerourile de decuplare ale sistemului 88
5 Zerourile invariante 90
6 Zerourile sistemului 91
7 Importanţa cunoaşterii zerourilor sistemelor 92
8 Probleme de studiu 94

5 Concluzii **97**

Anexa **101**

Răspunsuri la problemele propuse **101**

Secvenţe *Maple* pentru rezolvarea exemplelor propuse **113**

Elemente de algebra liniară. Vectori **157**

Elemente de algebra liniară. Matrice **161**

Reprezentarea sistemelor sub formă de matrice Rosenbrock **169**

Forma Smith-McMillan de reprezentare a sistemelor **171**

Bibliografie selectivă **173**

Index de noţiuni **177**

Listă de tabele

3.1 Algoritmul de verificare a proprietăţii de controlabilitate pentru un sistem liniar invariant în timp. 41
3.2 Algoritmul de verificare a proprietăţii de observabilitate pentru un sistem liniar invariant în timp. 55

4.1 Algoritmul pentru determinarea polilor unui sistem descris în spaţiul stărilor sau sub forma unei matrice de transfer. 73
4.2 Algoritmul pentru determinarea zerourilor de transmisie finite. 81
4.3 Algoritmul pentru determinarea zerourilor de transmisie infinite. 83
4.4 Algoritmul pentru determinarea zerourilor de decuplare pe intrare şi pe ieşire ale unui sistem. 89
4.5 Algoritmul pentru determinarea zerourilor de decuplare ale sistemului. . . . 89

Listă de figuri

2.1 Sistemul controlat nu depinde de modul de abordarea al acestuia, indiferent dacă este $SISO$ sau $MIMO$ stările (interne) sunt aceleaşi. 5
2.2 Sistem multivariabil format din patru celule termice. 6
2.3 Sistem cu cărucior şi pendul invers dublu. 7
2.4 Sistem de laminare la cald a materialelor metalice. 8
2.5 Modalităţi de reprezentare ale unui sistem: (a) - prin relaţii de tip *intrare-ieşire*, (b) - prin relaţii de tip *intrare-stare-ieşire*. 13

3.1 Diagrama bloc a reprezentării sistemului în spaţiul stărilor. 18
3.2 Răspunsul şi variaţia stărilor sistemului 3.4 la intrare de tip treaptă unitară şi în condiţii iniţiale $x(0) = [0, 0]^T$. 21
3.3 Răspunsul şi variaţia stărilor sistemului 3.4 la intrare de tip treaptă unitară şi în condiţii iniţiale $x(0) = [1, 1]^T$. 21
3.4 Sistem cu două rezervoare amplasate în cascadă. 22
3.5 Variaţia ieşirii sistemului considerat. 42
3.6 Un exemplu de sistem controlabil dar neobservabil. 45
3.7 Sistem controlabil şi observabil, rezultat prin adăugarea unei noi ieşiri corespunzătoare primei stări. 46
3.8 Ansamblu format dintr-un pendul simplu invers, sprijinit pe un cărucior. . 58

4.1 Sistem simplificat al suspensiei unui autovehicul. 64
4.2 Răspunsul sistemului considerat pentru $m = 1$, $k = 1$ şi $d = 2$ la intrare $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$. 65
4.3 Răspunsul sistemului considerat pentru $m = 1$, $k = 1$ şi $d = 4$ la intrare $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$. 66
4.4 Răspunsul sistemului considerat pentru $m = 4$, $k = 1$ şi $d = 1$ la intrare $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$. 67
4.5 Răspunsul sistemului la intrarea $y(t) = 0.1$. 68
4.6 Studiu de caz: a) Sistem $SISO$, b) Sistem $MIMO$. 74
4.7 Ieşirile sistemului reprezentat în Figura 4.6(b) la intrarea $u = [u_1 \;\; u_2]^T = [\sin(t) \;\; \sin(t)]^T$, în condiţii iniţiale nule. 75

4.8 Schema bloc a realizării de stare a sistemului $H(s) = 1 + \frac{1}{s}$. 76
4.9 Zerourile sistemului reprezentat sub formă de matrice de transfer. 92
4.10 Zerourile sistemului reprezentat în spaţiul stărilor. 92
4.11 Limitele funcţiei de sensibilitate la frecvenţe joase ($\omega \searrow$) şi înalte ($\omega \nearrow$). . 93

CAPITOLUL 1

Introducere

Controlul automat este preocupat cu înţelegerea mediului înconjurător (a *sistemelor*), având ca rezultat o serie de produse (*sisteme automate*) care facilitează activităţi mai eficiente şi mai sigure, în toate segmentele societăţii.

Marea majoritate a sistemelor sau proceselor reale sunt multivariabile. In prezent, acest segment al automaticii nu este suficient tratat în învăţământul superior românesc, la multe facultăţi de profil neexistând cursuri de modelare şi de sinteză a sistemelor multivariabile, acestea fiind privite şi prezentate din punct de vedere didactic, într-un mod oarecum nefiresc, ca şi cazuri particulare ale sistemelor monovariabile. Si aici însă, totul se rezumă la prezentarea cunoştinţelor la nivel de principiu sau declarativ.

Nu acelaşi lucru se poate spune despre sistemul de învăţământ din strainătate, unde la multe universităţi de prestigiu există cursuri axate exclusiv pe sistemele MIMO [Rodriguez, 2004d; Wen, 2004; Ly, 2003].

Prezentul material îşi propune:

- Justificarea analizei sistemelor multivariabile prin prisma multitudinilor de apariţii ale acestora în practică. De fapt, importanţa studierii sistemelor multivariabile rezidă în faptul că majoritatea sistemelor reale complexe sunt multivariabile.

- Prezentarea modalităţilor matematice de reprezentare a sistemelor multivariabile. Surprinderea câtorva aspecte specifice reprezentării sistemelor multivariabile comparativ cu sistemele monovariabile.

- Sublinierea importanţei analizei controlabilităţii şi a observabilităţii sistemelor multivariabile. Studierea acestor proprietăţi urmărind atât caracterul lor intrinsec cât şi determinarea modurilor de comportare care le influenţează.

- Studierea polilor şi a zerourilor sistemelor, cu particularizare pentru cazul sistemelor multivaribile.

- Prezentatea succintă a importanţei cunoaşterii poziţionării în spaţiul stărilor a zerourilor sistemelor.

Soluţionarea obiectivelor propuse are în vedere consultarea unei bibliografii bazate pe lucrări, articole şi cărţi de specialitate naţionale dar mai ales internaţionale. Lucrarea este organizată după cum urmează: în cel de-al doilea capitol sunt prezentate câteva generalităţi referitoare la analiza sistemelor în general, cu particularizări pe sistemele multivariabile. Cel de-al treilea capitol este dedicat studiului controlabilităţii şi a observabilităţii sistemelor multivariabile. In capitolul patru sunt prezentate probleme specifice studiului polilor şi a zerourilor sistemelor multivariabile, iar în următorul capitol este subliniată importanţa cunoaşterii poziţionării acestora în spaţiul stărilor. Ultimul capitol este dedicat concluziilor referitoare la cele prezentate şi la rezultatele obţinute.

De asemenea, lucrarea este prevăzută cu anexe, cu rol de suport matematic. Conceptele teoretice prezentate în lucrare sunt susţinute prin exemple care se doresc cât mai concludente pentru probblemele în cauză. Rezolvarea acestor exemple s-a realizat prin utilizarea mediului *Maple v.8*, iar secvenţele de rezolvare sunt de asemenea prezente în anexa lucrării.

CAPITOLUL 2

Sisteme multivariabile. Generalităţi

1 Introducere

O caracteristică a ştiinţei controlului automat actual este diversitatea de sisteme, procese şi fenomene pe care aceasta le analizează, le controlează sau le supervizează [Rodriguez, 2004a].

La inceputurile sale, controlul automat avea ca şi scop doar reglarea unor parametri în cazul unui proces. In prezent controlul automat a devenit o ştiină multidisciplinară care implică [Ly, 2003]:

- **sisteme fizice** - de exemplu: roboţi, avioane, submarine, sisteme economice, sistemul muscular uman, schimbătoare de căldură, sateliţi, reţele electrice, sisteme meteorologice, etc.
- **procese fizice, sociale, economice politice şi virtuale** - de exemplu: procese de fabricaţie a semiconductorilor, procese chimice, procesare de semnale, procesul de respiraţie, procesul de ardere a combustibililor, creşterea populaţiei, securitatea comerţului, managementul deciziilor, managementul câmpului de luptă, etc.
- **fenomene fizice, sociale, economice şi politice** - de exemplu: electrice, mecanice, termice, optice, inflaţia, scăderea stratului de ozon, etc.

Deşi lista pezentată este menită să evidenţieze diversitatea domeniilor de aplicabilitate a controlului automat, trebuie menţionat că majoritatea sistemelor reale sunt sisteme multivariabile ($MIMO$[1]).

Sistemele multivariabile sunt acele sisteme care au un număr oarecare, neunic de mărimi de intrare şi/sau ieşire. Numărul de intrări şi/sau ieşiri specifice unui sistem, proces sau fenomen care trebuie monitorizate şi controlate determină tipul de controler ce trebuie utilizat, monovariabil sau multivariabil.

[1]MIMO - acronim de la Multi-Input Multi-Output.

Trebuie însă bine înţeles că, caracterul de sistem monovariabil sau multivariabil este determinat numai de gradul de percepţie a acestuia de către inginer, materializat prin finalitatea sistemului de control. Cu alte cuvinte, sistemul este acelaşi, stările lui nu depind de caracterul monovariabil sau multivariabil adoptat în abordarea acestuia, ceea ce se modifică este numărul de variabile de intrare şi ieşire luate în considerare.

Ex. 2.1 De exemplu, în prezent, majoritatea avioanelor sunt prevăzute cu un sistem automat pentru reglarea vitezei de croazieră (Figura 2.1(a)). Acest sistem este unul de tip $SISO$, urmăreşte numai menţinerea unei viteze constante indiferent de perturbaţiile existente la un moment dat şi presupune monitorizarea vitezei curente şi corectarea acesteia prin modificarea debitului de combustibil în motoare.

Insă există avioane echipate cu sisteme de pilotare automată. In aceeastă situaţie este necesar să se controleze în acelaşi timp viteza avionului, altitudinea acestuia unghiurile de tangaj şi ruliu, etc. In acest caz se poate utiliza un controler $MIMO$, vezi Figura 2.1(b). Variabilele monitorizate (intrările în controler) sunt asociate vitezei, altitudinii, unghiului de tangaj şi ruliu ale avionului, presiunii atomosferice exterioare avionului, nivelul de O_2 evacuat din motoare, etc. Variabilele controlate (ieşirile din controler) pot fi considerate fluxul de combustibil în motoare, poziţiile eleroanelor, a cârmei, etc.

Se poate observa că sistemul controlat, avionul în acest caz, este independent, rămâne acelaşi indiferent de sistemul de control utilizat. Practic caracterul monovariabil sau multivariabil al avionului este imprimat de finalitatea sistemul de control.

Complexitatea sistemelor, datorată îndeosebi multitudinilor de cerinţe de control impuse sau a complexităţii constructive ridicate, face ca în practică să se întâlnească mai rar sisteme $SISO$[2] autentice.

In mod tradiţional însă, sunt studiate sistemele cu o singură intrare şi o singură ieşire, sistemele $SISO$. Astfel sunt implementate şi studiate o varietate largă de metode pentru aceste tipuri de sisteme [Dorf, 1980; Dobra, 1999; Bosgra, Kwakernaak şi Meinsma, 2003; Belea şi Vortolomei, 1985; Goodwin, Graebe şi Salgado, 2000; Hăngănuţ, 1971; Ionescu şi Varga, 1994; Dragomir şi Preitl, 1979].

Controlerele multivariabile sunt în practică mult mai dificil de implementat şi de utilizat decât cele monovariabile, chiar dacă teoretic sistemele $MIMO$ şi $SISO$ au multe proprietăţi comune. Acest fapt se datorează în special interacţiunilor ce pot apărea între diferite bucle de reglare. Astfel dacă pe o astfel de buclă de reglare există un controler $SISO$ care a fost proiectat pentru un maxim de performanţă pe acea buclă, este posibil ca sistemul global să devină instabil din cauza interacţiunilor cu celelalte bucle de reglare. Explicaţia este simplă şi ţine de faptul că controlerul monovariabil nu a fost proiectat ţinând cont de aceste interacţiuni.

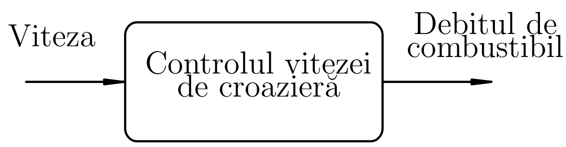
S-ar părea că astfel de sisteme, care posedă mai multe intrări controlate şi mai multe ieşiri măsurate aduc o simplificare pentru problema controlului. Este însă destul de complicat stabilirea unui mod de a beneficia de aceste avantaje. Problema este însă, după cum se va observa în continuare, dificilă deoarece subsistemele monovariabile nu sunt independente unul de celălalt.

Din punct de vedere constructiv sau funcţional, se poate afirma că sistemele multivariabile sunt formate din subsisteme monovariabile. Astfel, intuitiv, se deduce că sistemele multivariabile pot fi analizate şi controlate ca şi ansamble de sisteme monovariabile. Şi ideea este una destul de utilizată! Totuşi trebuie menţionat că această abordare nu este întotdeauna posibilă.

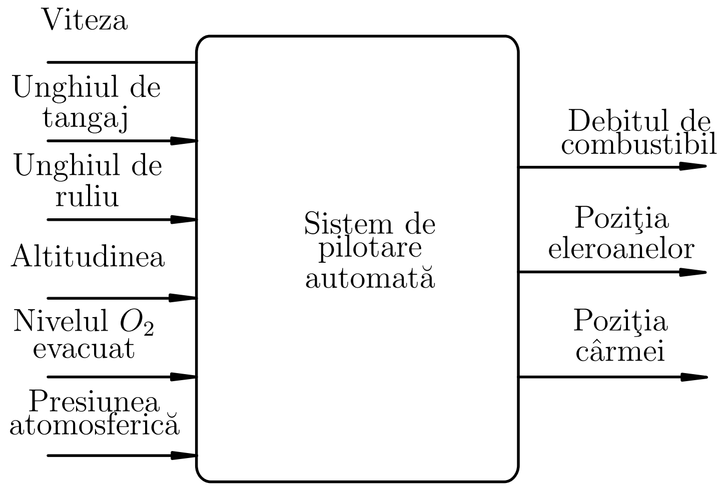
Adesea, din diverse motive[3], sistemele multivariabile sunt divizate, analizate, moni-

[2]SISO - acronim de la Single-Input Single Output.

[3]Cum ar fi: complexitate funcţională, restricţiile constructive, limitările de abordare sau percepţie



(a) Sistem de control de tip $SISO$.



(b) Sistem de control de tip $MIMO$.

Figura 2.1: Sistemul controlat nu depinde de modul de abordarea al acestuia, indiferent dacă este $SISO$ sau $MIMO$ stările (interne) sunt aceleaşi.

torizate, controlate ca şi ansambluri de sisteme monovariabile. Descompunerea sistemelor $MIMO$ în sisteme $SISO$ are ca prim rezultat o simplitate dobândită dar adesea acest rezultat este suboptimal [Bosgra et al., 2003].

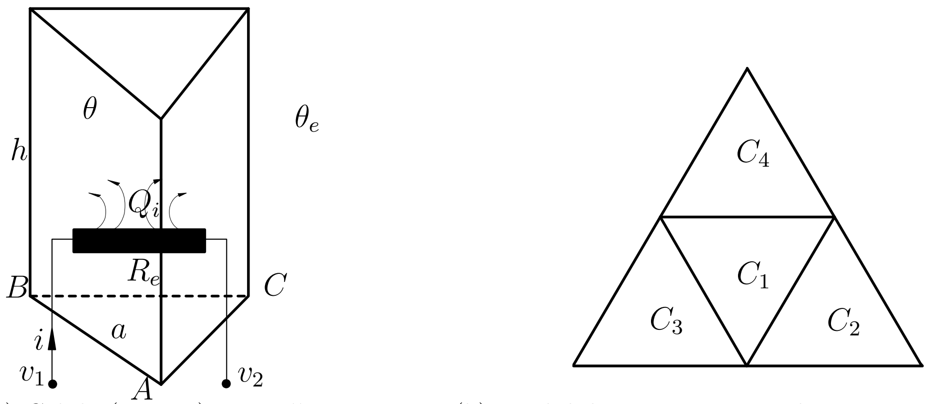
Pentru un sistem $MIMO$ această simplificare este o modalitate de analiză şi de sinteză acceptabilă, dar cu anumite restricţii legate îndeosebi de interacţiunile dintre subsisteme:

1. Dacă semnalele provenite din alte bucle de reglare sau de la alte subsisteme $SISO$ sunt de amplitudine redusă, sau se pot separa în timp sau în frecvenţă de cele două semnale definitorii, de intrare şi de ieşire, ele pot fi tratate ca *semnale perturbatoare*[4] pentru sistemul $SISO$. In acest caz se spune că în sistem există *interacţiuni slabe.*

   O altă soluţie este considerarea acestor semnale ca şi erori de model, erori care pot fi minimizate dacă se utilizează o analiză robustă a sistemului. In ambele situaţii,

ale persoanei în cauză, scopul final pentru care se doreşte analiza unui sistem, performanţele de control urmărite, bugetul disponibil etc.

[4] A nu se confunda cu perturbaţiile ce pot afecta semnalele din sistem!



(a) Celula (incinta) termică.

(b) Modul de poziţionare a celor patru celule are ca rezultat direct un sistem multivariabil.

Figura 2.2: Sistem multivariabil format din patru celule termice.

semnalele perturbatoare sunt efectul interacţiunilor ce apar în sistem.

Această metodă de abordare a sistemelor multivariabile poartă denumirea de *control descentralizat*. Intr-un control descentralizat sistemul $MIMO$ este aproximat ca şi un set de subsisteme $SISO$ independente unul de celălalt.

Soluţia este însă una de aproximare din moment ce interacţiunile implică o reacţie inversă iar perturbaţiile sunt intrări independente. Avantajul constă în faptul că atunci când această soluţie se poate aplica, se pot utiliza metode specifice teoriei sistemelor monovariabile [Goodwin et al., 2000].

Ex. 2.2 Un sistem multivariabil [Isoc şi Ignat, 2005] în care se poate aplica un control descentralizat bazat de exemplu pe metoda de RGA (Relative Gain Array) [Bosgra et al., 2003] este cel din Figura 2.2.

Sistemul este format dintr-un număr de patru celule (incinte) termice, C_1, C_2, C_3 şi C_4, asemenea celei din Figura 2.2(a), cuplate conform Figurii 2.2(b). Fiecare celulă termică conţine în interiorul său o sursă de căldură caracterizată de rezistenţa electrică R_e şi un senzor care măsoară temperatura θ din incintă.

Prin modalitatea de cuplare a celor patru celule, vezi Figura 2.2(b), temperaturile din cele patru celule nu sunt determinate numai de sursa de căldură corespunzătoare ci şi de temperaturile din celulele adiacente. Construcţia prezentată are menirea de a simula într-un mod cât mai realist unele situaţii întâlnite în realitate: controlul temperaturii într-un autovehicul, într-o sală de conferinţe, ventilarea naturală a unei hale de creştere a animalelor, etc.

In principiu, scopul controlului este de a menţine la valori dorite temperaturile din cele patru celule, în mod independent de temperaturile din celulele adiacente. Este evident aici, că acest deziderat poate fi atins numai dacă se consideră o abordare multivariabilă a întregului sistem.

O metodă pentru controlul sistemului este utilzarea unor parităţi între intrările şi ieşirile sistemului. Metoda poartă denumirea de *Relative Gain Array* [Bosgra et al., 2003]. Prin utilizarea unei astfel de metode, fiecare celulă poate fi controlată prin acordarea, de exemplu a unui regulator PID, în mod independent de temperaturile din celelalte celule.

2. Cea de-a doua situaţie apare în momentul în care soluţia anterioară nu se poate aplica şi trebuie considerate toate semnalele simultan, rezultând astfel sisteme de

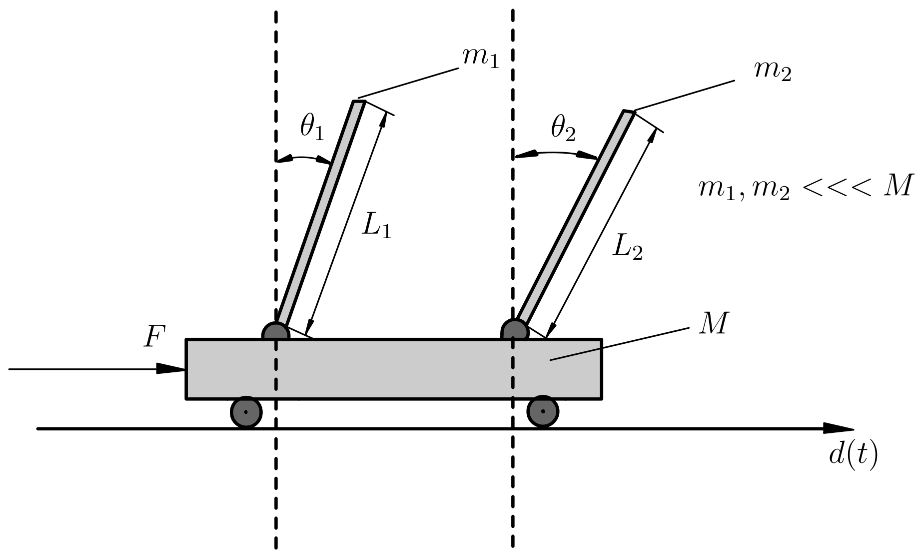


Figura 2.3: Sistem cu cărucior şi pendul invers dublu.

tip $MIMO$. Această situaţie se datorează *cuplărilor (interacţiunilor)* constructive sau funcţionale dintre diferite subsisteme constituente ale sistemului global, cuplări ce nu pot fi neglijate.

In acest caz se spune că în sistem există *interacţiuni puternice* iar această abordare poartă denumirea de *control multivariabil total* sau *centralizat*.

Ex. 2.3 Un exemplu de sistem multivariabil în care apare fenomenul de cuplare constructivă este cel al pendulului dublu invers prezentat în Figura 2.3. Sistemul este format dintr-un cărucior de masă M pe care sunt amplasate două tije mobile de dimensiuni L_1, L_2 şi de mase m_1 respectiv m_2. Căruciorul este acţionat de forţa F şi se urmăreşte, de exemplu, menţinerea unghiurilor θ_1 şi θ_2 la valori diferite, astfel încât $\theta_1 \neq \theta_2$.

Sistemul poate fi împărţit în două subsisteme fiecare dintre acestea având menirea de a surprinde dinamica celor două tije.

Dacă se porneşte din condiţii iniţiale $\theta_{1_0} = \theta_{2_0}$, este evident că în cazul în care $L_1 = L_2$ şi $m_1 = m_2$, după mecanica clasică, obiectivele de control urmărite nu pot fi atinse, adică $\theta_1 \neq \theta_2$. Altfel spus, în condiţiile stabilite, nu există o comandă (o forţa F) care să asigure tranziţia poziţiei relative la verticală a celor două tije, la unghiuri diferite $\theta_1 \neq \theta_2$.

Acest lucru se datorează "cuplărilor constructive" ce apar între cele două tije. Problema s-ar putea rezolva dacă $L_1 \neq L_2$ sau $m_1 \neq m_2$!

Pentru sistemul din Figura 2.3 nu se mai poate aplica un control descentralizat, legăturile dintre subsisteme fiind mult mai *puternice* decât în cazul sistemului din exemplul anterior. In acest caz este necesară adoptarea unei metode de control centralizate.

Ex. 2.4 Un alt exemplu de sistem multivariabil, dar care prezintă cuplări funcţionale este laminorul la cald din Figura 2.4 [Mathworks, 2005].

Laminorul la cald are rolul de a modela o bară de material încălzită, atât pe lăţime cât şi pe înălţime, prin utilizarea pe axele x şi y a două perechi de cilindrii. Prin forţa exercitată de aceşti cilindrii asupra materialului, acesta este modelat la forma dorită.

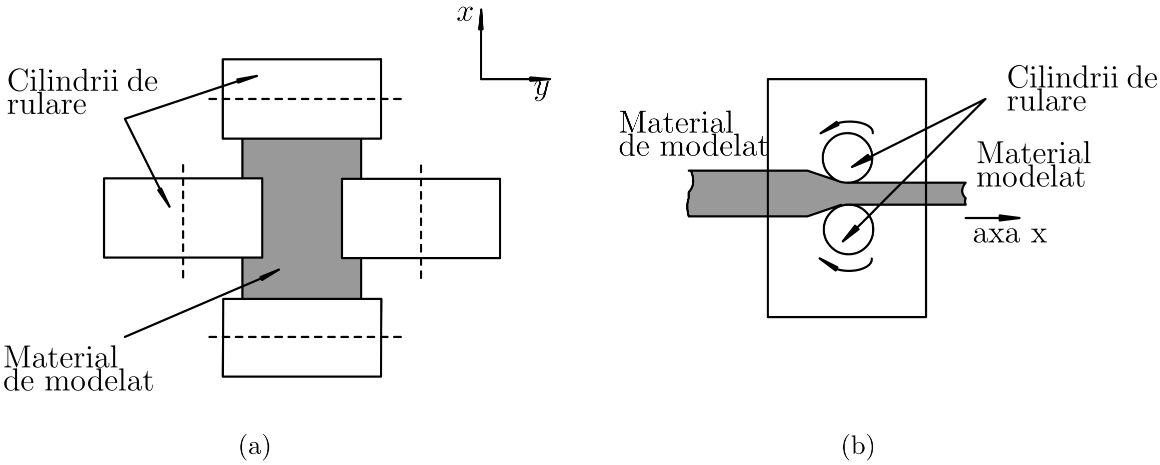


Figura 2.4: Sistem de laminare la cald a materialelor metalice.

Scopul controlului aplicat este menţinerea dimensiunilor barei de material la valorile dorite. Mărimile controlate sunt forţele de apăsare ale cilindrilor situaţi pe cele două axe. Imperfecţiunile barei de material sau a cilindrilor de apăsare sunt perturbaţii pentru sistemul de control. Acestea se pot manifesta pe ambele axe.

Distanţa dintre doi cilindrii situaţi pe aceeaşi axă, este o măsură a dimensiunii materialul la ieşire dar deoarece ea nu poate fi măsurată în apropierea cilindrilor, ca ieşire este utilizată forţa de apăsare a cilindrilor. Aceste două valori sunt şi variabilele de stare ale sistemului. Soluţia este valabilă atât pentru axa x cât şi pentru axa y.

In aceste condiţii, sistemul prezintă o cuplare funcţională între axa orizontală şi cea verticală prin intermediul barei de material. Efectul acestei cuplări este că o fortă mai mare de apăsare a cilindrilor de pe axa x implică o forţă mai redusă de apăsare a cilindrilor de pe axa y.

In ambele exemple cuplarea este un fapt evident iar analiza sistemelor ca şi sisteme multivariabile este impetuos necesară. Diferenţa dintre această cuplare şi cea din exemplul anterior este că în acest caz ea nu este "constantă". In acest caz cuplarea este determinată în principal de funcţionarea sistemului şi nu de construcţia acestuia. Astfel pe lângă influenţele datorate unei forţe mai mari pe o axa decât pe cealaltă, de exemplu ea poate să fie mai puternică pentru un anumit tip de material şi mai slabă în cazul altui material.

Din cele prezentate mai sus se poate observa că în cazul controlului sistemelor multivariabile s-au dezvoltat două tendinţe [Johansson, 1997]:

1. Una corespunzătoare primei restricţii şi care s-a materializat prin metode plecând de la ideea de a "îmbunătăţii" performanţele unui controler monovariabil în prezenţa diferitelor interacţiuni (metode de decuplare [Goodwin et al., 2000], metode bazate pe transformata Fourier, metode bazate pe şiruri Nyquist [Bosgra et al., 2003], etc).

2. Una corespunzătoare celei de-a doua restricţii, prin care s-a căutat să se atenueze şi controleze efectul acestor cuplări (metoda H_∞ [Dobra, 1999], metode de optimizare, metode bazate pe modelul intern [Morari şi Zafiriou, 1989; Patel şi Munro, 1982], etc.).

Multe metode de control ale sistemelor multivariabile s-au născut din experienţa acumulată din controlul unui proces anume. Dar eforturile depuse în acest nu au avut impactul aşteptat, cu câteva excepţii notabile [Siamantas, 1994]. Explicaţia este că cercetarea în domeniul controlului multivariabil s-a dezvoltat îndeosebi în aria matematicii, a teoriei şi mai puţin în cea a practicii [Johansson, 1997].

Tehnicile de analiză şi sinteză a sistemelor $SISO$ nu sunt întotdeauna adecvate şi sistemelor $MIMO$, deoarece metodele pentru determinarea şi interpretarea zerourilor sistemelor $MIMO$ diferă faţă de sistemele $SISO$. Pentru sistemele $SISO$, zerourile funcţiei de transfer sunt rădăcinile polinomului de la numărător dar în cazul sistemelor $MIMO$ acestă abordare nu mai este valabilă. Astfel zerourile matricei de transfer nu sunt zerourile funcţiilor ce apar în matricea de transfer.

Pentru a exemplifica acest lucru următoarele două exemple [Rosenbrock, 1970] au devenit clasice:

Ex. 2.5 Fie un sistem multivariabil reprezentat prin matricea de transfer:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Se observă că elementele matricei de transfer $G_{ij}(s)$, $i, j \in \{1, 2\}$, (funcţiile raţionale în s) nu au nici un zero (valorile s pentru care $G_{ij}(s) = 0$). Totuşi sistemul multivariabil posedă un zero la $s = 1$. Modul de determinare al acestui zero se va prezenta în §4. Tot atunci se vor studia şi efectele datorate *lipsei* acestui zero din matricea de transfer.

Ex. 2.6 Sistemul multivariabil descris prin matricea de transfer:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1-1}{(s+1)^2} & \dfrac{2-s}{(s+3)^2} \\ \dfrac{1-3s}{3(s+1)^2} & \dfrac{1-s}{(s+1)^2} \end{bmatrix},$$

are toate zerourile elementelor raţionale $G_{ij}(s)$, $i, j \in \{1, 2\}$, în semiplanul drept, dar totuşi se va observa în §4 că sistemul are zerourile situate în semiplanul stâng. Incă o dată se observă că problema determinării zerourilor sistemelor multivariabile este mult mai complexă decât în cazul sistemelor monovariabile.

In consecinţă se impune studierea altor tehnici pentru determinarea zerourilor în cazul sistemelor $MIMO$. Totuşi unele aspecte legate de sistemele $SISO$ se pot aplica şi în cazul sistemelor $MIMO$:

- polii sistemului;
- controlabilitatea şi observabilitatea sistemului.

Aspectele prezentate anterior ţin de o etapa primordială în sinteza unor strategii de control, supervizare sau de predicţie pentru diferite sisteme, procese sau fenomene fizice, şi anume de *analiza sistemului.* In urma acestei etape se pot trage unele concluzii[5] privind dinamica şi stabilitatea sistemului, fiecare dintre aceste două aspecte fiind influenţate de polii şi zerourile sistemului şi de controlabilitatea şi observabilitatea acestuia.

In funcţie de rezultatele obţinute în această etapă şi de performanţele de control impuse, se pot adopta, adapta, proiecta şi implementa diferite strategii de control. In literatura de specialitate s-au tratat şi dezvoltat mai multe tehnici de analiză şi sinteză a

[5]Aceste concluzii sau rezultate pot fi interpretate ca şi *limitări* privind unele acţiuni de control, diagnoză sau supervizare specifice controlului automat.

sistemelor $MIMO$, s-au realizat progrese mari dar totuşi este încă un domeniu departe de a fi acoperit [Villegas, 2004].

In capitolele următoare se vor acoperi câteva dintre problemele legate de analiza sistemelor multivariabile prin prisma controlabilităţii şi observabilităţii acestora ca şi proprietăţi intrinseci ale sistemelor. De asemenea se vor prezenta modalităţi pentru determinarea polilor şi zerourilor sistemelor, iar în final se va sublinia succint importanţa cunoaşterii poziţionării acestor valori în spaţiul stărilor.

Inainte de toate acestea se impune recapitularea câtorva aspecte specifice studiului sistemelor şi anume: liniaritatea sistemelor, invarianţa în timp a acestora, modalităţi matematice de reprezentare a sistemelor, polii şi zerourile sistemului şi problema reprezentării minimale a sistemelor.

2 Sisteme liniare invariante în timp

Sistemele liniare reprezintă o clasă foarte largă de sisteme sau modele matematice care sunt utilizate pentru a descrie, a modela, simula sau aproxima sistemele fizice care manifestă o comportare liniară [Rodriguez, 2004a].

Definiţia 2.1 *Un operator $W(x)$ este liniar dacă satisface principiile superpoziţiei şi omogenităţii:*

$$W(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1W(x_1) + a_2W(x_2) \tag{2.1}$$

Un sistem S care respectă relaţia (2.1) este un *sistem liniar*. Respecatarea relaţiei (2.1) de către sistemul S se poate traduce prin prin îndeplinirea condiţiei:

$$y_{a_1u_1+a_2u_2}(t) = a_1y_{u_1}(t) + a_2y_{u_2}(t)$$

unde:

- $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sunt două constante;
- $y_{u_1}(t)$ este răspunsul sistemului la intrarea $u(t) = u_1(t)$;
- $y_{u_2}(t)$ este răspunsul sistemului la intrarea $u(t) = u_2(t)$;
- $y_{a_1u_1+a_2u_2}(t)$ este răspunsul sistemului la intrarea $u(t) = a_1u_1(t) + a_2u_2(t)$.

Un sistem care nu este liniar este *neliniar*.

Sistemele liniare sunt foarte utilizate în diferite domenii inginereşti (navigaţie, chimie, robotică, etc.), dar trebuie menţionat că aceste sisteme sunt de fapt o aproximare a unor sisteme mult mai complexe. In practică un sistem liniar se obţine prin examinarea şi exploatarea comportamentului unui sistem neliniar în jurul unui *punct de funcţionare*, iar procesul poartă numele de *liniarizare* [Ly, 2003; Isoc, 2001; Lewis, 2004a].

Pentru a descrie comportamentul unui sistem dinamic se pot utiliza următoarele ecuaţii neliniare ce descriu variaţia stărilor şi a ieşirilor sistemului:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \quad - \textit{ecuatiile de stare} \\ y &= g(x,u) \quad - \textit{ecuatiile de iesire} \end{aligned} \tag{2.2}$$

unde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ reprezintă stările sistemului, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ reprezintă intrările controlate iar $y(t) \in \mathbb{R}^p$ reprezintă ieşirile măsurate iar f şi g sunt funcţii continue.

Dacă sistemul se liniarizează, el poate fi descris prin ecuaţii diferenţiale liniare. In aceste condiţii ecuaţiile de stare şi de ieşire pot fi scrise astfel:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

unde $A(t)$ este o matrice de dimensiune $n \times n$ şi reprezintă stările sistemului (matricea coeficienţilor), $B(t)$ este o matrice de dimensiune $n \times m$ şi reprezintă intrarea sistemului (matricea de comandă), $C(t)$ este o matrice de dimensiune $p \times n$ şi reprezintă ieşirea sistemului (matricea de ieşire), iar $D(t)$ este matrice de dimensiune $p \times m$ ce reprezintă legătura directă existentă între intrare şi ieşire (matricea de transfer direct).

In cazul în care elementele matricelor (A, B, C, D) sunt constante, sistemul descris prin ecuaţiile (2.3) este şi *invariant* în timp. Cu alte cuvinte "forma" ieşirii sistemului nu depinde de momentul în care intrarea este aplicată sistemului.

Un sistem care este liniar şi invariant poartă denumirea de *sistem liniar invariant în timp (LTI)*[6].

3 Polii şi zerourile sistemelor

Majoritatea sistemelor dinamice pot fi descrise în contextul liniarizării prin expresii algebrice liniare simple sau ecuaţii diferenţiale de ordine reduse, cu coeficienţi constanţi [Rodriguez, 2004a].

Un sistem S[7] liniar invariant în timp poate fi descris în spaţiul stărilor (adică prin considerarea evoluţiei acestuia, în speţă a stările sistemului) printr-un cvadruplu de matrice (A, B, C, D), iar fiecare dintre aceste matrice descriu interacţiuni între diferite mărimi ce caracterizează sistemul.

O astfel de descriere este de tipul *intrare-stare-ieşire*.

Se consideră un astfel de sistem S descris *în spaţiul stărilor*:

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{2.4}$$

unde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $A_{n\times n} \in \mathbb{R}$ $B_{n\times m} \in \mathbb{R}$, $C_{p\times n} \in \mathbb{R}$, iar $D_{p\times m} \in \mathbb{R}$.

Reprezentarea sistemului considerat prin relaţia (2.4) este o reprezentare de tipul intrare-stare-ieşire, iar cvadruplul (A, B, C, D) defineşte o *descriere în spaţiul stărilor* a sistemului. Perechea (A, B) defineşte *ecuaţiile de stare*[8] iar perechea (C, D) defineşte *ecuaţiile de ieşire* ale sistemului.

Deoarece sistemul este definit printr-un număr de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, sistemul este de *ordiniul n*.

[6] Acronim de la Linear Time Invariant System.

[7] Deşi controlul automat modern presupune analiza, sinteza şi predicţia sistemelor, proceselor sau fenomenelor fizice, economice, politice sau sociale, reprezentate prin modele matematice, pentru o uşurinţă în prezentare se va utiliza termenul de sistem, care se doreşte a avea aici un caracter global.

[8] Starea unui sistem se poate defini ca şi minimul de informaţie necesară pentru determinarea ieşirii viitoare a sistemului, când se cunoaşte doar intrarea curentă şi viitoare aplicată sistemului [Rodriguez, 2004a].

Pentru un sistem S (2.4) descris în spaţiul stărilor sub formă de matrice (A, B, C, D), dacă se aplică transformata Laplace [Dorf, 1980; Rodriguez, 2004a] pornind din condiţii iniţiale x_0 nenule, se obţin ecuaţiile:

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \ \ si, \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \end{aligned} \tag{2.5}$$

In relaţia (2.5), cu $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ s-a notat *matricea rezolventă* asociată matricei A [Dragomir, 2004]. Dacă sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule ($x_0 = 0$), funcţia de transfer de la intrarea $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ la ieşirea $y = [y_1, y_2, \ldots, y_p]^T$ este dată de:

$$\begin{aligned} H(s) &= C\Phi(s)B + D = C(sI - A)^{-1}B + D = C\frac{1}{|sI - A|}adj(sI - A)B + D \\ &= \frac{1}{\Delta(s)} \cdot N(s). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Reprezentarea sistemelor sub forma (2.6), unde $N(s)$ este o matrice de dimensiune $p \times m$ iar $\Delta(s)$ este un polinom în s, este o reprezentare de tip *intrare-ieşire*.

Cu această reprezentare a sistemului, determinarea polilor şi a zerourilor sistemelor $SISO$ se face prin rezolvarea ecuaţiilor:

- $\Delta(s) = 0 \Rightarrow$ polii sistemului;
- $N(s) = 0 \Rightarrow$ zerourile sistemului.

Se va observa pe parcursul acestei lucrări că o descriere de tip *intrare-stare-ieşire*, vezi Figura 2.5(b), oferă mai multe informaţii despre dinamica sistemului şi despre legăturile interioare existente între stările sistemului decât o descriere de tip *intrare-ieşire*, vezi Figura 2.5(a) [Lewis, 2004a].

Observaţia 2.1

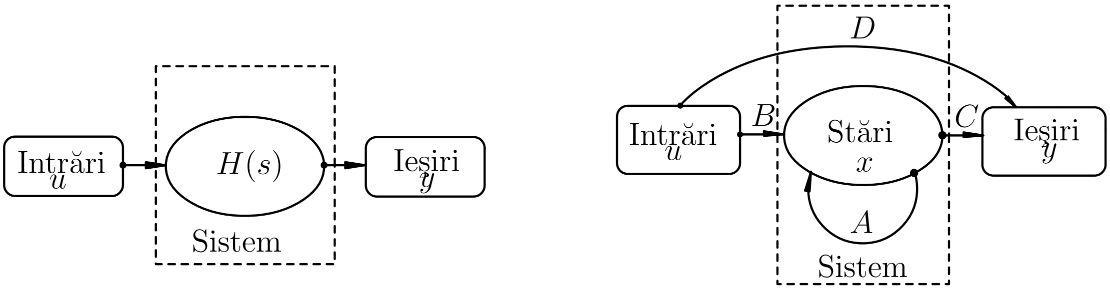
Pentru cazul în care $m = p = 1$, adică este un sistem $SISO$, $H(s)$ are un singur element, şi se numeşte funcţie de transfer de la intrarea u la ieşirea y.

Dacă $m \neq 1$ sau $p \neq 1$, adica este un sistem de tip $MIMO$, $H(s)$ va fi o matrice de dimensiuni $p \times m$ şi poartă denumirea de matrice de transfer[9] *de la intrările $u = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ la ieşirile $y = [y_1, y_2, \ldots, y_p]^T$. Fiecare element $H_{i,j}(s)$ al acestei matrice reprezintă o funcţie de transfer de la intrarea j la ieşirea i a sistemului.*

Observaţia 2.2

Prin analiza ecuaţiei (2.6) se poate observa că polii sistemului depind numai de matricea A iar zerourile depind de cvadruplul (A, B, C, D).

[9] In literatura de specialitate este notată şi cu $G(s)$. Notatia $H(s)$ este folosită cu predilecţie pentru sistemele monovariabile.



(a) (b)

Figura 2.5: Modalităţi de reprezentare ale unui sistem: (a) - prin relaţii de tip *intrare-ieşire*, (b) - prin relaţii de tip *intrare-stare-ieşire*.

Din ecuaţia (2.6), după simplificarea relaţiei $\frac{1}{\Delta(s)} \cdot N(s)$[10]*, rezultă o matrice de transfer, notată* $H(s)$*, care descrie sistemul original în funcţie de relaţiile existente între intrările şi ieşirile acestuia în condiţii iniţiale nule*[11]*. In urma unor astfel de simplificări unii poli dispar din funcţia rezultată, astfel încât un sistem descris prin funcţii de transfer se poate spune că "maschează" [Teodorescu, 1984] unii poli. De exemplu un pol observabil al unui sistem care nu porneşte din condiţii iniţiale nule poate să fie excitat iniţial, dar să nu mai apară în funcţia de transfer din cauza unor anulări (compensări) între un pol şi un zero. Explicaţia este că acel pol este necontrolabil!*

Problema este că prin descrierea unui sistem printr-o funcţie sau matrice de transfer, nu se poate spune direct care dintre posibilii poli nu mai apar în funcţia rezultată.

De aceea se impune analiza unui sistem pornind de la reprezentarea acestuia prin cvadruplul (A, B, C, D)*, care oferă o imagine asupra sistemului mai apropiată de realităţile funcţionale, sau se impun alte forme de reprezentare a matricei de transfer. In plus, reprezentarea în spaţiul stărilor este mult mai adecvată studierii sistemelor* $MIMO$ *deoarece în cazul acestor sisteme matricele de transfer pot prezenta şi un anumit grad de redundanţă informaţională.*

Pentru un sistem $SISO$ la care $m = p = 1$, $N(s)$ şi $\Delta(s)$ vor fi polinoame în s iar determinarea polilor şi a zerourilor implică rezolvarea ecuaţiilor polinomiale $N(s) = 0$, respectiv $\Delta(s) = 0$.

In cazul unui sistem $MIMO$, pentru care $m > 1$ şi/sau $p > 1$, $N(s)$ va fi o matrice de polinoame în s şi evident determinarea zerourilor sistemului devine mai dificilă. Acest lucru se datorează faptului că în cazul sistemelor multivariabile funcţia de transfer este o matrice. De fapt cea mai mare problema a sistemelor multivariabile este că se lucrează cu o matrice de funcţii de transfer şi nu cu o funcţie de transfer ca în cazul sistemelor monovariabile.

Pentru un sistem $SISO$, zerourile sunt date de valorile lui s pentru care funcţia de transfer ia valoarea 0. Intuitiv, un zerou al unui sistem multivariabil este o valoare s la care matricea de transfer îşi pierde rangul maxim posibil. Problema poate deveni dificilă

[10] Această simplificare este necesară. Chiar dacă nu este realizată de către proiectant, posibilele anulări poli-zerouri sunt realizate de la sine din punct de vedere funcţional!
[11] Nu întotdeauna sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule.

dacă se ţine seama de faptul că în cazul sistemelor multivariabile avem de-a face cu o matrice de funcţii de transfer. In plus aici se ridică o serie de posibile probleme cum ar fi: sistemul nu este reprezentat într-o formă minimală sau există compensări între poli şi zerouri. In plus, în capitolele următoare se va observa că vor exista mai multe tipuri de zerouri pentru sistemele $MIMO$.

Determinarea polilor unui sistem $MIMO$, sub reprezentarea (2.6) se face tot prin rezolvarea ecuaţiei $\Delta(s) = 0$, ca şi în cazul sistemelor $SISO$ deoarece aşa după cum s-a observat aceştia depind numai de elementele matricei de stare A, care nu este influenţată de numărul de intrări sau ieşiri ale sistemului considerat.

Problema cea mai mare pe care o ridică analiza sistemelor $MIMO$ este dată de eventualele anulări (compensări) între poli şi zerouri, între $N(s)$ şi $\Delta(s)$. Aceste anulări au ca efect dispariţia unor poli sau zerouri, astfel încât reprezentarea $H(s)$ rezultată nu este elocventă pentru determinarea polilor sau a zerourilor sistemului. De exemplu polii determinaţi din ecuaţia $\Delta(s) = 0$ pot să nu mai apară în numitorul funcţiei $H(s)$. La fel se poate întâmpla şi cu zerourile ecuaţiei $N(s) = 0$. Determinarea corectă a acestora se face pornind de la cvadruplul (A, B, C, D), sau dacă matricea $H(s)$ este adusă la o formă particulară.

Ex. 2.7 Sistemul descris prin:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x$$

posedă polii la $s = -1$ şi $s = -3$.

Dacă se determină funcţia de transfer a acestuia:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 4s + 3}}_{\Delta(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -2s - 2 & -2s - 2 \\ 4s + 4 & 4s + 4 \end{bmatrix}}_{N(s)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{s+3} & -\dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{4}{s+3} & \dfrac{4}{s+3} \end{bmatrix}$$

se observă că polul $s = -1$ nu mai apare în funcţia de transfer rezultată.

Cauza acestei situaţii o reprezintă existenţa unui zerou la $s = -1$ care anulează (compensează) polul respectiv. Efectul acestei anulări este din punct de vedere matematic dispariţia polului şi a zeroului la $s = -1$ din funcţia de transfer rezultată, iar din punct de vedere sistemic, modul dat de $s = -1$ este neobservabil.

4 Problema realizării minimale

Pentru a analiza şi apoi a controla un sistem este necesar în primul rând de a avea o descriere (un model) a acestuia.

Intuitiv, ştiind că un sistem poate avea mai multe modele posibile (datorită neunicităţii realizărilor de stare), se pune problema stabilirii celui mai simplu model care să păstreze însă informaţiile cu privire la transferul între intrările şi ieşirile sistemului. Acest deziderat se poate obţine printr-o *realizare de stare minimală*. Obiectivele unei astfel de realizări este de a obţine o descriere minimală a sistemului din punct de vedere al numărului de stări utilizate. Altfel spus, problema minimalităţii unui sistem presupune determinarea unei realizări de stare (A, B, C, D) pornind de la mărimile de intrare $u(t)$ şi ieşire $y(t)$, astfel încât cvadruplul rezultat $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ să corespundă unui număr minim de stări (ordin minim pentru sistem[12]).

Definiţia 2.2 *Un sistem descris în spaţiul stărilor printr-un cvadruplu (A, B, C, D) este în **formă minimală** dacă sunt folosite un număr minim de stări pentru determinarea transferului intrare-ieşire al sistemului.*

Observaţia 2.3

Din definiţia de mai sus rezultă că problema minimalităţii unui sistem este legată de forma de reprezentare a acestuia (de model), deci chiar dacă depinde de sistem ea nu este a sistemului (a procesului în sine) ci este a reprezentării acestuia[13]. De aici şi importanţa ei.

Dacă există o altă descriere a sistemului, fie ea (A_1, B_1, C_1, D_1) cu un număr mai mic de stări şi care conduce la aceeaşi funcţie de transfer $H(s)$, atunci sistemul nu este în formă minimală.

Un sistem descris printr-un cvadruplu (A, B, C, D) este în **formă minimală** dacă şi numai dacă nu există simplificări poli-zerouri în matricea de transfer $H(s)$ aferentă acestei reprezentări în spaţiul stărilor.

La un sistem $SISO$, condiţia de minimalitate este îndeplinită dacă nu există rădăcini comune între numitorul şi numărătorul funcţiei de transfer $H(s)$ [Lewis, 2004b].

La sistemele $MIMO$ minimalitatea sistemului este o problemă direct legată de polii şi zerourilor sistemului. De exemplu, pentru un sistem care posedă acelaşi număr de intrări şi ieşiri, adică $m = p$, pentru ca o descriere să fie în formă minimală este necesar ca acesta să nu posede zerouri la aceleaşi frecvenţe cu ale polilor.

O metodă simplă de verificare a minimalităţii unui sistem constă în verificarea *controlabilităţii* şi a *observabilităţii* acestuia, potrivit următoarei teoreme:

Teorema 2.1 *Dacă un sistem liniar invariant în timp, descris în spaţiul stărilor prin matricile (A, B, C, D), este complet controlabil şi complet observabil, el este într-o reprezentare minimală [Ly, 2003; Ionescu, 1985; Schutter, 2000; Teodorescu, 1984; Willems, 2003].*

Observaţia 2.4

Descrierea minimală a unui sistem este formată numai din partea controlabilă şi cea observabilă a sistemului. Astfel dacă se determină că perechea (A, B) este necontrolabilă sau că perechea (C, A) este neobservabilă, sistemul nu este într-o formă minimală [Ly, 2003].

[12] Un număr minim de ecuaţii diferenţiale prin care se descrie sistemul sau un număr minim de stări prin care se descrie sistemul [Dragomir şi Preitl, 1979].

[13] Totuşi în continuare, pentru uşurinţa exprimării, se va folosi expresia *minimalitatea sistemului* în loc de *minimalitatea reprezentării sistemului.*

Ex. 2.8 Fie sistemul descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10.14 & 29.85 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.98 \\ 0 \\ -33.47 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

In capitolele următoare se va arăta că sistemul este complet controlabil şi complet observabil, deci modelul determinat de matricele (A, B, C) este în formă minimală. Cu alte cuvinte, modelul în spaţiul stărilor este determinat de un număr minim de stări, păstrând în acelaşi timp toate informaţiile legate de transferul intrare-ieşire determinat de:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s(0.091s + 0.303)} \\ -\dfrac{s}{(0.328298s^2 - 9.8)(0.091s + 0.303)} \end{bmatrix}$$

In cele prezentate mai sus s-a pornit de la ipoteza că sistemele sunt descrise în spaţiul stărilor. Ce se întâmplă însă dacă sistemul este descris prin funcţie sau matrice de transfer?

Pentru trecerea din reprezentarea sistemului sub formă de funcţie (matrice) de transfer într-o realizare minimală în spaţiul stărilor există tehnici de realizare minimală [Ly, 2003; Patel şi Munro, 1982; Teodorescu, 1984; Dragomir şi Preitl, 1979]. In cazul în care se cunoaşte matricea de transfer $H(s)$ a sistemului, transformarea acesteia în cvadruplul (A, B, C, D) se poate face numai dacă se cunosc informaţii suplimentare privind structura sistemului [Teodorescu, 1984]. Acest lucru se explică prin faptul că unei matrice de transfer îi corespund o mulţime arbitrar de mare de realizări (A, B, C, D) care include şi mulţimea realizărilor minimale $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ [Teodorescu, 1984].

Rezumat

Majoritatea sistemelor reale sunt sisteme multivariabile.

Sistemele multivariabile sunt mai dificil de studiat decât cele monovariabile, în primul rând datorită conexiunilor şi cuplărilor ce pot apărea în cadrul unor astfel de sisteme.

Pentru controlul sistemelor multivariabile se disting două abordări: controlul descentralizat şi controlul multivariabil total. Pe baza acestor două direcţii s-au dezvoltat diferite metode de control multivariabil.

In cazul sistemelor multivariabile, aspectele privind studiul controlabilităţii, observabilităţii şi a polilor sistemelor sunt comune sistemelor simple, monovariabile.

Alte aspecte cum ar fi zerourile sistemelor multivariabile necesită o abordare specifică.

CAPITOLUL 3

Controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor multivariabile liniare invariante în timp

In acest capitol se vor studia două proprietăţi ale sistemelor şi anume: controlabilitatea şi observabilitatea acestora. Fie că un sistem posedă sau nu aceste proprietăţi este necesară studierea lor deoarece acestea influenţează în unele situaţii existenţa unui controler pentru sistemul considerat. De fapt tot controlul clasic s-a dezvoltat pe baza acestor două proprietăţi ale sistemelor.

Ştiinţele inginereşti sunt preocupate cu înţelegerea şi controlul *sistemelor fizice*, *proceselor* şi a *fenomenelor* în beneficiul omului şi a societăţii.

Motivaţia existenţei controlului automat este legată de câteva cerinţe necesare omului cu privire la aceste sisteme, procese sau fenomene:

- utilizare sigură;
- utilizare eficientă;
- calitate ridicată;
- profitabilitate ridicată.

Controlul automat, ca ştiinţă inginerească, se bazează pe teoria structurilor cu *reacţie inversă* (feedback) şi pe analiza sistemelor care presupune existenţa unei relaţii cauză - efect între componentele unui sistem [Dorf, 1980].

In prezent se cunosc diferite metode de sinteză a unor controlere bazate pe reacţia inversă pentru o gamă largă de sisteme [Dorf, 1980; Dobra, 1999; Hăngănuţ, 1971; Hăngănuţ, 1996; Patel şi Munro, 1982; Rodriguez, 2004a; Teodorescu, 1984; Dragomir şi Preitl, 1979; Villegas, 2004].

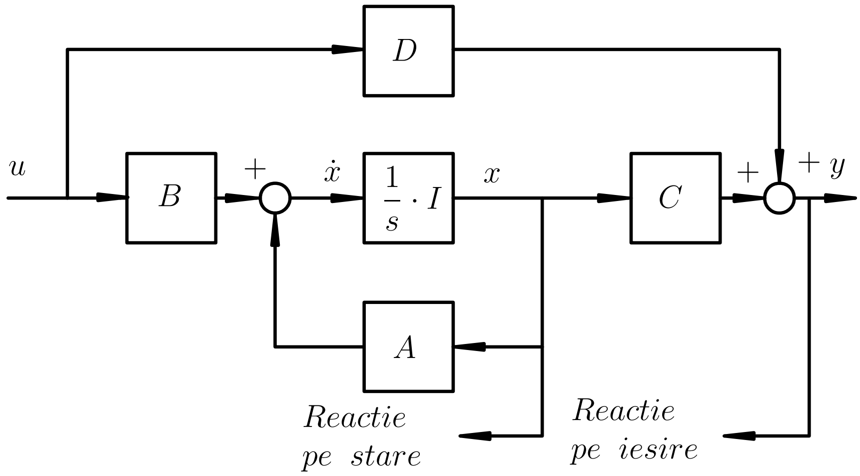


Figura 3.1: Diagrama bloc a reprezentării sistemului în spaţiul stărilor.

Ideea reacţiei inverse este de a găsi o modalitate practică de a aloca (plasa) polii sistemului de controlat astfel încât să îi fie afectate modurile nedorite în sensul modificării influenţei lor asupra întregului sistem. Dar când se poate influenţa manifestarea unui mod natural al unui sistem prin reacţie inversă? Răspunsul la această întrebare este dat de proprietatea de *controlabilitate* a unui sistem.

Pentru a se evidenţia şi conştientiza importanţa noţiunii de controlabilitate trebuie înţeles în primul rând ce înseamnă reacţia inversă pentru un sistem.

Se dă un sistem S descris în spaţiul stărilor de ecuaţiile:

$$(S):\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx+Du\end{cases}\tag{3.1}$$

unde $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^p$, $A_{n\times n}\in\mathbb{R}$ $B_{n\times m}\in\mathbb{R}$, $C_{p\times n}\in\mathbb{R}$, iar $D_{p\times m}\in\mathbb{R}$. Acest sistem se poate reprezenta prin schema bloc prezentată în Figura 3.1.

Se cunoaşte că sistemele prezintă o dinamică proprie care adesea se doreşte influenţată deoarece nu corespunde cerinţelor utilizatorului[1]. Astfel de dinamici ar putea fi date de moduri instabile, lente, de elemente neliniare, sau de unele incertitudini legate de modelul ce caracterizează sistemul.

Pentru a îmbunătăţii dinamica unui sistem o soluţie este utilizarea unei reacţii inverse. Reacţia inversă afectează intrările sistemului şi poate fi realizată:

- doar după stările sistemului, $u=f(x)$;
- doar după ieşirile sistemului, $u=f(y)$;
- atât după stările cât şi după ieşirile sistemului, $u=f(x,y)$.

[1]Cerinţe legate îndeosebi de instabilitate şi performanţele de control [Patel şi Munro, 1982].

Utilizarea unei reacţii pe stare (x) presupune stabilirea unei matrice de control K_x şi utilizarea unei legi de control de forma:

$$u = r - K_x x \tag{3.2}$$

unde u este intrarea sistemului iar r este un vector de dimensiune $m \times 1$ şi determină referinţa sistemului de control.

Dacă se aplică o reacţie inversă pe ieşire (y), legea de control poate fi scrisă astfel:

$$u = r - K_y y \tag{3.3}$$

unde de această dată K_y este matricea de control iar mărimea urmărită pentru determinarea erorii (abaterii) este ieşirea (ieşirile în cazul sistemelor multivariabile) sistemului.

Utilizarea unei astfel de strategii de control este o sarcină destul de simplă şi de transparentă [Lewis, 2004b]. Problema se rezumă doar la stabilirea matricelor de control K_x sau K_y. Pentru calcularea acestor matrice există metode deja consacrate [Bosgra et al., 2003; Goodwin et al., 2000; Patel şi Munro, 1982]. Lucrarea de faţă nu urmăreşte determinarea acestor matrice, însă doreşte lămurirea câtorva aspecte legate de unele proprietăţi ale sistemului, proprietăţi care nu ţin de strategia de control adoptată, dar care influenţează determinarea acestor matrice.

Astfel, din cele prezentate anterior se pot ridica cel puţin alte două aspecte:

1. Legea de control adoptată dă rezultatele aşteptate numai dacă *modurile sistemului pot fi controlate*, adică dacă stările sistemului sunt accesibile, cu alte cuvinte dacă sistemul este *controlabil.* Ideea este că *nu întotdeauna* se poate modifica dinamica unui sistem.

2. Problema de control devine complicată dacă vectorul stărilor nu este accesibil. Acest inconvenient apare când *nu* toate modurile de comportare ale sistemului sunt *vizibile*, adică stările nu pot fi măsurate sau determinate matematic[2]. In aceste condiţii sistemul *nu este observabil.*

Din cele prezentate se observă necesitatea studierii a două proprietăţi intrinseci ale unui sistem: controlabilitatea şi observabilitatea. Dacă aceste două proprietăţi nu sunt satisfăcute de către un sistem, acesta poate avea o dinamică nedorită.

$\boxed{\text{Ex. 3.1}}$ Fie un sistem care posedă un pol simplu instabil $\hat{s} = a$, $a > 0$.

Dacă starea $s = \hat{s}$ nu poate fi controlată printr-o structură cu reacţie după stare, sistemul va avea o dinamică ($x(t) = e^{at} \to \infty$) instabilă, lucru care nu este de dorit. Rezolvarea problemei constă în eliminarea instabilităţii, dacă această stare poate fi controlată.

Dar ce presupune ca un sistem să fie controlabil? Dar observabil? Cum se poate determina dacă un sistem posedă aceste proprietăţi? Şi ce anume le influenţează?

In continuare se vor acoperi câteva probleme specifice controlabilităţii şi observabilităţii sistemelor liniare invariante în timp. Deoarece este important ca noţinunile teoretice să fie legate de aplicaţii, aspectele teoretice specifice acestor două proprietăţi vor fi introduse şi susţinute prin diferite exemple care se doresc a fi cât mai sugestive.

[2] De exemplu prin utilizarea unui *observator* de stare.

1 Controlabilitatea sistemelor liniare invariante în timp

Noţiunea de controlabiliate a unui sistem este determinată de cerinţa impusă acestuia astfel încât, printr-o formă (modalitate, evoluţie) controlată, sistemul să treacă dintr-o stare iniţială oarecare într-o stare finală dorită, într-un timp finit.

Următorul exemplu subliniază importanţa studierii controlabilităţii unui sistem.

Ex. 3.2 Pentru început se consideră un sistem *SISO* [Lewis, 2004a] descris prin relaţiile:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Se presupune că sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule $x(t_0) = x(0) = [0, 0]^T$.

Deoarece sistemul porneşte din $x(0) = [0, 0]^T$ şi starea $\dot{x}_1(t) = x_1(t)$ va rezulta că $x_1(t) = 0$, $(\forall)\ t \geq 0$. Acest rezultat implică faptul că sistemul controlat va putea fi condus numai pe direcţia celei de-a doua stări $\dot{x}_2 = -x_2 + u$. Consecinţa este că orice stare $x_1(t) \neq 0$ nu va putea fi atinsă niciodată, dacă sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule!

Pentru a verifica aceste afirmaţii se calculează soluţia ecuaţiei 3.4 şi ieşirea acestuia [Dragomir, 2004]:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}u(\tau)d\tau,$$

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Se calculează matricea fundamentală:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & e^{-t}. \end{bmatrix}$$

Deoarece sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule, indiferent de intrarea aplicată sistemului, componentele libere pentru variaţia stărilor şi pentru variaţia ieşirii sistemului sunt nule. Astfel variaţiile acestora sunt determinate numai de răspunsul forţat determinat de intrarea aplicată sistemului. In cazul în care se aplică o intrare de tip treaptă unitară $u(t) = 1,\ t \geq 0$ variaţiile stărilor şi cea a ieşirii sistemului sunt:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{-t} \end{bmatrix}, \quad y(t) = 1 - e^{-t}.$$

Variaţia ieşirii sistemului este prezentată in Figura 3.2(a) iar variaţia stărilor este prezentată în Figura 3.2(b). Se observă că numai starea $x_2(t) = 1 - e^{-t}$ este influenţată de intrarea aplicată sistemului.

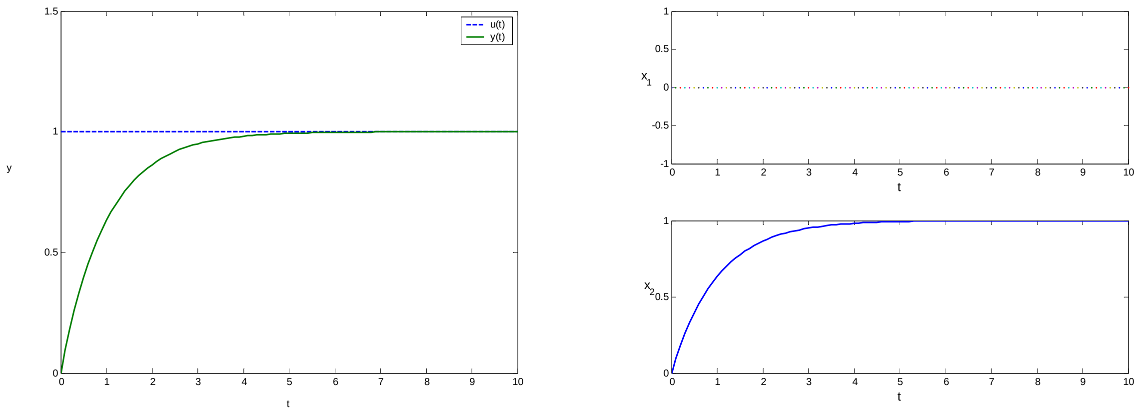
Dacă însă sistemul nu porneşte din condiţii iniţiale nule?

Se consideră că sistemul porneşte din starea iniţială $x(0) = [1, 1]$. In această situaţie, dacă se aplică tot o intrare de tip treaptă unitară, variaţiile stărilor şi a ieşirii (Figura 3.3) sunt:

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1 \end{bmatrix}, \quad y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + 1.$$

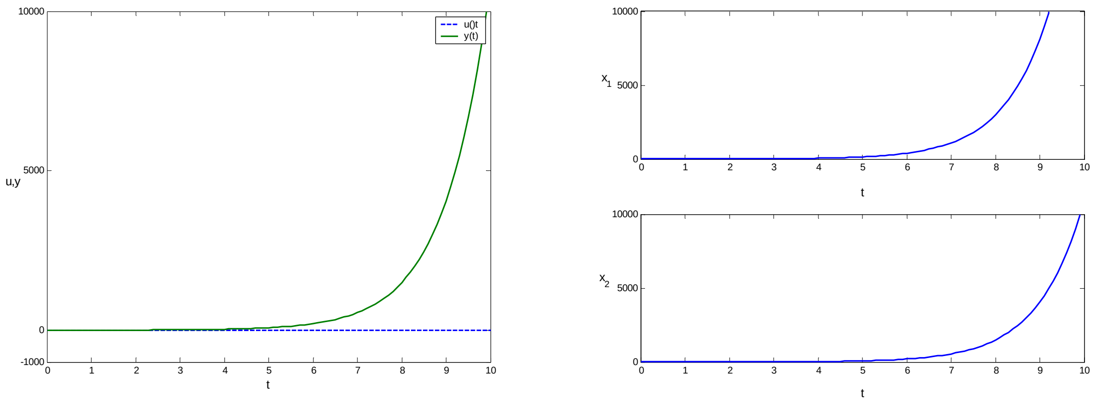
Se ridică astfel o întrebare cu privire la capacitatea unui sistem de a fi condus din orice stare intiţială în orice altă stare dorită. Este evident că acest sistem nu poate fi condus în orice stare dacă se porneşte din condiţii iniţiale nule, lucru echivalent cu a spune că sistemul nu poate fi controlat, adică nu este controlabil.

De asemenea se observă că în cazul în care sistemul porneşte din condiţii iniţiale nenule, sistemul este instabil.



(a) Răspunsul sistemului. (b) Variaţia stărilor sistemului.

Figura 3.2: Răspunsul şi variaţia stărilor sistemului 3.4 la intrare de tip treaptă unitară şi în condiţii iniţiale $x(0) = [0, 0]^T$.



(a) Răspunsul sistemului. (b) Variaţia stărilor sistemului.

Figura 3.3: Răspunsul şi variaţia stărilor sistemului 3.4 la intrare de tip treaptă unitară şi în condiţii iniţiale $x(0) = [1, 1]^T$.

Ex. 3.3 Un exemplu de sistem fizic care nu este controlabil este cel din Figura 3.4, în care se doreşte controlul nivelelor de lichid din cele două rezervoare h_1 respectiv h_2 prin mărimea de comandă u_2. In acest caz mărimile de stare pot fi h_1 şi h_2, iar ieşirile sistemului sunt chiar aceste nivele.

Aici necontrolabilitatea sistemului este observată fenomenologic. Doar prin manipularea debitului u_2 de lichid în cel de-al doilea rezervor, nivelul din primul rezervor nu poate fi controlat. Este necesar să se controleze şi debitul de lichid transferat din primul rezervor în cel de-al doilea. Acest lucru se poate face prin introducerea unei valve suplimentare v_1.

Fie un sistem descris prin:

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.5}$$

unde x este un vector de dimensiune $n \times 1$ numit vectorul stărilor, u este un vector de dimensiune $m \times 1$ numit vectorul intrărilor, y este un vector de dimensiune $p \times 1$ numit

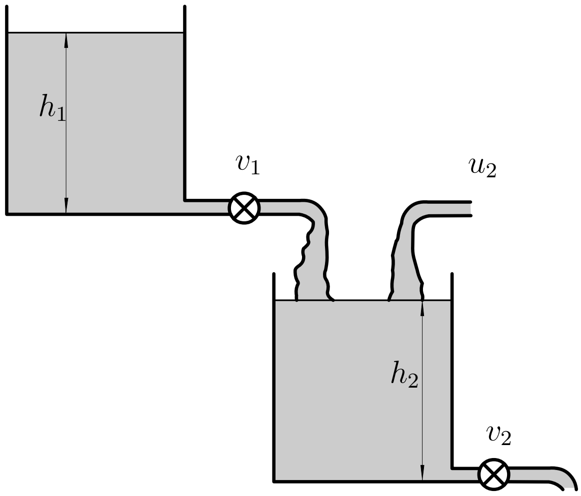


Figura 3.4: Sistem cu două rezervoare amplasate în cascadă.

vectorul ieşirilor, A este o matrice de dimensiune $n \times n$, B este o matrice de dimensiune $n \times m$, C este o matrice de dimensiune $p \times n$ iar D este o matrice de dimensiune $p \times m$.

Soluţia ecuaţiei de stare (3.5) pentru o intrare oarecare $u(t)$, $t \geq 0$ dacă se porneşte dintr-o stare iniţială x_0, este dată de relaţia:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B(\tau)u(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

Definiţia 3.1 *Un sistem (S) descris prin ecuaţia (3.5) este* ***controlabil*** *dacă şi numai dacă oricare ar fi două stări $x_0 = x(t_0)$ şi $x_1 = x(t_1)$ şi momentele de timp t_0, t_1 ($t_0 < t_1$) există o comandă $u(t)$, cu $t \in [t_0, t_1]$, care să permită trecerea sistemului din starea iniţială x_0 în starea finală x_1.*

Nota 3.1

Un sistem este ***complet controlabil*** *dacă toate stările îi sunt controlabile.*

Un sistem este ***total necontrolabil*** *dacă toate stările îi sunt necontrolabile.*

Observaţia 3.1

Din definiţia de mai sus rezultă că pentru un sistem controlabilitatea este o problemă de existenţă a unei comenzi u admisibile pentru sistem, care să asigure transferul din starea x_0 în starea x_1 într-un interval de timp finit.

Stările x_0 şi x_1 sunt alese arbitrar.

In cazul în care condiţia de mai sus nu este satisfăcută, atunci acel sistem este necontrolabil, adică sistemul nu poate fi trecut în mod controlat, adică sub acţiunea unei comenzi, din starea iniţială x_0 în cea finală x_1.

Necontrolabilitatea implică existenţa cel puţin a unei stări ce nu poate fi influenţată prin nici o comandă.

O stare necontrolabilă este o stare care nu poate fi cuplată cu intrarea sistemului, adică o comportare a sistemului care nu poate fi influenţată de comenzile aplicate sistemului.

Se va observa că această proprietate a sistemului nu depinde de matricele C şi D din reprezentarea (3.5) a sistemului.

1.1 Grammianul de controlabilitate

Teorema 3.1 *Sistemul (S) descris prin (3.5) este* ***complet controlabil****, conform Definiţiei 3.1, dacă şi numai dacă matricea, de dimensiuni $n \times n$:*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau \tag{3.7}$$

este inversabilă [Ly, 2003].

Observaţia 3.2

Matricea M, este de dimensiune $n \times n$, este definită numai pe intervalul $[t_0, t_1]$, este simetrică şi pozitivă [Ly, 2003].

Ex. 3.4 Să se verifice controlabilitatea sistemului descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifică dacă matricea $W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau$ este inversabilă. Dacă se înlocuieşte $s = t_1 - \tau$, rezultă $W(0, t_1 - t_0) = \int_0^{t_1-t_0} \underbrace{e^{As} B B^T e^{A^T s}}_{W_t(s)} ds$. Se calculează matricea $W_t(s)$, după care se calculează integrala:

$$\begin{aligned} W_t(s) &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-s}-1 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (e^{-s}-1)e^{-s} & e^{-s} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (e^{-s}-1)^2 & (e^{-s}-1)e^{-s} \\ (e^{-s}-1)e^{-s} & e^{-2s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

iar matricea $W(0, t_1 - t_0)$ este:

$$\begin{aligned} W(0, t_1 - t_0) = \int_0^{t_1-t_0} W_t(s) ds &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} + 2e^{-(t_1-t_0)} - \ln e^{-(t_1-t_0)} & -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} + e^{-(t_1-t_0)} \\ -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} + e^{-(t_1-t_0)} & -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t_1-t_0)} - \ln e^{-(t_1-t_0)} & e^{-(t_1-t_0)} \\ -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} + e^{-(t_1-t_0)} & -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\ln e^{-(t_1-t_0)} & e^{-(t_1-t_0)} \\ e^{-(t_1-t_0)} & -\frac{1}{2}e^{-2(t_1-t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rangul matricei $W(0, t_1 - t_0)$ este egal cu 2 (cele două linii sunt liniar independente), matricea W este inversabilă, deci sistemul este complet controlabil. Această proprietate implică faptul că toate stările sistemului pot fi aduse într-un interval finit de timp dintr-o stare iniţială oarecare într-o stare finală dorită.

Nota 3.2

Pentru un sistem de ordinul n, după aplicarea metodei bazate pe grammianul de controlabilitate, dacă rangul matricei W nu este maxim, adică egal cu n, atunci sistemul nu este complet controlabil.

Numărul de stări necontrolabile este dat de $n - Rang(W)$, unde n este numărul de stări ale sistemului.

Ex. 3.5 Se consideră următorul sistem în spaţiul stărilor:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Să se verifice dacă sistemul este controlabil.

In acest sens se verifică dacă matricea $W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau$ este inversabilă.

Matricea $W_t(s) = \begin{bmatrix} 4e^{-2s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, iar matricea:

$$W(0, t_1 - t_0) = \int_0^{t_1 - t_0} W_t(s) ds = \begin{bmatrix} -2e^{(-2t_1+2t_0)} + 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinantul $|W(0, t_1 - t_0)| = 0$, rangul matricei este egal cu 1 deci sistemul este necontrolabil. Deoarece $n - Rang(W(0, t_1 - t_0)) = 2 - 1 = 1$, rezultă că există o stare necontrolabilă. Dacă se analizează sistemul, se poate observa că $\dot{x}_2 = x_2$, adică variaţia celei de-a doua stări depinde numai de valorile anterioare ale sale, astfel încât ea nu este controlabilă.

1.2 Matricea de controlabilitate

Metoda bazată pe grammianul de controlabilitate este uneori mai greu de aplicat, mai ales în cazurile în care $n > 3$. O altă modalitate de verificare a existenţei proprietăţii de controlabilitate este prin analiza soluţiei (3.6).

Pentru sistemele invariante în timp, dacă se consideră starea finală ca fiind $x(t) = x(t_1) = 0$, adică se aduce sistemul în origine $x_0 = x(t_0) \to x(t_1) = 0$, rezultă:

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \tag{3.8}$$

Această egalitate este posibilă pentru $(\forall)$ x_0, dacă şi numai dacă liniile matricei $e^{-A\tau}B$ sunt liniar independente [Patel şi Munro, 1982]. Ştiind că:

$$e^{At} \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (At)^n = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\},$$

rezultă faptul că matricea $[(sI - A)^{-1}B]$ trebuie să posede rang maxim, adică $rang[(sI - A)^{-1}B] = min(n, nm) = n$.

Se poate scrie că:

$$(sI-A)^{-1}B = (Is^{-1} + As^{-2} + A^2s^{-3} + \ldots)B = Bs^{-1} + ABs^{-2} + A^2Bs^{-3} + \ldots,$$

şi prin utilizarea teoremei Cayley-Hamilton, rezultă:

$$\begin{aligned}(sI-A)^{-1}B &= Bs^{-1} + ABs^{-2} + A^2Bs^{-3} + \ldots + A^{(n-1)}Bs^{-n} = \\ &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{-1} \\ s^{-2} \\ s^{-3} \\ \vdots \\ s^{-n} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ecuaţia (3.8) are soluţie numai dacă rangul matricei:

$$\Phi_c = [B, AB, A^2B, ..., A^{(n-1)}B]_{n\times nm} \tag{3.9}$$

este egal cu n (există n linii independente), unde n este dimensiunea vectorului de stare.

Matricea Φ_c ataşată unui sistem poartă numele de *matricea de controlabilitate* şi este de dimensiune $n \times nm$ (este o matrice cu mai multe coloane decât linii). Ideea este că prin această matrice se verifică dacă există stări care nu sunt influenţate de nici-o intrare aplicată sistemului.

Controlabilitatea unui sistem este determinată numai de matricea de stare A şi de matricea B ce determină intrarea sistemului, matricele C şi D neavând nici o influenţă asupra acestei proprietăţi.

Ex. 3.6 Se consideră sistemul descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Matricea de controlabilitate corespunzătoare acestui sistem este:

$$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

care are rangul egal cu 2, deci sistemul este complet controlabil.

Observaţia 3.3

Pentru un sistem descris prin matricele (A, B, C, D), cu $A_{n\times n} \in \mathbb{R}$, $B_{n\times m} \in \mathbb{R}$, $C_{p\times n} \in \mathbb{R}$, $D_{p\times m} \in \mathbb{R}$, metoda prezentată este utilă numai pentru verificarea proprietăţii de controlabilitate. Astfel dacă rangul matricei $\Phi_c = r < n$, se poate spune doar că sistemul este necontrolabil, dar nu se pot determina cele $n - r$ stări ale sistemului care implică acest lucru (stările care nu pot fi controlate).

Ex. 3.7 Se consideră sistemul descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Matricea de controlabilitate corespunzătoare acestui sistem este:

$$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

care are rangul egal cu $r = 1$, deci sistemul este necontrolabil. Cum $n = 2$ şi $r = 1$, rezultă că sistemul are o stare controlabilă şi una necontrolabilă, dar ele nu se cunosc.

In cazul unui sistem $SISO$ există o singură intrare, deci $m = 1$, matricea de controlabilitate este pătratică şi sistemul este complet controlabil dacă $|\Phi_c| \neq 0$.

Dacă $m > 1$, pentru a stabili rangul matricei de controlabilitate, trebuie verificat dacă aceasta conţine un număr de n coloane (linii) independente, operaţie care poate deveni dificilă mai ales dacă numărul m de intrări este mare. Pornind de la observaţia că pentru o matrice pătratică este mai uşor de determinat rangul, se revine la grammianul de controlabilitate:

$$W = \Phi_c \Phi_c^T \tag{3.12}$$

care este o matrice de dimensiune $n \times n$. Sistemul este complet controlabil dacă $|W| \neq 0$ [Lewis, 2004b].

$\boxed{\text{Ex. 3.8}}$ Pentru sistemul descris prin:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

prin utilizarea relaţiei (3.12), rezultă:

$$\Phi_c \Phi_c^T = \begin{bmatrix} 3316 & 3292 & 92 & 92 \\ 3292 & 3284 & 84 & 84 \\ 92 & 84 & 8 & 8 \\ 92 & 84 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Determinantul acestei matrice este egal cu 0, deci sistemul este necontrolabil. Mai mult, matricea de controlabilitate este:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -6 & 3 & 18 & -3 & -54 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

iar rangul ei este egal cu 3 şi în consecinţă se poate afirma că sistemul prezintă o stare necontrolabilă.

$\boxed{\text{Ex. 3.9}}$ Un alt exemplu interesant este următorul [Patel şi Munro, 1982].
Fie sistemul:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

In acest caz matricea de controlabilitate a sistemului este:

$$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cu rangul egal cu 2, deci sistemul este controlabil.

Dacă însă se consideră intrările separate va rezulta pentru prima intrare $u_1 = b_1 = [1 \;\; 1]^T$:

$$\Phi_c = [\ b_1 \quad Ab_1\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

cu rangul egal cu 1, deci sistemul este necontrolabil în raport cu prima intrare, iar dacă se consideră cea de-a doua intrare $u_2 = b_2 = [1 \;\; -1]^T$:

$$\Phi_c = [\ b_1 \quad Ab_1\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

rangul va fi tot 1 iar sistemul va fi necontrolabil şi în raport cu cea de-a doua intrare.

In concluzie sistemul este controlabil în raport de ambele intrări dar nu este controlabil în raport cu fiecare intrare în parte! Acest lucru se datorează conexiunilor existente prin sistem între cele două intrări care anulează efectele unor zerouri prin intermediul unor poli. Acest lucru se va observa în capitolul următor.

Din exemplele anterioare rezultă că prin utilizarea matricei de controlabilitate Φ_c se poate doar verifica existenţa proprietăţii de controlabilitate a unui sistem. Pentru o analiză completă a sistemului, în cazul în care sistemul este necontrolabil, se impune şi cunoaşterea modurilor şi a stărilor care implică această proprietate.

1.3 Testul Popov-Belevitch-Hautus

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor prin matricele A şi B. Pentru identificarea modurilor controlabile şi necontrolabile se poate utiliza criteriul Popov-Belevitch-Hautus (PBH)[3] pentru controlabilitate:

Teorema 3.2 *Un sistem invariant în timp pentru care matricea A posedă valori proprii distincte, este* ***necontrolabil*** *dacă şi numai dacă există un vector coloană w (diferit de zero) astfel încât:*

$$w^T A = \lambda_i w^T \quad si \quad w^T B = 0, \tag{3.14}$$

sau altfel spus, dacă şi numai dacă există un vector coloană w (diferit de zero) care satisface ecuaţia:

$$w^T[\lambda_i I - A \mid B] = 0, \tag{3.15}$$

unde cu λ_i s-au notat valorile proprii ale matricei A, $i = 1 \dots dim(A)$.

Dacă nu există un astfel de vector atunci sistemul este ***controlabil*** *[Ly, 2003].*

Teorema 3.2 oferă un suport destul de avantajos pentru determinarea proprietăţii de controlabilitate în raport cu valorile proprii ale matricei A. Astfel dacă se cunosc aceste valori proprii, se pot identifica eventuali vectori w care satisfac ecuaţia (3.15).

Este mai uşor dacă se porneşte de la cea de-a doua egalitate din (3.14), se caută vectori w care satisfac relaţia $w^T B = 0$ şi care apoi verifică şi prima egalitate din (3.14).

In unele cazuri, îndeosebi pentru $n > 2$, determinarea acestor vectori devine dificilă. In aceste cazuri se poate folosi următoarea teoremă ce are la bază tot criteriul PBH:

Teorema 3.3 *Un sistem invariant în timp este controlabil dacă şi numai dacă rangul matricei:*

$$\Phi_{PBH} = [\ sI - A \mid B] \tag{3.16}$$

este egal cu $n = dim(A)$, pentru toate valorile complexe s. [Ly, 2003].

Dacă se studiază relaţia (3.16) se poate observa că rangul matricei se modifică numai pentru acele valori $s = \lambda_i$, $i = 1 \dots n$, adică pentru valorile proprii ale matricei A, deoarece

[3] După numele celor trei cercetători care au ajuns la acelaşi rezultat [Ly, 2003].

în aceste cazuri $rang[sI - A] < n$. Pentru alte valori $s \neq \lambda_i$ rezultă $det(sI - A) \neq 0$ şi condiţia (3.16) este îndeplinită.

Observaţia 3.4

In cazul în care sistemul nu este controlabil, prin Teorema 3.3 este posibilă determinarea valorilor proprii ale matricei A care determină modurile necontrolabile ale sistemului. Pentru determinarea acestor valori se verifică condiţia (3.16) pentru toate valorile $s = \lambda_i$, unde $\lambda_i \in \lambda(A)$.

$\boxed{\text{Ex. 3.10}}$ Se consideră tot sistemul din (3.11), pentru care se determină valorile proprii ale matricei A, $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = -1$. Se încearcă determinarea unui vector w care satisface cea de-a doua parte a condiţiei (3.14). Astfel:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

de unde rezultă $w_1 - w_2 = 0$. Se consideră $w_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ şi rezultă $w_2 = a$. Se aplică criteriul PBH:

Pentru $\lambda_1 = 0$,

- se verifică Teorema 3.2:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}}_{w^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}}_{w^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{0}_{\lambda_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}}_{w^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Cum ambele condiţii sunt verificate rezultă că sistemul nu este controlabil, mai mult, modul determinat de $\lambda_1 = 0$ nu este controlabil.

- sau rangul matricei:

$$\Phi_{PBH} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

  este egal cu 1 deci modul determinat de $\lambda_1 = 0$ nu este controlabil şi în consecinţă sistemul nu este controlabil.

Pentru $\lambda_2 = -1$,

- se verifică Teorema 3.2:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}}_{w^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}}_{w^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \underbrace{-1}_{\lambda_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}}_{w^T} = \begin{bmatrix} -a & -a \end{bmatrix}$$

  Deoarece cea de-a doua condiţie nu este verificată pentru nici un vector $w' = [a, \ -a]$, $a \in \mathbb{R}$, rezultă că modul determinat de $\lambda_2 = -1$ este controlabil.

- se verifică şi rangul matricei:

$$\Phi_{PBH} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

  care este egal cu 2, deci modul determinat de $\lambda_2 = -1$ este controlabil.

In concluzie se poate spune că sistemul nu este controlabil, mai mult, acesta prezintă un mod controlabil ($e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$) şi unul necontrolabil ($e^{\lambda_1 t} = 1$).

$\boxed{\text{Ex. 3.11}}$ Fie sistemul [Ly, 2003] descris prin:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.17}$$

Să i se verifice controlabilitatea şi, dacă este cazul, să i se determine modurile necontrolabile.

- Metoda de verificare bazată pe examinarea grammianului:

  Ştiind că:

  $$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  şi că $s = t_1 - t_0$,

  $$W(0, t_1 - t_0) = \int_0^{t_1 - t_0} e^{As} B B^T e^{A^T s} ds$$

  $$W(0, t_1 - t_0) = \int_0^{t_1 - t_0} \begin{bmatrix} e^{-2s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} (1 - e^{-2(t_1 - t_0)})/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Determinantul matricei $W(0, t_1 - t_0)$ este egal cu 0, deci matricea nu este inversabilă şi în concluzie sistemul nu este complet controlabil.

  De asemenea deoarece $n - rang[W(0, t_1 - t_0)] = 2 - 1 = 1$, rezultă că sistemul are o stare necontrolabilă şi una controlabilă, dar încă nu se cunosc valorile lor.

- Matricea de controlabilitate:

  $$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Rangul matricei Φ_c este $1 < 2$, deci aşa după cum era de aşteptat sistemul este necontrolabil. Din nou se poate afirma că sistemul are o stare controlabilă şi una necontrolabilă dar acestea nu se cunosc.

- Se aplică criteriul PHB. Valorile proprii ale matricei A sunt: $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = -1$. Pentru fiecare valoare $s = \lambda_i$, $i = 1, 2$, se aplică criteriul PBH:

  – $\lambda_1 = 0$, se calculează rangul matricei $\Phi_{PBH} = [\lambda_1 I - A \ \ B]$:

  $$Rang\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1$$

  deci modul determinat de $\lambda_1 = 0$ nu este controlabil.

  – $\lambda_1 = -1$, se calculează rangul matricei $\Phi_{PBH} = [\lambda_2 I - A \ \ B]$:

  $$Rang\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$$

  rezultă că modul determinat de $\lambda_2 = -1$ este controlabil.

- Se poate verifica şi condiţia $|W| \neq 0$, unde $W = \Phi_c \Phi_c^T$:

  $$|W| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \textit{sistem necontrolabil.}$$

1.4 Descompunerea sistemelor în partea controlabilă şi în partea necontrolabilă. Descompunerea modală a sistemelor

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor prin matricele (A, B, C). Controlabilitatea fiind o proprietate intrinsecă a sistemului, ea se păstrează pentru orice realizare sistemică echivalentă a sistemului dat.

Definiţia 3.2 *Două sisteme (A, B, C) şi $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ sunt* ***echivalente pe stare*** *dacă există o matrice pătratică nesingulară P astfel încât:*

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \quad \tilde{B} = P^{-1}B, \quad \tilde{C} = CP. \tag{3.18}$$

Observaţia 3.5

Definiţia de mai sus exprimă de fapt o transformare de stare $\tilde{x} = Px$.

Nota 3.3

Echivalenţa între două sisteme este simbolizată astfel: $(A, B, C) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ [Ionescu, 1985].

Teorema 3.4 *Pentru un sistem descris prin:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

şi pentru care matricea de controlabilitate,

$$\Phi_c = [B,\ AB,\ A^2B, \ldots,\ A^{n-1}B]$$

are rangul egal cu $n_1 \leq n$, există o matrice de transformare nesingulară $P_{n\times n}$ astfel încât:

$$\begin{gathered} \tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{C} = CP = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D \end{gathered} \tag{3.19}$$

unde $[\tilde{A}_{11}]_{n_1\times n_1}$ şi $[\tilde{B}_1]_{n_1\times m}$, astfel încât

$$rang(\tilde{\Phi}_c) = rang[\tilde{B}_1,\ \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1,\ \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1,\ \ldots, \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}] = n_1.$$

Observaţia 3.6

Dacă un sistem este descris sub forma (3.19), verificarea controlabilităţii se reduce doar la calcularea rangului matricei determinate de elementele $\tilde{A}_{11}$ şi $\tilde{B}_1$.

In plus printr-o astfel de descompunere a sistemului iniţial, acesta a fost împărţit în partea controlabilă, definită de matricele $\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1$ şi în partea necontrolabilă, definită de matricea $\tilde{A}_{22}$.

Ca şi rezultat direct al acestei descompuneri se va observa în exemplele următoare că în matricea de transfer a sistemului vor apărea numai elementele controlabile ale reprezentării sistemului.

Dacă se studiază matricele din (3.19) se observă uşor că componenta sistemului definită de matricea $\tilde{A}_{22}$ determină partea necontrolabilă a sistemului, deoarece aceasta nu este influenţată de nici o comandă din matricea $\tilde{B}$.

Următoarea teoremă este utilă în analiza structurală a sistemelor, ţinând cont de forma (3.19) de reprezentare a sistemelor:

Teorema 3.5 *Descrierea sistemului prin matricele (A, B, C, D) este echivalentă pe stare cu descrierea prin matricele $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, la care perechea $(\tilde{A}, \tilde{B})$ are forma din (3.19) şi $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ reprezintă partea controlabilă a sistemului iniţial.*

In urma unei astfel de transformări în reprezentarea sistemului, ţinând cont şi de cele menţionate anterior, se pot trage următoarele concluzii:

1. Stările sistemului $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ pot fi împărţite în două categorii:

   - $[\tilde{x}_c]$ de dimensiune $n_1 = rang(\Phi_c)$ corespunzătoare stărilor controlabile, $\tilde{x}_c \in \mathcal{X}_c$, unde cu $\mathcal{X}_c$ s-a notat subspaţiul controlabil al sistemului;
   - $[\tilde{x}_{\bar{c}}]$ de dimensiune $(n - n_1)$, corespunzătoare stărilor necontrolabile, $\tilde{x}_{\bar{c}} \in \bar{\mathcal{X}}_c$, unde cu $\bar{\mathcal{X}}_c$ s-a notat subspaţiul necontrolabil al sistemului;.

   Aceste stări se obţin prin aplicarea matricei de transformare P asupra vectorului de stare al sistemului (A, B, C, D):

$$x = P \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = P^{-1}x.$$

   Mai mult, $\{x\} = \{\tilde{x}_c\} + \{\tilde{x}_{\bar{c}}\}$.

2. Matricea de transformare P conţine atât bazele subspaţiului controlabil $\mathcal{X}_c$ (partea controlabilă) al sistemului cât şi a subspaţiului necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$ (partea necontrolabilă) al sistemului. Această observaţie este deosebit de utilă în verificarea posibilităţii aducerii sistemului într-o stare oarecare dorită. Cu alte cuvinte dacă se cunoaşte matricea P se poate verifica dacă starea finală dorită poate fi atinsă sau nu.

Aşa după cum s-a prezentat, pentru a ajunge la o reprezentare a sistemului (3.19) este nevoie de o matrice de transformare P. O soluţie simplă există dacă matricea de stare a sistemului prezintă valori proprii diferite. Dacă această condiţie este îndeplinită şi matricea $A_{n\times n}$ prezintă valorile proprii λ_i, $i = 1, \ldots, n$, o matrice de transformare este alcătuită din vectorii proprii echivalenţi w_i^T:

$$P = [w_i]_{n\times n}. \tag{3.20}$$

In plus în aceste condiţii, $P^{-1}AP = \Lambda$, unde

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

este o matrice ce conţine pe diagonala principală valorile proprii ale matricei A. Matricea Λ poartă denumirea de forma canonică diagonală a matricei A.

Sistemul echivalent devine:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \Lambda\tilde{x} + \tilde{B}u \\ \tilde{y} &= \tilde{C}\tilde{x} \end{aligned} \tag{3.21}$$

unde $\tilde{B}_{n\times m}$ şi $\tilde{C}_{p\times n}$.

Nota 3.4

Reprezentarea sistemului sub forma 3.21 poartă denumirea de ***forma canonică diagonală*** *a sistemului.*

Pe baza acestei noi reprezentări a sistemului se poate utiliza o nouă metodă pentru analiza controlabilităţii unui sistem:

Teorema 3.6 *Un sistem reprezentat prin matricele (A, B), pentru care matricea A prezintă valori proprii distincte, este complet controlabil dacă şi numai dacă toatele liniile matricei $\tilde{B} = P^{-1}B$ sunt nenule, unde P este o matrice ce conţine pe diagonala principală vectori proprii ai matricei A.*

Observaţia 3.7

Acest criteriu de analiză a controlabilităţii unui sistem este valabil numai când matricea de stare A prezintă valori proprii ***distincte****.*

Dacă matricea $\tilde{B}$ prezintă pe o linie toate elementele zero, starea $s = \lambda$ corespunzătoare liniei respective din matricea Λ, nu este controlabilă. Acest lucru se explică prin faptul că starea respectivă nu este cuplată cu nici o comandă.

Ex. 3.12 Fie sistemul descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 0$ şi $\lambda_4 = -2$. Toate valorile proprii sunt diferite, deci se poate aplica metoda de descompunere prezentată.

Matricea de transformare este formată din vectorii proprii corespunzători valorilor proprii calculate:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -10 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

In urma utilizării matricei de transformare, rezultă sistemul echivalent descris prin matricele $\Lambda = P^{-1}AP$, $\tilde{B} = P^{-1}B$ şi $\tilde{C} = CP$:

$$\dot{\tilde{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\Lambda} \tilde{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u$$

$$\tilde{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}}$$

Se poate observa că matricea $\tilde{B}$ are toate liniile nenule, deci toate stările $s = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, 4$ sunt controlabile. Astfel sistemul este complet controlabil. Rezultă că matricea de controlabilitate trebuie să posede rangul maxim posibil, adică egal cu 4:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 & -54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

Se observă că $rang(\Phi_c) = 4$ deci condiţia este verificată.

Se mai poate afirma că pentru acest sistem orice stare finală poate fi atinsă într-un timp finit, neexistând limitări în acest sens din punct de vedere al controlabilităţii sistemului, din moment ce toate stările acestuia sunt controlabile.

Din cele prezentate anterior, se ridică o întrebare referitoare la stările sistemului: cum se poate determina dacă o anumită stare a sistemului poate fi atinsă sau nu? Răspunsul este simplu: dacă starea respectivă este inclusă complet în subspaţiul controlabil al sistemului atunci ea poate fi atinsă. Dacă însă ea nu este complet inclusă în subspaţiul controlabil, are unele componente în subspaţiul necontrolabil, atunci ea nu poate fi atinsă.

In analiza structurală a unui sistem cunoaşterea subspaţiului controlabil $\mathcal{X}_c$ şi, dacă este cazul, a celui necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$ este foarte importantă, deoarece astfel se pot obţine informaţii utile privind stările ce pot fi sau nu influenţate prin comandă. In acest sens următoare teoremă este deosebit de utilă:

$\boxed{\text{Teorema 3.7}}$ *Pentru sistemul descris prin matricele (A, B) cu matricea de controlabilitate Φ_c, fie subspaţiul complet controlabil $\mathcal{X}_c$ definit ca şi domeniul matricei Φ_c şi subspaţiul necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$ definit ca şi subspaţiul nul al matricei Φ_c^T, atunci cele două subspaţii sunt* *complementare,* $\mathcal{R}ange(\Phi_c) \perp \mathcal{K}er(\Phi_c^T)$ *şi împreună formează spaţiul vectorilor de stare* $\mathcal{X}$*, adică* $\mathcal{R}ange(\Phi_c) \oplus \mathcal{K}er(\Phi_c^T) \equiv \mathcal{X}$.

Din Teorema 3.7, pentru un sistem descris prin matricele (A, B), cu rangul matricei de controlabilitate Φ_c egal cu n_1 se pot trage următoarele concluzii:

- Subspaţiul controlabil al sistemului $\mathcal{X}_c$ este determinat de un număr n_1 de p_i^1, $i = 1, 2, \ldots n_1$ coloane liniar independente ale matricei Φ_c. Astfel un vector de stare controlabil x trebuie să fie inclus complet în subspaţiul $\mathcal{X}_c$. Matematic acest lucru este echivalent cu necesitatea ca vectorul x să fie o combinaţie liniară a celor n_1 coloane ce determină subspaţiul $\mathcal{X}_c$:

  $$x = \alpha_1 p_1^1 + \alpha_2 p_2^1 + \ldots + \alpha_i p_{n_1}^1, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots n_1$$

  O modalitate de a determina dacă un vector x este controlabil este prin verificarea rangului matricei:

  $$\left[\begin{array}{ccccc} p_1^1 & p_2^1 & \ldots & p_{n_1}^1 & x \end{array}\right]$$

  Dacă matricea are rangul egal cu n_1 atunci vectorul x este controlabil, deoarece rangul matricei nu se modifică prin adăugarea de noi vectori coloană care sunt deja combinaţii liniare ale coloanelor p_i^1, $i = 1, 2, \ldots n_1$. Intuitiv se poate anticipa că în cazul în care acest rang este mai mare decât n_1 vectorul nu este controlabil.

- Subspaţiul necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$ al sistemului este determinat de un număr $(n - n_1)$ de linii p_i^2, $i = 1, 2, \ldots, (n - n_1)$ liniar independente ale matricei Φ_c^T. Un vector de stare x este necontrolabil dacă conţine elemente nenule situate în subspaţiul necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$.

  Dacă matricea:

  $$\left[\begin{array}{ccccc} p_1^2 & p_2^2 & \ldots & p_{n_1}^2 & x \end{array}\right]$$

  are rangul mai mare decât n_1 atunci vectorul nu este controlabil, deoarece vectorul x este liniar independent de coloanele p_i^2, $i = 1, 2, \ldots n_1$ el conţinând şi elemente *nenule* din subspaţiul necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$.

  O altă modalitate de verificare este prin utilizarea matricei de transformare $P = \left[p_i^1, p_j^2\right]$, $i = 1, 2, \ldots n_1$, $j = 1, 2, \ldots (n - n_1)$. Se determină:

  $$x = P \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{array}\right] = P^{-1} x$$

  şi dacă $\tilde{x}_{\bar{c}}$ este *nenul*, atunci vectorul de stare x este necontrolabil.

Astfel pentru determinarea subspaţiilor controlabile şi necontrolabile ale unui sistem descris prin matricele (A, B) se urmăresc etapele:

- Se calculează matricea de controlabilitate Φ_c a sistemului;
- Se calculează rangul n_1 al matricei de controlabilitate Φ_c;

- Se determină o matrice $[P_1]_{n\times n_1}$ formată din n_1 coloane liniar independente ale matricei de controlabilitate Φ_c a sistemului, adică $P_1 = \mathcal{R}ange(\Phi_c)$. Coloanele matricei $[P_1]$ formează o bază pentru subspaţiul controlabil $\mathcal{X}_c$ al sistemului;

- Se determină o matrice de completare $[P_2]_{n\times(n-n_1)}$ formată din $n - n_1$ vectori x, pentru care $\Phi_c^T x = 0$, adică $P_2 = \mathcal{K}er(\Phi_c^T)$. Coloanele matricei $[P_2]$ formează o bază pentru subspaţiul necontrolabil $\bar{\mathcal{X}}_c$ al sistemului.

In urma parcurgerii etapelor anterioare se obţine şi matricea de transformare $P = [P_1, P_2]$, prin care sistemului iniţial poate fi reprezentat sub forma (3.19).

Observaţia 3.8

Utilizarea metodei prezentate anterior pentru determinarea matricei de transformare P a sistemului este foarte utilă îndeosebi când matricea A a sistemului nu posedă valori proprii distincte.

Ex. 3.13 Fie sistemul descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se determină matricea de controlabilitate:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -6 & 3 & 18 & -3 & -54 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este egal cu 3, deci sistemul nu este controlabil.

Valorile proprii ale matricei A sunt $[-3, -1, -1, -1]$.

Matricea P_1, de dimensiune 4×3 se poate scrie cu trei coloane liniar independente din matricea Φ_c:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matricea P_2 de dimensiune 4×1 se poate scrie în funcţie de un vector $x = [0, 0, -1, 1]^T$ care verifică ecuaţia $\Phi_c^T x = 0$:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Astfel matricea de transformare este:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Prin utilizarea matricei de transformare astfel determinate se calculează matricele:

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = P^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = CP = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D} = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şi se identifică uşor matricele:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{22} = [-1]$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifică controlabilitatea perechii (A_{11}, B_1):

$$rang\tilde{\Phi}_c = rang \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 13 \end{bmatrix} = 3,$$

deci este controlabilă.

In noua formă, stările controlabile ale sistemului sunt $\tilde{x}_c = [x_1, x_2, x_3]^T$ iar starea necontrolabilă este $\tilde{x}_{\bar{c}} = [x_4]$.

Matricea de transfer a aistemului iniţial, definit de matricele (A, B, C), este:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix},$$

iar matricea de transfer determinată de matricele $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$:

$$\tilde{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Cum cele două matrice de transfer sunt similare, se poate concluziona că matricea de transfer a sistemului iniţial este egală cu matricea de transfer a părţii controlabile, iar partea necontrolabilă nu mai apare în matricea de transfer iniţială, deşi ea există în reprezentarea structurală a sistemului. Deci, în matricea de transfer a unui sistem intervine numai partea controlabilă (şi se va observa ulterior că şi cea observabilă) a sistemului.

Poate fi adus sistemul din starea iniţială $x_0(t_0) = 0$ în starea finală $x_f(t_f) = [0, 1, 0, 0]$?

Pentru a răspunde la această întrebare se verifică dacă această stare este inclusă complet în subspaţiul controlabil al sistemului.

Starea finală se poate scrie în funcţie de matricea de transformare P a realizării sistemice de controlabilitate astfel:

$$x_f = P \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = Pz$$

Se determină:

$$z = P^{-1}x_f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cum componenta controlabilă $\tilde{x}_c = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right]^T$ este inclusă în subspaţiul controlabil (există trei valori scalare α_i a.î. $\alpha_1 p_1^1 + \alpha_2 p_2^1 + \alpha_3 p_3^1 = \tilde{x}_c$) şi cum nu există nici o componentă nenulă $\tilde{x}_{\bar{c}} = [0]$ în subspaţiul necontrolabil, rezultă că această stare finală poate fi atinsă într-un interval limitat de timp.

Dar în cazul în care $x_f(t_f) = [2, 1, 4, 0]$?

Se determină:

$$z = P^{-1}x_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{17}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Se observă că componenta controlabilă $\tilde{x}_c = \left[\frac{1}{2}, \frac{17}{8}, \frac{5}{8}\right]^T$ este inclusă în subspaţiul controlabil dar că există o componentă nenulă $\tilde{x}_{\bar{c}} = [-2]$ în subspaţiul necontrolabil, deci această stare finală nu poate fi atinsă.

Este de reţinut că prin transformarea stării finale x_f a sistemului iniţial în starea corespunzătoare realizării sistemice de controlabilitate se poate evalua mult mai uşor dacă această stare poate fi atinsă sau nu. Acest lucru este adesea imposibil de observat din descrierea iniţială a sistemului.

1.5 Controlabilitatea pe ieşire şi controlabilitatea funcţională

Metodele prezentate anterior permit determinarea proprietăţii de controlabilitate a unui sistem, şi a stărilor care o implică pornind de la matricele A şi B. Astfel prin Definiţia 3.1 se verifică proprietatea de controlabilitate urmărindu-se atingerea unei stări dorite[4].

O altă cerintă impusă sistemelor de control este ca prin manipularea unor comenzi adecvate, ieşirea sistemului să poată fi adusă într-un timp finit nenul la orice valori dorite[5]. Acestă proprietate poartă denumirea de *controlabilitate pe ieşire*.

$\boxed{\text{Definiţia 3.3}}$ *Un sistem (S) este **controlabil pe ieşire** dacă, urmărindu-se o ieşire $y(t)$ pentru $t > t_0$, există o intrare $u(t)$ care generează ieşirea $y(t)$ pornind din orice stare iniţială $y(t_0)$într-un timp finit nenul.*

[4]De aici şi denumirea de controlabilitate pe stare.

[5]Aceste valori sunt totuşi limitate de funcţionalitatea sistemului.

Această abordare a controlabilităţii unui sistem este privită din punctul de vedere al influenţei intrării asupra ieşirii, spre deosebire de controlabilitatea anterioară care era studiată urmărindu-se influenţa intrării asupra stărilor sistemului.

Teorema 3.8 *Un sistem dinamic descris prin tripletul (A, B, C), de ordinul n şi vectorul de ieşire y de dimensiune p este controlabil pe ieşire dacă şi numai dacă rangul matricei:*

$$\Phi_{io} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix}_{p \times mn} \tag{3.22}$$

este egal cu p [Dragomir şi Preitl, 1979].

Observaţia 3.9

Controlabilitatea pe ieşire se examinează în funcţie de matricele (A, B, C), spre deosebire de controlabilitatea pe stare care depinde numai de matricele (A, B).

Deoarece matricele (A, B, C) determină şi matricea de transfer a sistemului, controlabilitatea pe ieşire mai poartă şi denumirea de controlabilitate intrare-ieşire.

Ex. 3.14 Se consideră sistemul:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{3.23}$$

Se calculează:

$$\Phi_{io} = [\ CB \quad CAB \quad CA^2 \quad CA^3B\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este $2 = p$, deci sistemul este controlabil pe ieşire.

O condiţie suficientă pentru ca un sistem să fie controlabil pe ieşire este ca ieşirea (ieşirile) acestuia să depindă numai de stările controlabile ale sistemului [Dragomir şi Preitl, 1979].

Ex. 3.15 Se consideră sistemul descris prin ecuaţiile:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$ şi $\lambda_3 = -3$. Acestor valori proprii le corespund vectorii proprii $w_1 = [1, 0, 1]^T$, $w_2 = [-1, 1, 0]^T$ respectiv $w_3 = [2, 1, 1]^T$.

Pe baza unei matrice de transformare $P = [w_1, w_2, w_3]$ sistemul iniţial devine:

$$\Lambda = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CP = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observă că matricea $\tilde{B}$ are pe prima linie toate elementele zero, deci modul determinat de $\lambda_1 = -1$ din matricea Λ este necontrolabil. De asemenea rezultă că starea x_1 nu este controlabilă. Folosind criteriul PBH pentru $\lambda_1 = -1$ se verifică faptul că matricea

$$\Phi_{PBH}|_{s=-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

are rangul egal cu $2 < 3$, deci într-adevăr modul determinat de $\lambda_1 = -1$ este necontrolabil.

Deoarece din matricea $\tilde{C}$ se observă că ieşirea sistemului depinde de starea necontrolabilă x_1, sistemul ar trebui să nu fie controlabil pe ieşire. Se verifica rangul matricei:

$$\Phi_{io} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

care este egal cu $1 < p = 2$, deci aşa după cum era de aşteptat sistemul nu este controlabil pe ieşire.

Controlabilitatea pe ieşire este o cerinţă care presupune ca ieşirea sistemului să fie la valoarea dorită la fiecare *moment de timp* [Bosgra et al., 2003]. O altă cerinţă mult mai importantă este ca ieşirea să urmărească o valoare dorită, predefinită, pentru un *interval de timp*[6]. Această cerinţa este justificată prin faptul că, dacă un sistem este controlabil pe stare şi în consecinţă poate atinge orice stare într-un interval finit de timp, nu implică imediat că această stare poate fi şi menţinută pentru un anumit interval de timp. Proprietatea care asigură cerinţa de mai sus poartă numele de *controlabilitate pe ieşire funcţională* sau simplu *controlabilitate funcţională*.

Conceptul de controlabilitate funcţională a fost introdus de Rosenbrock [Rosenbrock, 1970] şi prin acesta se evaluează proprietatea unui sistem de a urmări atingerea unei ieşiri dorite pe durata unui interval de timp.

Controlabilitatea pe stare mai este denumită **controlabilitate p.s**[7], sau aici simplu controlabilitate, iar controlabilitatea funcţională mai poartă denumirea de **controlabilitate f**[8] [Patel şi Munro, 1982].

Un sistem este controlabil funcţional dacă rangul matricei de transfer este egal cu numărul de ieşiri ale sistemului (numărul de linii ale matricei de transfer) [Bosgra et al., 2003].

In funcţie de numărul de intrări şi de ieşiri ale sistemului se pot distinge mai multe cazuri:

1. Când $m = p$, sistemul este controlabil funcţional dacă matricea de transfer $H(s)$ a acestuia este nesingulară, adică îndeplineşte condiţia $|H(s)| \not\equiv 0$.

[6] Cerinţă necesară de exemplu la sistemele de urmărire a referinţei.
[7] Acronim de la *pointwise - state*.
[8] Acronim de la *functionally*.

2. Dacă un sistem are mai multe ieşiri decât intrări, adică $p > m$, el nu este controlabil funcţional.

3. Dacă un sistem are mai multe intrări decât ieşiri, $m > p$, sistemul este controlabil funcţional dacă şi numai dacă există cel puţin un minor $H_i(s)_{p\times p}$ din $H(s)$, astfel încât $|H_i(s)| \neq 0$. Această condiţie este echivalentă cu $rang[H(s)] = p$.

Nota 3.5

Controlabilitatea p.s nu implică controlabilitatea funcţională şi invers [Patel şi Munro, 1982].

Deşi adesea se afirmă ideea că controlabilitatea funcţională este dependentă de stările necontrolabile ale sistemului, **controlabilitatea p.s** nu implică **controlabilitatea f** şi invers. Acest lucru a fost demonstrat de [Patel şi Munro, 1982].

$\boxed{\text{Ex. 3.16}}$ Se consideră sistemul descris prin ecuaţiile (3.23). Se determină matricea de transfer a acestuia:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Pentru a examina controlabilitatea funcţională se calculează determinantul:

$$|H(s)| = -\frac{s-1}{(s+1)^2(s+3)}.$$

Deci sistemul este controlabil funcţional. Se examinează şi controlabilitatea p.s:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -6 & 3 & 18 & -3 & -54 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei $\Phi_c = 3 < 4$ şi în consecinţă sistemul nu este controlabil. Se poate verifica că modul determinat de $\lambda = -1$ este necontrolabil.

Verificarea proprietăţii de controlabilitate a unui sistem se face urmărind paşii prezentaţi în Tabelul 3.1.

Tabelul 3.1: Algoritmul de verificare a proprietăţii de controlabilitate pentru un sistem liniar invariant în timp.

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor prin matricele (A, B, C, D).

Se cere să se studieze controlabilitatea acestui sistem, şi dacă este cazul să i se determine stările necontrolabile.

Pasul 1: Se calculează matricea de controlabilitate.

Pasul 2: Dacă rangul matricei de controlabilitate este egal cu $dim(A)$,

atunci

sistemul este complet controlabil.

altminteri

sistemul nu este controlabil.

Pasul 3: Dacă sistemul nu este controlabil:

Pasul 3.1: Se calculează valorile proprii λ_i ale matricei A, unde $i = 1 \dots dim(A)$.

Pasul 3.2: Se aplică pentru fiecare valoare $s = \lambda_i$ testul PBH pentru determinarea modurilor necontrolabile, prin utilizarea relaţiilor (3.14) sau (3.15).

Pasul 3.3: Se determină subspaţiile de controlabilitate $\mathcal{X}_c$ şi de necontrolabilitate $\bar{\mathcal{X}}_c$.

Pasul 4: Se verifică controlabilitatea pe ieşire şi controlabilitatea funcţională.

2 Observabilitatea sistemelor liniare invariante în timp

Se cunoaşte deja că în cazul utilizării strategiilor de control bazate pe reacţia inversă este necesară şi cunoaşterea stărilor sistemului.

Dacă accesul la vectorul stărilor nu poate fi realizat, este necesară estimarea a ceea ce nu este măsurabil pe baza a ceea ce este măsurabil. Dar ce înseamnă că vectorul stărilor nu este măsurabil? Următorul exemplu clarifică acest aspect.

Ex. 3.17 Fie un sistem [Lewis, 2004a] descris în spaţiul stărilor prin ecuaţiile:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Soluţia în domeniul timp a sistemului pentru o intrare $u(t)$, $t \geq 0$ este dată de:

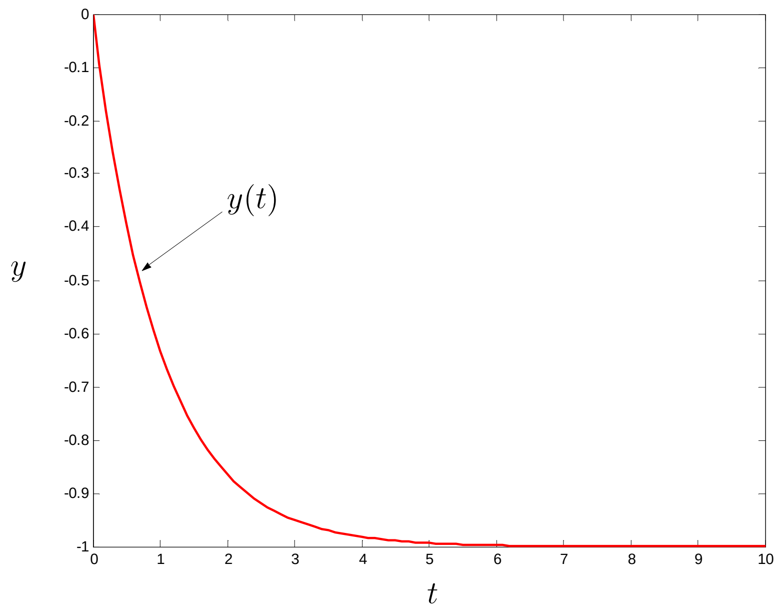


Figura 3.5: Variaţia ieşirii sistemului considerat.

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(t)d\tau$$

Pentru simplificarea calculelor se consideră intrarea sistemului ca fiind o treaptă unitară:

$$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$$

Dacă sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule $x(t_0) = x(0) = [0, 0]$, soluţia este:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - 1 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{bmatrix},$$

iar ieşirea este:

$$y(t) = Cx(t) = e^{-t} - 1,$$

şi evoluţia ei este prezentată în Figura 3.5.

Dar dacă se porneşte din condiţii iniţiale nenule, adică $x(0) = [k, k]$, $k \neq 0$, variaţiile în timp ale stărilor şi ieşirii sistemului sunt:

$$x(t) = \begin{bmatrix} ke^t - 1 + \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) \\ ke^t + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \end{bmatrix}, \quad y(t) = e^{-t} - 1$$

Se poate observa că modificarea stării iniţiale, deşi afectează variaţia stărilor ulterioare, efectul ei *nu este propagat* la ieşirea sistemului aşa după cum poate era de aşteptat. Altfel spus, modificarea stării iniţiale nu este observată la ieşirea sistemului, adică sistemul nu este observabil.

Se ridică o întrebare întru totul motivată privind capacitatea sistemului de a transmite modificarea stărilor sistemului la ieşirea acestuia.

Această proprietate a sistemului, urmărită şi dorită de proiectanţii sistemelor de control, poartă denumirea de *observabilitatea* sistemului.

Observabilitatea unui sistem implică posibilitatea determinării stărilor sistemului doar pe baza "istoriei", adică a evoluţiei în timp a intrărilor şi ieşirilor sistemului pe un interval de timp arbitrar, finit şi nenul. Cu alte cuvinte observabilitatea sistemului permite *observarea* stărilor interne ale acestuia doar prin urmărirea intrărilor şi ieşirilor aplicate sistemului. Ea este o caracteristică intrinsecă a sistemelor, este o proprietate structurală a acestora.

Din exemplu anterior se poate observa că elementele matricei C fac ca în calcularea ieşirii sistemului unele componente ale variaţiei stărilor să se anuleze. Pentru un sistem, "alegerea" semnalelor de ieşire este îngrădită de unele limitări constructive ale sistemului sau, în altele cazuri, de echipamentele de măsură disponibile, astfel încât nu este posibilă întotdeauna urmărirea tuturor stărilor sistemului. Dacă acest lucru nu este posibil trebuie verificat în ce măsură ieşirile urmărite surprind comportamentul stărilor sistemului.

Se va observa în continuare că intrările aplicate sistemului nu-i influenţează proprietatea de observabilitate.

Fie un sistem descris prin:

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.24}$$

unde x este un vector de dimensiune $n \times 1$ numit vectorul stărilor, u este un vector de dimensiune $m \times 1$ numit vectorul intrărilor, y este un vector de dimensiune $p \times 1$ numit vectorul ieşirilor, A este o matrice de dimensiune $n \times n$, B este o matrice de dimensiune $n \times m$, C este o matrice de dimensiune $p \times n$ iar D este o matrice de dimensiune $p \times m$.

Definiţia 3.4 *O stare $x(t_0)$ se numeşte **observabilă** pe un interval de timp oarecare finit şi nenul $[t_0, t_1]$, dacă ea poate fi unic determinată de intrările $u(t)$ şi $y(t)$ aplicate în intervalul $[t_0, t_1]$.*

Definiţia 3.5 *Un sistem (S) descris prin (3.24) este **observabil** dacă având la dispoziţie funcţiile vectoriale de intrare şi ieşire, $u(t)$ respectiv $y(t)$, definiţi pe intervalul $[t_0, t_1]$ este posibilă determinarea vectorului stării iniţiale $x_0 = x(t_0)$, $(\forall)$ $t_0 \neq t_1$, $t_0 < t_1$.*

Nota 3.6

*Un sistem este **complet observabil** dacă toate stările îi sunt observabile.*

*Un sistem este **total neobservabil** dacă toate stările îi sunt neobservabile.*

Observaţia 3.10

Dacă pentru un sistem definiţia observabilităţii nu este satisfăcută, sistemul este neobservabil, adică nu toate stările lui pot fi urmărite la ieşirea sistemului.

Neobservabilitatea implică existenţa cel puţin a unei stări ce nu poate fi urmărită la ieşirea sistemului.

O stare neobservabilă este o stare care nu poate fi cuplată cu ieşirea sistemului[9].

Definiţia 3.5 indică faptul că la momentul t_1 starea iniţială $x(t_0)$ poate fi determinată cunoscând evoluţiile în timp ale intrărilor şi ieşirilor sistemului în intervalul $[t_0, t_1]$. In plus ea numai verifică proprietatea de observabilitate, dar nu furnizează informaţii despre modul de determinarea a stărilor care o influenţează.

2.1 Grammianul de observabilitate

Teorema 3.9 *Sistemul liniar invariant în timp descris prin (3.24) este* ***complet observabil*** *dacă şi numai dacă matricea:*

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{(A^T(\tau - t_0))} C^T C e^{A(\tau - t_0)} d\tau \tag{3.25}$$

este inversabilă [Ly, 2003].

Dacă se notează $s = \tau - t_0$:

$$M(0, t_1 - t_0) = \int_{0}^{t_1 - t_0} e^{(A^T s)} C^T C e^{As} ds \tag{3.26}$$

Observaţia 3.11

După cum rezultă din (3.25) şi (3.26), observabilitatea sistemului S depinde numai de matricea de stare A şi de matricea de ieşire C.

Matricea M, este de dimensiune $n \times n$, este definită numai pe intervalul $[t_0, t_1]$, este simetrică şi pozitivă [Ly, 2003].

2.2 Matricea de observabilitate

Teorema 3.10 *Un sistem liniar invariant în timp de ordinul n este* ***complet observabil*** *în intervalul $[t_0, t_1]$ dacă şi numai dacă rangul matricei:*

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}_{np \times n} = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T_{np \times n} \tag{3.27}$$

este maxim, adică egal cu n.

[9] Modul concret în care se poate determina dacă o stare este cuplată cu ieşirea sistemului va fi explicat în paragrafele următoare.

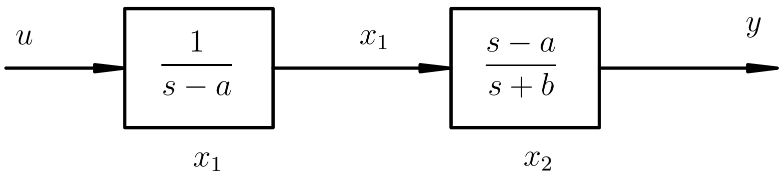


Figura 3.6: Un exemplu de sistem controlabil dar neobservabil.

Matricea Φ_o ataşată unui sistem provine din grammianul de observabilitate şi poartă numele de *matricea de observabilitate* a sistemului. Ea este de dimensiune $np \times n$ (prezintă mai multe linii decât coloane).

Observabilitatea unui sistem este influenţată numai de elementele matricei de stare A şi de cele ale matricei de ieşire C. Astfel un sistem neobservabil poate deveni observabil dacă se aleg corespunzător elementele matricei C, dar acest lucru nu este întotdeauna posibil[10].

Ex. 3.18 Fie sistemul descris prin diagrama bloc prezentată în Figura 3.6.
Se determină o reprezentare în spaţiul stărilor pentru sistem. Astfel pentru prima stare se scriu relaţiile:

$$sX_1(s) - aX_1(s) = U(s) \quad |\mathcal{L}^{-1}$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{du}{dt} + ax_1$$

sau

$$\dot{x}_1 = ax_1 + u$$

Pentru cea de-a doua stare se poate scrie $\frac{s-a}{s+b} = 1 + \frac{-a-b}{s+b}$, de unde dacă se consideră ieşirea $y - x_1$, rezultă:

$$sX_2(s) + bX_2(s) = -(a+b)X_1(s) \quad |\mathcal{L}^{-1}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -(a+b)\frac{dx_1}{dt} - bx_2$$

sau

$$\dot{x}_2 = -(a+b)x_1 - bx_2.$$

Pentru ecuaţia ieşirii sistemului se revine la transferul direct dintre x_1 şi y şi se poate scrie:

$$y = x_1 + x_2$$

Iar descrierea în spaţiul stărilor este:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -(a+b) & -b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] \cdot u$$

Pentru examinarea proprietăţilor de controlabilitatea şi observabilitate ale sistemului se determină matricele de controlabilitate Φ_c şi de observabilitate Φ_o:

[10]Din considerente de funcţionare, constructive sau economice.

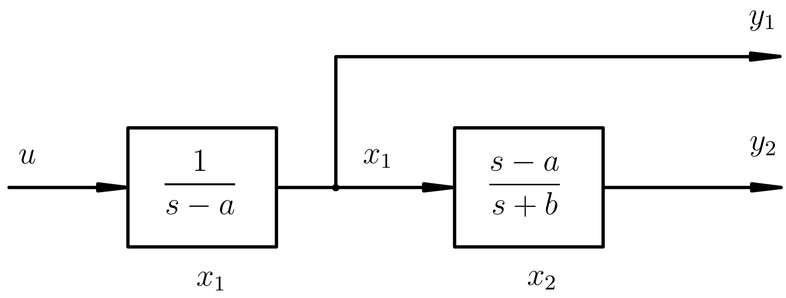


Figura 3.7: Sistem controlabil şi observabil, rezultat prin adăugarea unei noi ieşiri corespunzătoare primei stări.

$$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -a-b \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -b & -b \end{bmatrix}$$

Cum $rang(\Phi_c) = 2$ şi $rang(\Phi_o) = 1$ rezultă că sistemul este complet controlabil dar este neobservabil.

Din Figura 3.6 se poate observa intuitiv că starea x_1 nu este observabilă la ieşirea y a sistemului din cauza simplificării ce apare între elementele $s-a$ dintre cele două blocuri. Se va observa mai târziu că acest fenomen poartă numele de *decuplare* a polului $s = a$ corespunzător primei stări, cu zeroul $s = a$ corespunzător celei de-a doua stări.

O soluţie pentru transformarea sistemului neobservabil într-unul observabil este prin adăugarea unei noi ieşiri sistemului prin care să se surprindă evoluţia stării x_1, iar noul sistem este cel din Figura 3.7. In acest caz ieşirea sistemului este:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u,$$

iar matricea de observabilitate:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -b & -b \end{bmatrix}.$$

Cum rangul matricei de observabilitate este egal cu 2, sistemul rezultat este complet observabil.

Deşi soluţia pare simplă, acest lucru nu este întotdeauna posibil. Considerarea unei noi ieşiri presupune adăugarea unui nou senzor pentru starea x_1, senzor care poate fi destul de costisitor. Cu toate acestea însă, starea x_1 nu poate fi întotdeauna accesibilă pentru măsurare. In plus sistemul rezultat va fi de tip $MIMO$, deci de o complexitate mărită.

Dacă matricea Φ_o are rangul $r \neq n$, sistemul este neobservabil, iar diferenţa $n - r$ furnizează numărul de stări neobservabile. Ca şi efecte, aceste stări nu au nici o influenţă asupra ieşirilor sistemului, sau mai corect spus, dinamica lor nu este urmărită la ieşirea sistemului.

In cazul sistemelor $SISO$ când $p = 1$, condiţia de observabilitate implică ca determinantul matricei de observabilitate să fie nenul, $|\Phi_o| \neq 0$.

La sistemele $MIMO$, unde $p > 1$ trebuie verificat dacă matricea de observabilitate conţine n linii independente, operaţie care poate deveni dificilă dacă p este mare. Ca şi în cazul determinării proprietăţii de controlabilitate, este mai simplu să se determine rangul unei matrice pătratice.

Astfel se scrie matricea:

$$W = \Phi_o^T \Phi_o \tag{3.28}$$

Dacă această matrice pătratică de dimeniune $n \times n$ are $|W| \neq 0$ atunci sistemul este complet observabil [Lewis, 2004b].

$\boxed{\text{Ex. 3.19}}$ Să se studieze observabilitatea sistemului:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{3.29}$$

Prin utilizarea Grammianului de observabilitate, se calculează matricea:

$$\begin{aligned} M(0, t_1 - t_0) &= \int_0^{t_1 - t_0} e^{(A^T s)} C^T C e^{As} ds = 5 \int_0^{t_1 - t_0} \begin{bmatrix} e^{-6s} & e^{-6s} \\ e^{-6s} & e^{-6s} \end{bmatrix} ds = \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 - e^{(-6t_1 + 6t_0)} & 1 - e^{(-6t_1 + 6t_0)} \\ 1 - e^{(-6t_1 + 6t_0)} & 1 - e^{(-6t_1 + 6t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rangul matricei M este egal cu 1, deci sistemul este neobservabil. In plus, deoarece rangul maxim posibil este $n = 2$, rezultă că există $2 - 1 = 1$ stări neobservabile, dar ele nu se cunosc.

O altă metodă este prin utilizarea matricei de observabilitate:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

iar rangul ei este 1, deci sistemul este neobservabil. Şi aici se poate afirma că există o stare necontrolabilă, deoarece $n - 1 = 1$, dar aceasta nu poate fi încă determinată.

Dacă se calculează şi matricea $W = \Phi_o^T \Phi_o$:

$$W = \begin{bmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 50 \end{bmatrix}$$

al cărei determinant este egal cu 0, rezultă din nou că sistemul nu este observabil.

$\boxed{\text{Ex. 3.20}}$ Să se determine dacă următorul sistem, descris prin matricele A şi C, este observabil:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Matricea de observabilitate este:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix},$$

iar rangul ei este egal cu 3 deci sistemul este complet observabil. Efectul este că toate stările sistemului sunt urmărite la ieşirea acestuia.

2.3 Testul Popov-Belevitch-Hautus

Se dă un sistem descris prin matricele A şi C. O altă metodă de studiu a proprietăţii de observabilitate a unui sistem este testul Popov-Belevitch-Hautus (PBH) pentru observabilitate:

Teorema 3.11 *Un sistem liniar invariant în timp pentru care matricea A posedă valori proprii distincte, este* ***neobservabil*** *dacă şi numai dacă există un vector coloană w nenul astfel încât [Ly, 2003]:*

$$Aw = \lambda_i w \quad si \quad Cw = 0 \tag{3.31}$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A, $i = 1, \ldots, n$.

O altă formă a condiţiei (3.31) este:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} w = 0 \tag{3.32}$$

Teorema 3.11 permite verificarea proprietăţii de observabilitate şi în plus permite determinarea modurilor care implică această proprietate.

Si în acest caz se poate determina un astfel de vector w din cea de-a doua parte a ecuaţiei (3.31), după care acesta se verifică în prima parte a ecuaţiei.

De asemenea se poate observa din prima egalitate a relaţiei (3.31) că vectorul w este vector propriu pentru matricea A. Astfel o metodă simplă de verificare a condiţiei (3.31) este prin determinarea vectorilor proprii ai matricei A după care se verifică cea de-a doua egalitate a condiţiei (3.31).

Aceste operaţii pot deveni dificile dacă numărul stărilor sistemului este mare, dar marele avantaj al acestei metode faţă de celelalte este că prin utilizarea ei se pot determina valorile proprii cărora le corespund moduri observabile sau neobservabile.

Teorema 3.12 *Un sistem liniar invariant în timp este* ***complet observabil*** *dacă şi numai dacă rangul matricei:*

$$\Phi_{PHB} = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

este maxim adică egal cu $n = dim(A)$, pentru toate valorile complexe s.

Matricea Φ_{PHB} îşi pierde rangul pentru valori $s = \lambda_i$, $i = 1 \ldots n$ adică la valorile proprii ale matricei A, care vor da *moduri neobservabile.*

Ex. 3.21 Se consideră sistemul:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Se rezolvă cea de-a doua egalitate a condiţiei (3.31) şi rezultă un vector w de forma $w = [w_1, w_2, -w_1]^T$.

Pe de altă parte, matricea A poate fi scrisă în funcţie de valorile proprii $0, -1, 1$ şi de vectorii proprii sub forma:

$$A = V\Lambda V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & i & -i \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 - \dfrac{3}{2}i & -\dfrac{1}{2}i & \dfrac{1}{2} \\ -1 + \dfrac{3}{2}i & \dfrac{1}{2}i & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se poate observa că nici un vector propriu al matricei A (coloane din matricea V) nu satisface condiţia obţinută, $w = [w_1, w_2, -w_1]^T$. Deci condiţia de neobservabilitate (3.31) nu este satisfăcută, şi, în consecinţă, sistemul este complet observabil.

In plus pentru fiecare valoare proprie a matricei A se poate verifica condiţia (3.33). De exemplu pentru $\lambda_1 = 0$ va rezulta matricea:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este 3 deci $\lambda_1 = 0$ determină un mod observabil. La fel se poate verifica şi pentru celelalte valori proprii.

$\boxed{\text{Ex. 3.22}}$ Să se studieze observabilitatea sistemului:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Se calculează matricea de observabilitate:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este $1 < 2$, deci sistemul nu este complet observabil, în plus se poate spune că sistemul posedă o stare observabilă şi una neobservabilă.

Se utilizează testul PHB de observabilitate. Se determină valorile proprii şi vectorii proprii ale matricei A:

- valorile proprii sunt $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$;
- vectorii proprii sunt $w_1 = [1, 0]^T$, $w_2 = [0, 1]^T$.

Pentru ca sistemul să fie neobservabil este necesar ca un astfel de vector propriu w al matricei A să satisfacă condiţia $C \cdot w = 0$. Se poate observa imediat că vectorul $[0, 1]^T$ satisface această condiţie, deci sistemul este neobservabil, mai mult modul determinat de $\lambda_2 = 0$ nu este observabil.

Acest lucru se poate determina şi prin utilizarea Teoremei 3.12:

- $s = -1 \Rightarrow rang \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$, deci $\lambda_1 = -1$ determină un mod observabil;
- $s = 0 \Rightarrow rang \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$, deci $\lambda_2 = 0$ determină un mod neobservabil.

In concluzie se poate afirma că sistemul este neobservabil şi în plus posedă un mod neobservabil determinat de $\lambda_2 = 0$. Cum acest mod influenţează starea x_2, aceasta nu este cuplată cu nici-o ieşire a sistemului.

2.4 Descompunerea sistemelor în partea observabilă şi în partea neobservabilă

Aşa după cum s-a observat şi în secţiunea dedicată studiului controlabilităţii sistemelor, o proprietate structurală a unui sistem se păstrează şi în alte forme de reprezentare a acestuia. Observaţia este adevărată şi în cazul observabilităţii sistemelor.

$\boxed{\text{Teorema 3.13}}$ *Pentru un sistem descris prin:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

şi pentru care matricea de observabilitate

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

are rangul egal cu $n_1 < n$, există o matrice de transformare nesingulară $P_{n\times n}$ astfel încât sistemul iniţial poate fi scris sub forma:

$$\begin{gathered} \tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} = CP = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D} = D \end{gathered} \tag{3.35}$$

unde $[\tilde{A}_{11}]_{n_1\times n_1}$ şi $[\tilde{C}_1]_{p\times n_1}$, astfel încât:

$$rang(\tilde{\Phi}_o) = rang \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_1\tilde{A}_{11} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n_1.$$

Observaţia 3.12

Dacă un sistem este descris sub forma (3.35), verificarea observabilităţii se reduce doar la calcularea rangului matricei determinate de elementele $\tilde{A}_{11}$ şi $\tilde{C}_1$.

In plus printr-o astfel de descompunere a sistemului iniţial, acesta a fost împărţit în partea observabilă, definită de matricele $\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1$ şi în partea neobservabilă, definită de matricea $\tilde{A}_{22}$.

Ca şi rezultat direct al acestei descompuneri se va observa în exemplele următoare că în matricea de transfer a sistemului vor apărea numai elementele observabile ale reprezentării sistemului.

Dacă se studiază matricele din (3.35) se observă că componenta sistemului definită de matricea $\tilde{A}_{22}$ determină partea neobservabilă a sistemului, deoarece nu este legată de nici o componentă din matricea $\tilde{C}$.

Următoarea teoremă este utilă în analiza structurală a sistemelor, ţinând cont de forma (3.35) de reprezentare a sistemelor:

Teorema 3.14 *Descrierea sistemului prin matricele (A, B, C, D) este echivalentă cu descrierea prin matricele $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$, la care perechea $(\tilde{A}, \tilde{C})$ are forma din (3.35) şi $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$ reprezintă partea observabilă a sistemului iniţial.*

In urma unei astfel de transformări de reprezentare a sistemului se pot trage următoarele concluzii:

1. Stările iniţiale ale sistemului pot fi împărţite în două categorii:
   - $[\tilde{x}_o]$ de dimensiune $n_1 = rang(\Phi_o)$ corespunzătoare stărilor observabile, $\tilde{x}_o \in \mathcal{X}_o$, unde cu $\mathcal{X}_o$ s-a notat subspaţiul observabil al sistemului;
   - $[\tilde{x}_{\bar{o}}]$ de dimensiune $(n - n_1)$, corespunzătoare stărilor neobservabile, $\tilde{x}_{\bar{o}} \in \bar{\mathcal{X}}_o$, unde cu $\bar{\mathcal{X}}_o$ s-a notat subspaţiul neobservabil al sistemului.

   Aceste stări se obţin prin aplicarea matricei de transformare P:

$$x = P \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix}.$$

   In plus se poate scrie că $\{x\} = \{\tilde{x}_o\} + \tilde{x}_{\bar{o}}$.

2. Matricea de transformare P conţine atât bazele subspaţiului observabil $\mathcal{X}_o$ (partea observabilă) al sistemului cât şi a subspaţiului neobservabil $\bar{\mathcal{X}}_o$ (partea neobservabilă) al sistemului.

O matrice de transformare P poate fi obţinută prin utilizarea relaţiei (3.20), dacă matricea A posedă valori proprii distincte.

In aceste condiţii se poate utiliza următoarea teoremă:

Teorema 3.15 *Un sistem reprezentat prin matricele (A, C), pentru care matricea A prezintă valori proprii distincte, este complet observabil dacă şi numai dacă matricea $\tilde{C} = CP$ are toate coloanele nenule, unde P este o matrice ce conţine pe diagonala principală valorile proprii ale matricei A.*

Observaţia 3.13

Acest criteriu de analiză a observabilităţii unui sistem este valabil numai când matricea de stare A prezintă valori proprii ***distincte****.*

Dacă matricea $\tilde{C}$ prezintă pe o coloană toate elementele zero, starea $s = \lambda$ corespunzătoare coloanei respective din matricea $\Lambda = P^{-1}AP$, nu este observabilă. Acest lucru se explică prin faptul că starea respectivă nu este cuplată cu nici o ieşire a sistemului.

Ex. 3.23 Se observă că sistemul din Exemplul 3.22 anterior este reprezentat în forma canonică diagonală. Cum a doua coloană a matricei C are elementul 0, rezultă că starea $s = \lambda = 0$ din matricea A este necontrolabilă.

In analiza structurală a unui sistem cunoaşterea subspaţiului observabil şi, dacă este cazul, a celui neobservabil este foarte importantă, deoarece astfel se pot obţine informaţii utile privind stările ce pot fi sau nu estimate, în cazul în care se doreşte utilizarea unui estimator de stare [Filipescu şi Stamatescu, 2002]. Următoare teoremă este deosebit de utilă în atingerea acestui deziderat:

$\boxed{\text{Teorema 3.16}}$ *Pentru sistemul descris prin matricele (A, C) cu matricea de observabilitate Φ_o, fie subspaţiul complet observabil $\mathcal{X}_o$ definit ca şi domeniul matricei Φ_o^T şi subspaţiul neobservabil $\bar{\mathcal{X}}_o$ definit ca şi subspaţiul nul al matricei Φ_o, atunci cele două subspaţii sunt complementare, $\mathcal{R}ange(\Phi_o^T) \perp \mathcal{K}er(\Phi_o)$ şi împreună formează spaţiul vectorilor de stare $\mathcal{X}$, adică $\mathcal{R}ange(\Phi_o^T) \oplus \mathcal{K}er(\Phi_o) \equiv \mathcal{X}$ [Ly, 2003].*

Din Teorema 3.16, pentru un sistem descris prin matricele (A, C), cu rangul matricei de observabilitate Φ_o egal cu n_1 se pot trage următoarele concluzii:

- Subspaţiul observabil al sistemului $\mathcal{X}_o$ este determinat de un număr n_1 de p_i^1, $i = 1, 2, \ldots n_1$ coloane liniar independente ale matricei Φ_o^T. Astfel un vector de stare observabil x trebuie să fie inclus complet în subspaţiul $\mathcal{X}_o$. Matematic acest lucru este echivalent cu necesitatea ca vectorul x să fie o combinaţie liniară a celor n_1 coloane ce determină subspaţiul $\mathcal{X}_o$:

  $$x = \alpha_1 p_1^1 + \alpha_2 p_2^1 + \ldots + \alpha_i p_i^1, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, \ldots n_1$$

  O modalitate de a determina dacă un vector x este observabil este prin verificarea rangului matricei:

  $$\begin{bmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \ldots & p_{n_1}^1 & x \end{bmatrix}$$

  Dacă matricea are rangul egal cu n_1 atunci vectorul x este observabil, deoarece rangul matricei nu se modifică prin adăugarea de noi vectori coloană care sunt deja combinaţii liniare ale coloanelor p_i^1, $i = 1, 2, \ldots n_1$. Intuitiv se poate anticipa că în cazul în care acest rang este mai mare decât n_1 vectorul nu este observabil.

- Subspaţiul neobservabil $\bar{\mathcal{X}}_o$ al sistemului este determinat de un număr $(n - n_1)$ de linii p_i^2, $i = 1, 2, \ldots, (n - n_1)$ liniar independente ale matricei Φ_o. Un vector de stare x este neobservabil dacă conţine elemente situate în subspaţiul neobservabil $\bar{\mathcal{X}}_o$.

  O modalitate de a determina dacă un vector x este observabil este prin verificarea rangului matricei:

  $$\begin{bmatrix} p_1^2 & p_2^2 & \ldots & p_{n_1}^2 & x \end{bmatrix}$$

  Dacă matricea are rangul mai mare decât n_1 atunci vectorul nu este observabil, deoarece vectorul x este liniar independent de coloanele p_i^2, $i = 1, 2, \ldots n_1$ el conţinând şi elemente *nenule* din subspaţiul neobservabil $\bar{\mathcal{X}}_o$.

  O altă modalitate de a verifica este prin utilizarea matricei de transformare $P = \left[p_i^1, p_j^2\right]$, $i = 1, 2, \ldots n_1$, $j = 1, 2, \ldots (n - n_1)$. Se determină:

  $$x = P \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = P^{-1} x$$

  şi dacă $\bar{x}_o$ este *nenul*, atunci vectorul de stare x este neobservabil.

Astfel pentru determinarea subspaţiilor observabile şi neobservabile ale unui sistem descris prin matricele (A, C) se urmăresc etapele:

- Se determină matricea de observabilitate Φ_o a sistemului;
- Se calculează rangul n_1 al matricei de observabilitate Φ_o;
- Se construieşte o matrice $[P_1]_{n\times n_1}$ formată din n_1 coloane liniar independente ale matricei Φ_o^T, adică $P_1 = \mathcal{R}ange(\Phi_o^T)$. Coloanele matricei $[P_1]$ formează o bază pentru subspaţiul observabil $\mathcal{X}_o$ al sistemului;
- Se construieşte o matrice $[P_2]_{n\times(n-n_1)}$ cu vectori care satisfac ecuaţia $\Phi_o x = 0$, adică $P_2 = \mathcal{K}er(\Phi_o)$. Coloanele matricei $[P_2]$ formează o bază pentru subspaţiul neobservabil $\bar{\mathcal{X}}_o$ al sistemului.

In urma parcurgerii etapelor anterioare se obţine şi matricea de transformare $P = [P_1, P_2]$, prin care sistemului iniţial poate fi reprezentat sub forma (3.35).

Observaţia 3.14

Utilizarea metodei prezentate anterior pentru determinarea matricei de transformare P a sistemului este foarte utilă îndeosebi când matricea A a sistemului nu posedă valori proprii distincte.

Pentru a susţine cele menţionate se consideră următorul exemplu:

$\boxed{\text{Ex. 3.24}}$ Fie sistemul descris prin matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Matricea de observabilitate este:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

iar rangul ei este egal cu 1 deci sistemul nu este observabil. In plus rezultă că $dim(\mathcal{X}_0) = dim(\bar{\mathcal{X}}_0) = 1$.

O bază a subspaţiului $\mathcal{X}_0$ este formată dintr-o coloană a matricei Φ_o^T, care formează şi matricea P_1:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O bază a subspaţiului $\bar{\mathcal{X}}_0$ este formată dintr-un vector coloană x care satisface ecuaţia $\Phi_o x = 0$. Acesta va forma şi matricea P_2:

$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Astfel matricea de transformare P este:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin utilizarea matricei de transformare P, rezultă reprezentarea echivalentă a sistemului:

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \tilde{C} = CP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

unde se identifică matricele:

$$\tilde{A}_{11} = [-3]\,, \tilde{A}_{21} = [-4]\,, \tilde{A}_{22} = [-1]\,,$$
$$\tilde{B}_1 = [\begin{array}{cc} -1 & -1 \end{array}]\,, \tilde{B}_2 = [\begin{array}{cc} -2 & -3 \end{array}]\,,$$
$$\tilde{C}_1 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ -4 \end{array}\right], \tilde{C}_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

Se poate verifica că în matricea de transfer a sistemului intervine numai partea observabilă şi cotrolabilă a sistemului. Astfel se calculează matricea de transfer a sistemului determinată de matricele (A, B, C):

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \left[\begin{array}{cc} -\dfrac{2}{s+3} & -\dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{4}{s+3} & \dfrac{4}{s+3} \end{array}\right].$$

Iar matricea de transfer a sistemului determinată de matricele (A_{11}, B_1, C_1) este:

$$H(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1}B_1 = \left[\begin{array}{cc} -\dfrac{2}{s+3} & -\dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{4}{s+3} & \dfrac{4}{s+3} \end{array}\right].$$

Cum cele două matrice de transfer sunt egale, se poate concluziona că matricea de transfer a sistemului iniţial este egală cu matricea de transfer a părţii observabile a sistemului iar partea neobservabilă nu mai apare în matricea de transfer deşi ea există în reprezentarea structurală a sistemului.
In continuare se verifică dacă o stare oarecare a sistemnului este sau nu observabilă. Fie această stare $x = [3, 3]^T$. Se calculează:

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_{\bar{o}} \end{array}\right] = P^{-1}x = P^{-1}\left[\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}\right]$$

Cum $\tilde{x}_{\bar{o}} = 0$, rezultă că vectorul $x = [3, 3]^T$ poate fi observat la ieşirea sistemului.
Dar în cazul în care $x = [3, 4]^T$? In acest caz va rezulta:

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{x}_o \\ \tilde{x}_{\bar{o}} \end{array}\right] = P^{-1}x = P^{-1}\left[\begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{array}\right],$$

iar cum $\tilde{x}_{\bar{o}} = 1/2 \neq 0$ rezultă că starea $x = [3, 4]^T$ nu este observabilă, deoarece ea conţine un element nenul în subspaţiul neobservabil al sistemului.

Pentru analiza proprietăţii de observabilitate a unui sistem liniar invariant în timp, se urmăresc paşii prezentaţi în Tabelul 3.2.

3 Sisteme duale

Pentru un sistem descris prin matricele (A, B, C), sistemul descris prin matricele (A^T, C^T, B^T) se numeşte sistemul *echivalent*[11] sau *dual* al sistemului iniţial.
Astfel efectele intrărilor şi cele ale ieşirilor sunt schimbate între ele:

$$B \to C^T, \quad C \to B^T$$

[11]Proprietăţile sistemelor echivalente sunt utilizate de exemplu la construirea unor observatori de stare.

Tabelul 3.2: Algoritmul de verificare a proprietăţii de observabilitate pentru un sistem liniar invariant în timp.

Se dă un sistem în spaţiul stărilor prin matricele (A, C).

Se cere să se studieze observabilitatea sistemului, şi dacă este cazul i să se determine stările neobservabile.

Pasul 1: Se calculează matricea de observabilitate.

Pasul 2: Dacă rangul matricei de observabilitate este maxim, adică egal cu $dim(A)$,

atunci

sistemul este complet observabil.

altminteri

sistemul nu este observabil.

Pasul 3: Dacă sistemul nu este observabil:

Pasul 3.1: Se calculează valorile proprii λ_i ale matricei A, unde $i = 1 \ldots dim(A)$.

Pasul 3.2: Se aplică pentru fiecare valoare $s = \lambda_i$ testul PBH pentru determinarea stărilor neobservabile, prin utilizarea ecuaţiilor (3.31) sau (3.32).

Pasul 3.3: Se determină subspaţiile de observabilitate $\mathcal{X}_o$ şi de neobservabilitate $\bar{\mathcal{X}}_o$.

Intuitiv în urma acestor înlocuiri realizate între sistemul iniţial şi cel echivalent, există o relaţie de echivalenţă care se păstrează şi la nivelul controlabilităţii şi a observabilităţii sistemelor.

Pentru a verifica acest fapt se calculează transpusa matricei de controlabilitate pentru sistemul iniţial:

$$\Phi_c^T = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B^T \\ (AB)^T \\ \vdots \\ (A^{n-1}B)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = \Phi_o^e = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Se observă că pornind de la matricea de controlabilitate Φ_c a sistemului iniţial (A, B, C) se ajunge prin echivalenţă la matricea de observabilitate Φ_o^e a sistemului dual. Astfel se pot trage următoarele concluzii:

$\boxed{\text{Teorema 3.17}}$ *Un sistem (A, B, C) este complet controlabil dacă şi numai dacă sistemul echivalent acestuia (A^T, C^T, B^T) este complet observabil, şi invers.*

Pentru a verifica inversa teoremei, se pleacă de la matricea de observabilitate transpusă a sistemului iniţial:

$$\Phi_o^T = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \dots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1}\, C^T \end{bmatrix} =$$

$$= \Phi_c^e = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}\, B \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Ex. 3.25}}$ Se dă un sistem descris prin matricele (A, B, C) astfel:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sistemul echivalent al sistemului iniţial este definit de matricele (A^T, C^T, B^T) astfel:

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru sistemul iniţial matricele de controlabilitate şi de observabilitate sunt:

$$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Se observă că sistemul este complet controlabil şi observabil. Pentru sistemul echivalent se verifică matricele de controlabilitate şi de observabilitate:

$$\Phi_c^e = [\ C^T \quad A^T C^T\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o^e = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Se observă că aşa după cum era de aşteptat şi sistemul echivalent este complet observabil şi controlabil.

$\boxed{\text{Ex. 3.26}}$ Se consideră sistemul descris în spaţiul stărilor astfel:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x$$

Sistemul dual este:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x$$

Matricele de controlabilitate şi observabilitate ale sistemului iniţial sunt:

$$\Phi_c = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Deoarece $rang(\Phi_c) = 2$ şi $rang(\Phi_o) = 1$ sistemul este complet controlabil dar este neobservabil.

Pentru sistemul echivalent, matricele de controlabilitate şi de observabilitate sunt:

$$\Phi_c^e = [\ B \quad AB\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o^e = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Deoarece $rang(\Phi_c^e) = 1$ şi $rang(\Phi_o^e) = 2$ sistemul echivalent nu este controlabil dar este complet observabil.

4 Studiu de caz

Studiul de caz 3.1

Un sistem foarte cunoscut şi util pentru studiul metodelor specifice controlului automat este *pendulul invers*, vezi Figura 3.8. Acesta este alcătuit dintr-un cărucior mobil, prevăzut cu un pivot pe care este fixat un pendul (tijă) mobilă.

Căruciorul este acţionat de o forţă F de direcţie paralelă cu planul de rulare şi cu axa căruciorului dar de sens variabil, care va fi şi intrarea sistemului:

$$u = F(t) \tag{3.36}$$

Stările considerate pentru modelarea acestui sistem sunt legate de poziţia căruciorului $d(t)$, de viteza acestuia $\dot{d}(t)$, de unghiul $\theta(t)$ dintre pendul şi normala la planul de rulare şi de variaţia $\dot{\theta}(t)$ a acestuia:

$$\begin{array}{ll} x_1 = d(t) & x_2 = \dot{d}(t) \\ x_3 = \theta(t) & x_4 = \dot{\theta}(t) \end{array} \tag{3.37}$$

Scopul acestui sistem din punct de vedere funcţional este menţinerea pendulului în poziţia de echilibru, care poate fi la $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$. Bineînţeles că în punctul în care $\theta = 0$ sistemul este instabil iar dacă $\theta = \pi$ sistemul este stabil. Pentru a asigura acest scop se aleg ca ieşiri, poziţia căruciorului şi unghiul θ:

$$\begin{array}{l} y_1 = d(t) \\ y_2 = \theta(t) \end{array} \tag{3.38}$$

Prin modelare analitică [Villegas, 2004] se obţin următoarele ecuaţii diferenţiale care descriu mişcarea dispozitivului cărucior-pendul:

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}(t) &= \frac{g}{L}\sin\Phi - \frac{1}{L}\ddot{d}(t)\cos\Phi(t) \\ M\ddot{d}(t) &= F(t) - \mu\dot{d}(t) \end{aligned} \tag{3.39}$$

unde cu L s-a notat distanţa de la pivot la centrul de greutate al pendulului, $\mu = const.$ este coeficientul de frecare dintre roţile căruciorului şi planul de rulare iar g este acceleraţia gravitaţională locală.

Se urmăreşte determinarea modelului sistemului în spaţiul stărilor:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \tag{3.40}$$

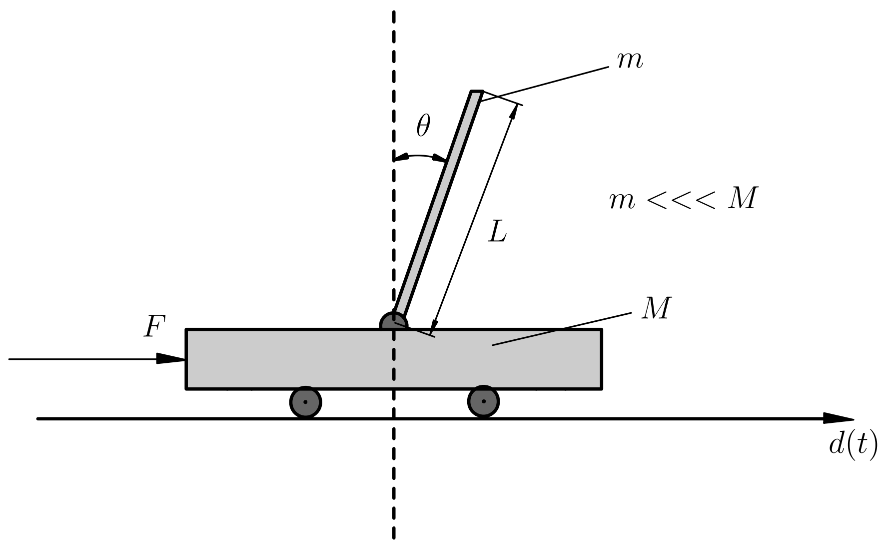


Figura 3.8: Ansamblu format dintr-un pendul simplu invers, sprijinit pe un cărucior.

Pentru determinarea vectorului $\dot{x}$ se utilizează relaţiile (3.37) şi (3.39):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F}{M} - \frac{\mu}{M}x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{g}{L}\sin x_3 - \frac{1}{L}x_2\cos x_3 \end{aligned} \quad sau \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}u - \frac{\mu}{M}x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{g}{L}\sin x_3 - \frac{1}{ML}u\cos x_3 + \frac{\mu}{ML}x_2\cos x_3 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Astfel modelul se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{M}u - \frac{\mu}{M}x_2 \\ x_4 \\ \frac{g}{L}\sin x_3 - \frac{1}{ML}u\cos x_3 + \frac{\mu}{ML}x_2\cos x_3 \end{pmatrix} && \Rightarrow \dot{x} = f(x,u) \\ y &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} && \Rightarrow y = h(x) \end{aligned} \tag{3.42}$$

Se observă că expresia lui x_4 din (3.42) este neliniară în raport cu x_3. Pentru a se obţine un sistem de forma (3.40), relaţiile (3.42) trebuie liniarizate.

Liniarizarea se face într-un punct de funcţionare, punct de echilibru (pentru $F = 0$), în care starea sistemului rămâne neschimbată ($\dot{x}(t) = 0$)[12]. Rezultă astfel că sistemul este în echilibru când $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [x_1, 0, 0(\pi), 0]$. Punctele de funcţionare (unul pentru $\theta = 0$ şi celălalt pentru $\theta = \pi$) pot fi considerate şi puncte iniţiale de funcţionare, iar stările rezultate, stări iniţiale.

[12]In literatura de specialitate acest punct mai este denumit şi punct staţionar de funcţionare, deoarece în acest punct $\dot{x}(t) = 0$.

Pentru liniarizare se calculează $A(x,u) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $B(x,u) = \dfrac{\partial f}{\partial u}$, după care se evaluează funcţiile rezultate pentru $x = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1, 0, 0, 0]$. Rezultă astfel matricele:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mu}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{\mu}{ML} & \dfrac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{ML} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{3.43}$$

Deoarece sistemul are $m = 1$ intrări şi $p = 2$ ieşiri, matricea de transfer este:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B =$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(sM+\mu)s} \\ \dfrac{s}{(sM+\mu)(Ls^2 - g)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{1}{M}}{\left(s + \frac{\mu}{M}\right)s} \\ \dfrac{-\frac{1}{ML}s}{\left(s + \frac{\mu}{M}\right)\left(s^2 - \frac{g}{L}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

In [Villegas, 2004] sunt date valorile componentelor fizice ce apar în (3.44) pentru sistemul cărucior-pendul invers *Digital Pendulul Mechanical Unit 32-200* [Feedback Instruments Ltd., 2000]:

$$\mu = 0.303\ kg/s \quad M = 0.091\ kg$$
$$L = 0.328298\ m \quad g = 9.8\ m/s^2$$

Prin înlocuire în (3.44) rezultă:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{10.98}{s(s+3.329)} \\ \dfrac{-33.47}{(s+3.329)(s^2 - 29.85)} \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

Primul pas care trebuie urmat în continuare este să se verifice dacă sistemul, prin modelul matematic obţinut şi prin caracteristicile de control alese, îndeplineşte condiţiile de controlabilitate şi observabilitate. In acest sens, se înlocuiesc în (3.42) valorile rezultate. Astfel matricele caracteristice ale sistemului vor fi:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10.14 & 29.85 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10.98 \\ 0 \\ -33.47 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

Matricea de controlabilitate este:

$$\Phi_c = [\ B \quad AB \quad AB^2 \quad AB^3\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 10.98 & -36.58 & 121.83 \\ 10.98 & -36.58 & 121.83 & -405.66 \\ 0 & -33.47 & 111.45 & -1370.29 \\ -33.47 & 111.45 & -1370.29 & 4562.62 \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

cu rangul egal cu $4 = n$, deci sistemul este complet controlabil. Altfel spus fiecare intrare aplicată are ca efect modificarea cel puţin a unei stări a sistemului, deci există efectul de *cuplare* între intrări şi modurile sistemului.

Matricea de observabilitate este:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.32 & 0 & 0 \\ 0 & 10.14 & 29.85 & 0 \\ 0 & 11.08 & 0 & 0 \\ 0 & -33.77 & 0 & 29.85 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Rangul matricei Φ_c este maxim, adică egal cu 4, deci sistemul este şi complet observabil. In consecinţă fiecare ieşire aleasă este cuplată cu cel puţin câte o stare a sistemului, existând astfel fenomenul de *cuplare* între ieşiri şi stări.

In concluzie sistemul este complet controlabil şi complet observabil. In plus se poate spune că acesta este reprezentat şi într-o formă minimală.

Se verifică şi controlabilitatea pe ieşire. in acest sens se calculează matricea:

$$\Phi_{io} = [\ CB \quad CAB \quad CA^2B \quad CA^3B\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 10.989 & -36.589 & 121.831 \\ 0 & -33.472 & 111.452 & -1370.291 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei Φ_{io} este egal cu 2, adică cu numărul de ieşiri ale sistemului, deci sistemul este controlabil pe ieşire.

Cum numărul de intrări este mai mic decât numărul de ieşiri, rezută că sistemul nu este controlabil funcţional. Altfel spus pendulul nu poate urmări o traiectorie dorită pe un interval de timp, deşi unghiul θ poate fi dus la orice valoare controlabilă.

5 Probleme de studiu

Problema 3.1. Să se arate că un sistem cu o matrice de stare:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

unde $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dacă are două intrări, nu poate fi controlabil.

Problema 3.2. Să se studieze controlabilitatea sistemului:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Problema 3.3. Se dă sistemul descris prin ecuaţiile liniare:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} x.$$

1. Este acest sistem controlabil?
2. Este acest sistem observabil? Să se verifice dacă starea $x = [1, 5]^T$ este observabilă.
3. Să se determine matricea de transfer $H(s)$ corespunzătoare şi să se determine dacă sistemul este controlabil funcţional.
4. Dacă $y = [1\ \ 1]x$, sistemul este controlabil funcţional?

Problema 3.4. Să se verifice dacă sistemul descris prin:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u \quad ,$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

este controlabil la ieşire şi controlabil funcţional. Să se argumenteze răspunsul.

Rezumat

Pentru un sistem dat, proprietatea de controlabilitatea este o cerinţă importantă în sinteza unui controler, iar prin identificarea stărilor necontrolabile ale sistemului această proprietate a sistemului poate fi determinată.

Problema controlabilităţii unui sistem este asimilată cu modul în care intrările sistemului influenţează stările acestuia.

In analiza unui sistem, o altă cerinţă care trebuie verificată şi îndeplinită pentru o sinteză eficientă a unui controler este asigurarea observabilităţii sistemului.

Problema observabilităţii unui sistem este asociată cu modul în care ieşirile sistemului surprind comportamentul stărilor sistemului.

S-au prezentat diferite metode de verificare a existenţei celor două proprietăţi, precum şi de identificare a stărilor care le influenţează. De asemenea s-au expus şi modalităţi pentru determinarea subspaţiilor de controlabilitate/necontrolabilitate respectiv observabilitate/neobservabilitate.

Pentru sistemele echivalente proprietăţile de controlabilitate şi observabilitate se păstrează dar sunt inversate. Astfel dacă sistemul echivalent este controlabil atunci sistemul iniţial este observabil şi vice-versa.

In capitolul următor se vor studia cauzele care fac un sistem să fie necontrolabil sau neobservabil.

CAPITOLUL 4

Polii şi zerourile sistemelor multivariabile liniare invariante în timp

Polii şi îndeosebi zerourile sistemelor multivariabile liniare au fost intens studiate în literatura de specialitate din ultimele trei decenii. Astfel s-au definit mai multe clase de zerouri pentru sistemele multivariabile. Importanţa studierii zerourilor sistemelor multivariabile a fost evidenţiată încă de la începutul teoriei controlului automat, poziţionarea lor influenţând direct stabilitatea sistemelor în buclă închisă şi performanţele de reglare. De asemenea studiul zerourilor sistemelor multivariabile a dus la soluţionarea multor probleme legate de controlul sistemelor [Schrader şi Sain, 1989].

In capitolul anterior s-au prezentat diferite metode pentru determinarea proprietăţilor de controlabilitate şi observabilitate ale unui sistem liniar invariant în timp. In plus s-au determinat şi stările care influenţează aceste proprietăţi. Probabil că s-au ridicat întrebări legate de cauzele care fac sistemele necontrolabile şi/sau neobservabile. In acest capitol se vor prezenta metode pentru determinarea polilor şi a zerourilor sistemelor multivariabile pornind de la cazul sistemelor simple, monovariabile. De asemenea se va studia şi controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor, dar prin prisma zerourilor de decuplare.

1 Polii şi zerourile sistemelor monovariabile ($SISO$)

Se consideră sistemul din Figura 4.1, care poate fi considerat o simplificare a sistemului de suspensie al unui autovehicul, pentru care se poate scrie uşor ecuaţia de mişcare:

$$m\ddot{y}(t) + d\dot{y}(t) + ky(t) = F(t) \tag{4.1}$$

Dacă se cunosc condiţiile iniţiale ale sistemului $y(0)$ şi $\dot{y}(0)$, prin aplicarea transformatei Laplace rezultă:

$$m[s^2Y(s) - sy(0) - s\dot{y}(0)] + d[sY(s) - y(0)] + kY(s) = F(s) \tag{4.2}$$

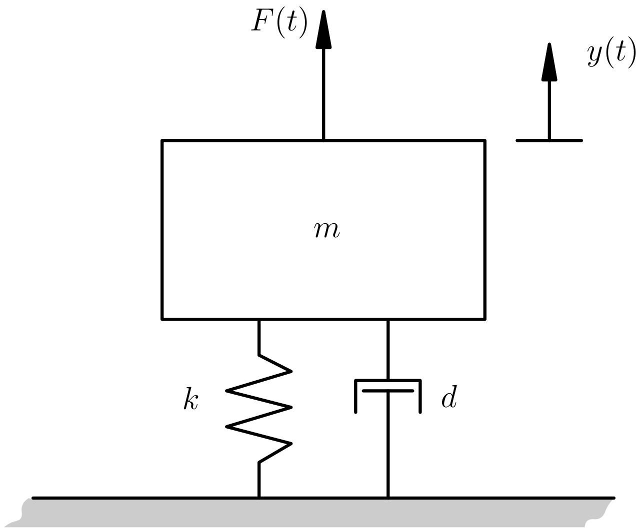


Figura 4.1: Sistem simplificat al suspensiei unui autovehicul.

Dacă se aranjează ecuaţia precedentă rezultă:

$$Y(s)(ms^2 + ds + k) - m[sy(0) - s\dot{y}(0)] - dy(0) = F(s),$$

iar considerând condiţiile iniţiale nule[1]:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}} F(s),$$

sau

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}. \tag{4.3}$$

Expresia matematică din partea dreaptă a relaţiei (4.3) poartă de numirea de funcţie de transfer a sistemului şi prin aceasta se poate evalua modul în care forţa $F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ aplicată sistemului este propagată la ieşirea $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ a sistemului $H(s) = \dfrac{Y(s)}{F(s)}$. Se încearcă evaluarea acestui transfer de energie, dacă la intrare se aplică un impuls unitar, adică $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$.

Pentru aceasta se notează cu $\Delta(s) = s^2 + \dfrac{d}{m}s + \dfrac{k}{m}$ numitorul expresiei (4.3) şi se consideră trei situaţii posibile:

1. Când $d^2 = 4mk$. In acest caz ecuaţia $\Delta(s) = 0$ are o soluţie multiplă $s_{1,2} = -a$, $a \in \mathbb{R}$ iar funcţia de transfer poate fi scrisă sub forma:

[1]Doar pentru simplificarea problemei.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{(s+a)^2},$$

iar dacă se aplică transformata Laplace inversă $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ rezultă:

$$y(t) = \frac{te^{-at}}{m}.$$

Din relaţia precedentă se poate observa că răspunsul sistemului este determinat direct de rădăcina $s = -a$ a ecuaţiei $\Delta(s) = 0$. In Figura 4.2 se prezintă răspunsul sistemului la intrarea considerată, pentru $m = 1$, $k = 1$ şi $d = 2$.

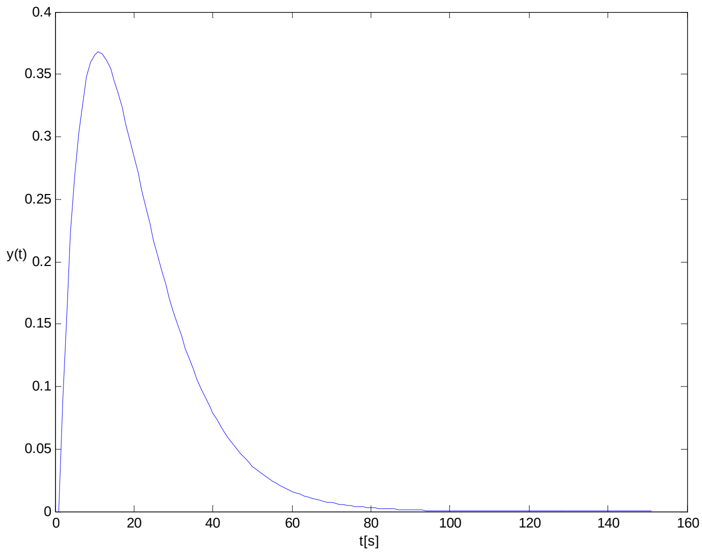


Figura 4.2: Răspunsul sistemului considerat pentru $m = 1$, $k = 1$ şi $d = 2$ la intrare $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$.

2. Când $d^2 > 4mk$. In acest caz ecuaţia $\Delta(s) = 0$ are două soluţii reale distincte $s_1 = -a$ şi $s_2 = -b$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ iar funcţia de transfer poate fi scrisă sub forma:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{m}\left[\frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}\right],$$

iar dacă se aplică transformata Laplace inversă rezultă:

$$y(t) = \frac{A}{m}e^{-at} + \frac{B}{m}e^{-bt},$$

unde $A = \dfrac{1}{a-b}$ şi $B = \dfrac{1}{b-a}$.

Din relaţia precedentă se observă că dinamica sistemului este influenţată de cele două rădăcini $s_1 = -a$ şi $s_2 = -b$ ale ecuaţiei $\Delta(s) = 0$. In Figura 4.3 se prezintă răspunsul sistemului la intrarea considerată, pentru $m = 1$, $k = 1$ şi $d = 4$.

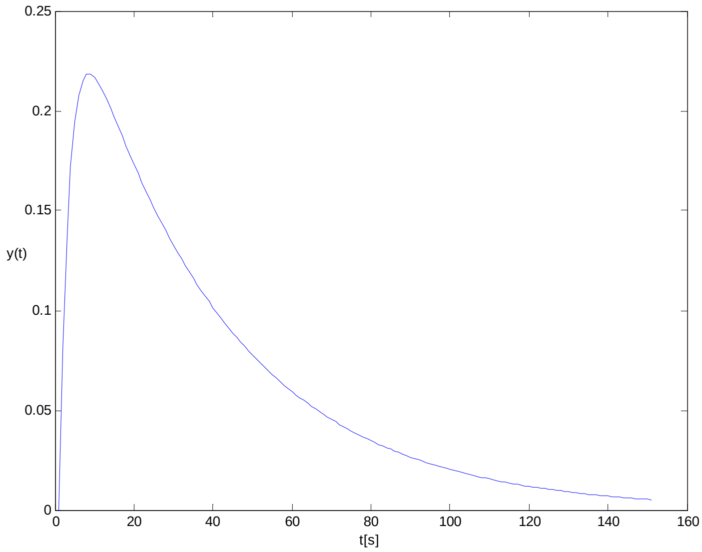


Figura 4.3: Răspunsul sistemului considerat pentru $m = 1$, $k = 1$ şi $d = 4$ la intrare $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$.

3. Când $d^2 < 4mk$. In acest caz ecuaţia $\Delta(s) = 0$ are două soluţii complex conjugate $s_{1,2} = \sigma \pm \omega$, $\sigma, \omega \in \mathbb{R}$ iar funcţia de transfer poate fi scrisă sub forma:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{(s + \sigma - j\omega)(s + \sigma + j\omega)} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s + \sigma)^2 + \omega^2},$$

iar dacă se aplică transformata Laplace inversă rezultă:

$$y(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{m} sin(\omega t)$$

Din relaţia precedentă se observă că dinamica sistemului este influenţată de cele două rădăcini $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ale ecuaţiei $\Delta(s) = 0$. In Figura 4.4 se prezintă răspunsul sistemului la intrarea considerată, pentru $m = 4$, $k = 1$ şi $d = 1$.

Din cele prezentate anterior se poate observa că poziţionarea rădăcinilor polinomului $\Delta(s)$ influenţează direct dinamica sistemului.

Polinomul $\Delta(s)$ poartă denumirea de *polinom caracteristic* al sistemului şi rădăcinile acestuia *caracterizează* dinamica sistemului. Rădăcinile polinomului $\Delta(s)$ sunt *polii*[2] sistemului, iar după cum se poate observa din cele trei soluţii ale sistemului anterior aceştia caracterizează *modurile* ce determină dinamica unui sistem.

Se poate concluziona că:

Definiţia 4.1 *Pentru un sistem caracterizat de o funcţie de transfer $H(s)$, valorile s_p pentru care $\lim_{s \to s_p} |H(s)| = \infty$ poartă denumirea de poli ai sistemului sau ai funcţie $H(s)$.*

[2]Denumirea de pol al sistemului este sugerată de faptul că în aceste valori se polarizează energia sistemului. Polii sistemelor sunt asociaţi cu elemente sau structuri ale sistemului care *generează* energie.

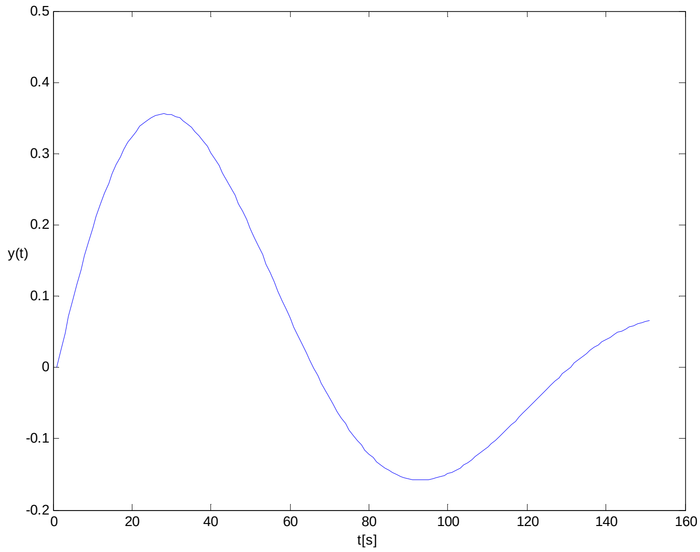


Figura 4.4: Răspunsul sistemului considerat pentru $m = 4$, $k = 1$ şi $d = 1$ la intrare $F(t) = \delta(t)$, $t > 0$.

Observaţia 4.1

Din punct de vedere al relaţiei 4.3, nu este important dacă polinomul $\Delta(s)$ *va fi egal cu* 0 *pentru anumite valori ale lui* s*, deoarece el este privit doar ca un polinom şi atâta timp cât nu va fi polinomul zero, este acceptabil. In plus cum polinomul caracteristic* **nu va fi nicioadată** *polinomul zero, raţionamentul este valabil.*

La fel se incearcă stabilirea condiţiilor în care transferul dintre intrarea $F(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ şi ieşirea acestuia $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ este minim, adică 0.

Intuitiv se poate deduce că:

Definiţia 4.2 *Pentru un sistem caracterizat de o funcţie de transfer* $H(s)$*, valorile* s_z *pentru care* $\lim_{s \to s_z} H(s) = 0$ *poartă denumirea de zerouri*[3] *ale sistemului sau ale funcţie* $H(s)$*.*

De exemplu pentru sistemul din Figura 4.1, dacă se consideră $u = F(t)$, $x_1 = y$ şi $x_2 = \dot{y}$ şi prin utilizarea relaţiei (4.1) ecuaţiile dinamicii sistemului devin:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\
\dot{x}_2 &= \ddot{y} = -\frac{k}{m}y - \frac{d}{m}\dot{y} + \frac{1}{m}u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{d}{m}x_2 + \frac{1}{m}u
\end{aligned}$$

Iar dacă se scriu aceste ecuaţii sub formă matriceală, rezultă:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

[3]Zerourile unui sistem pot fi asociate cu fenomene de *absorbţie* de energie.

In continuare se consideră că se măsoară viteza cu care se deplasează corpul de masă m, adică $y = \dot{x} = x_2$. In aceste condiţii sistemul este complet definit de matricele:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{d}{m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, D = [0]$$

Astfel se poate scrie funcţia de transfer a sistemului:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{\dfrac{s}{m}}{s^2 + \dfrac{d}{m}s + \dfrac{k}{m}} \tag{4.4}$$

Se observă din (4.4) că $s = 0$ este un zerou al sistemului, deoarece $\lim\limits_{s \to 0} H(s) = 0$. Din punct de vedere funcţional în regim permanent constant, acest lucru corespunde ieşirii zero pentru o intrare al cărei efect este anulat de zeroul la $s = 0$.

De exemplu dacă se doreşte menţinerea corpului la o viteză constantă, fie ea $\dot{y}(t) = 0.1[m/s]$ sau $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \dfrac{0.1}{s}$, din cauza zeroului de la numărătorul funcţiei de transfer acest deziderat nu va putea fi atins, deoarece zeroul va anula (prin simplificare) efectul intrării aplicate. Răspunsul sistemului în aceste condiţii este reprezentat în Figura 4.5.

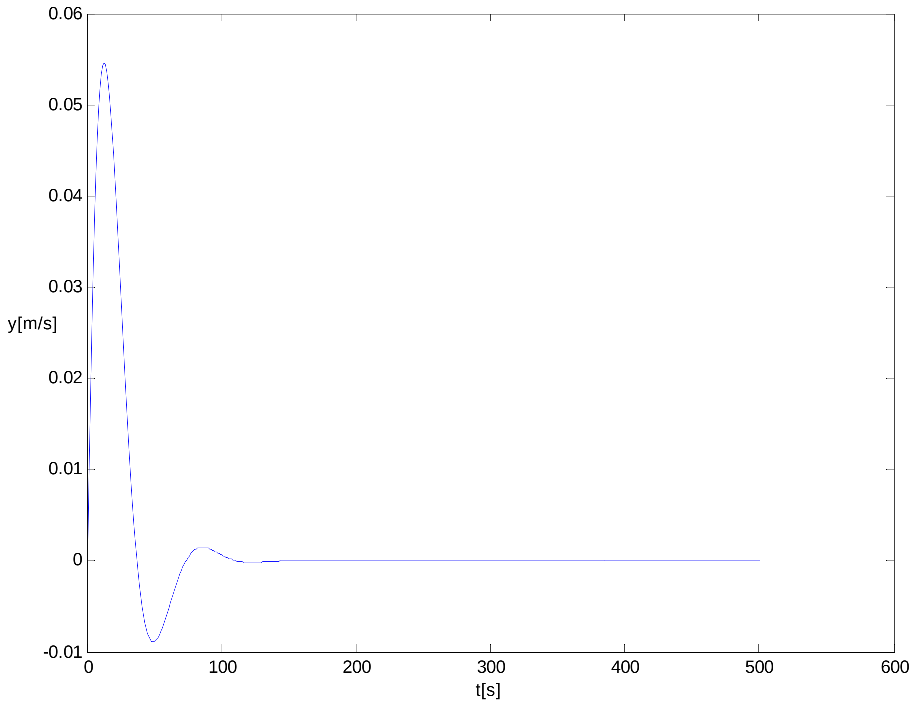


Figura 4.5: Răspunsul sistemului la intrarea $y(t) = 0.1$.

Se observă că ieşirea sistemului este zero, în aceste condiţii mişcarea corpului de masă m nu se va putea face după o viteză constantă, dacă se utilizează intrarea considerată.

Observaţia 4.2

Zerourile determinate anterior mai poartă denumirea de zeroruri de transmisie ale sistemului şi sunt finite [Ly, 2003].

Zerourile de transmisie au asociate efecte de blocare a unor intrări aplicate sistemului.

O altă categorie de zerouri sunt zerourile la infinit ale sistemului:

Definiţia 4.3 *Un sistem descris printr-o funcţie de transfer $H(s)$, posedă zerouri la infinit dacă funcţia de transfer $H(1/z)$ posedă un zerouri la $z = 0$* [4]*. Numărul de zerouri la $z = 0$ care apar în funcţia de transfer $H(1/z)$ indică numărul de zeroruri la infinit ale sistemului.*

Nota 4.1

Numărul polilor sistemului (n) este egal cu numărul zerourilor finitie (n_f) plus numărul zerourilor infinite (n_∞), $n = n_f + n_\infty$ [Ly, 2003]. Astfel dacă:

- *$m = n$, sistemul posedă $n_f = m$ zerouri finite şi nu posedă zerouri la infinit;*
- *$m < n$, sistemul posedă $n_f = m$ zerouri finite şi $n_\infty = n - m$ zerouri la infinit.*

Numărul de zerouri la infinit (n_∞) reprezintă excesul de poli al sistemului.

Ex. 4.1 Pentru sistemul din Figura 4.1, dacă se consideră ieşirea sistemului ca fiind viteza, funcţia de transfer este (4.4). După cum s-a observat deja, sistemului posedă un zerou finit la $s = 0$ şi deoarece $m < n$, rezultă că acesta posedă şi un zerou la infinit. Pentru verificare se determină:

$$H(1/z) = \frac{z}{kz^2 + dz + m}$$

Cum funcţia de transfer $H(1/z)$ posedă un zerou la $z = 0$, rezultă că sistemul posedă un zerou la infinit.

Nota 4.2

Dacă un sistem are toate zerourile finite în semiplanul stâng atunci sistemul este de fază minimă [Ionescu, 1985].

Dacă un sistem posedă un zerou în semiplanul drept atunci el este de fază neminimă.

[4] A nu se confunda cu notaţia "z" in cazul sistemelor discrete.

2 Polii sistemelor multivariabile ($MIMO$)

La sistemele multivariabile polii şi zerourile nu se determină ca şi în cazul sistemelor cu o singură intrare şi o singură ieşire ($SISO$). In cazul sistemele $MIMO$ funcţia de transfer $H(s)$ are dimensiuni $p \times m$, unde p este numărul de ieşiri iar m este numărul de intrări, şi este o matrice de funcţii raţionale. Determinarea polilor şi a zerourilor în acest caz devine mai dificilă, deoarece polii şi zerourile nu sunt polii şi zerourile elementelor matricei de transfer.

După cum s-a observat în secţiunea precedentă, dacă se cunosc polii şi zerourile unui sistem se cunoaşte şi dinamica acestuia. Din punct de vedere al controlului ei sunt importanţi deoarece printr-o sinteză adecvată a unei strategii de control se pot *controla* sau *corecta* anumite moduri nedorite (controlabilitatea) şi se pot *observa* anumite efecte nedorite sau poli nedoriţi (observabilitatea). De asemenea determinarea polilor instabili este importantă în sinteza unui controler robust atunci când de exemplu aceşti poli rămân invariabili într-o buclă de control închisă.

Dacă un sistem cu m intrări şi p ieşiri este descris printr-o matrice de transfer $[H(s)]_{(p\times m)}$, polii nu sunt întotdeauna rădăcinile polinoamelor de la numitorii fracţiilor raţionale din $H(s)$ (aduse în formă ireductibilă!). In cazul în care există rădăcini comune între numărătorii şi numitorii unor astfel de funcţii raţionale, unii poli pot dispărea din forma finală a reprezentării $H(s)$, prin anulare cu anumite zerouri.

Definiţia 4.4 *Pentru un sistem caracterizat de o matrice de transfer $[H(s)]_{(p\times m)}$, valorile s_p pentru care $\lim_{s\to s_p} |H(s)| = \infty$ poartă denumirea de poli ai sistemului sau ai matricei $H(s)$.*

O modalitate de a determina polii unui sistem multivariabil, când i se cunoaşte matricea de transfer $[H(s)]_{p\times m}$, este prin utilizarea formei matriceale Smith-McMillan:

$$L(s)H(s)R(s) = M(s) = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \frac{n_1(s)}{d_1(s)} & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & O_{r\times(m-r)} \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{n_r(s)}{d_r(s)} & \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{O_{(p-r)\times r}} & O_{(p-r)\times(m-r)} \end{array}\right] \tag{4.5}$$

unde $L(s)$ şi $R(s)$ sunt două matrice unimodale de transformare la stânga, respectiv la dreapta (vezi Anexa).

Teorema 4.1 *Toate rădăcinile tuturor polinoamelor $d_i(s)$, $i = 1\ldots r$ de la numitorii funcţiilor raţionale ale formei matriceale Smith-McMillan aferente unui sistem sunt polii sistemului.*

Nota 4.3

Polinomul $p_H(s) = d_1(s)d_2(s)\ldots d_r(s)$ poartă denumirea de polinomul caracteristic al matricei $H(s)$. Polinomul $z_H(s) = n_1(s)n_2(s)\ldots n_r(s)$ poartă denumirea de polinomul *caracteristic al matricei $H(s)$.*

*Numărul total de poli ai sistemului este dat de gradul polinomului $d_1(s)d_2(s)\dots d_r(s)$ şi este cunoscut sub denumirea de **ordinul McMillan** al sistemului. Acesta indică dimensiunea minimă (forma minimală) de reprezentare a sistemului.*

Dacă o reprezentare în spaţiul stărilor (A, B, C, D) a unui sistem este de un ordin mai mare decât cel al ordinului McMillan, aceasta indică anulări poli-zerouri în sistem şi reprezentarea în spaţiul stărilor nu este minimală. Dacă dimensiunea matricei $A_{n\times n}$ este egală cu cea a ordinului McMillan, atunci reprezentarea în spaţiul stărilor este minimală.

Observaţia 4.3

Din teorema anterioară rezultă că dacă se determină o valoare s_p ca fiind rădăcină a mai multor polinoame $d_i(s)$, $i = 1\dots k$ atunci $s = s_p$ este un pol multiplu pentru sistem, cu ordinul McMillan asociat acestuia egal cu k. Ordinul McMillan k aferent unui pol s_p, indică existenţa a k poli la $s = s_p$.

Pentru un sistem $SISO$ existenţa a k poli la $s = s_p$ poartă denumirea de multiplicitatea polului s_p. Astfel pentru un sistem $SISO$ reprezentat printr-o funcţie de transfer, existenţa unui factor la numitor de forma $(s - s_p)^k$ indică existenţa a k poli la s_p. Pentru sistemele multivariabile multiplicitatea unui pol nu este echivalentă cu ordinul McMillan al acelui pol, deoarece nu există o relaţie general valabilă între multiplicitatea unui pol la o anumită locaţie şi ordinul McMillan

Ex. 4.2 Fie sistemul descris prin matricea de transfer:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Forma McMillan corespunzătoare acestui sistem este:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(s-1)}{(s+2)} & 0 \end{bmatrix}$$

Se poate observa că sistemul posedă poli la $s = -2,\ -2,\ -1,\ 1$. Rezultă de asemenea că sistemul posedă un pol la $s = -2$ cu ordinul McMillan egal cu 2. Se poate observa că polul $s = -2$, deşi are ordinul McMillan egal cu 2, nu este un pol multiplu, el fiind localizat în zone diferite ale matricei de transfer.

In paragrafele următoare se va observa că acest sistem posedă şi un zerou la $s = 1$.

Dacă sistemul este descris în spaţiul stărilor se poate utiliza următoarea teoremă pentru determinarea polilor sistemului:

Teorema 4.2 *Pentru un sistem liniar invariant în timp (LTI) descris în spaţiul stărilor:*

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4.6}$$

cu $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ şi $y \in \mathbb{R}^p$, mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $|sI - A| = 0$ (mulţimea valorilor proprii ale matricei A) conţine şi polii sistemului.

Observaţia 4.4

Pentru un sistem (A, B, C, D) cu matricea de transfer aferentă $H(s)$, matricea A poate avea mai multe valori proprii decât polii matricei de transfer $H(s)$ aferentă sistemului:

$$\{\textit{polii } H(s)\} \subset \{ \textit{ valorile proprii ale matricei } A\}.$$

Matricea de transfer a unui sistem descris în spaţiul stărilor (4.6) este dată de:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{d(s)}[Cadj(sI - A)^{-1}B] + D = \frac{1}{d(s)}N(s), \tag{4.7}$$

unde dimensiunea matricei $A_{n\times n}$ este egală cu numărul n de stări ale sistemului. Polii matricei $H(s)$, determinaţi cu Teorema 4.1 sunt o submulţime a valorilor proprii ale matricei A. Dacă n_1 este numărul de poli ai sistemului determinaţi prin utilizarea Teoremei 4.1 şi dacă n este numărul de poli determinaţi cu Teorema 4.2, atunci $n \geq n_1$. Mai mult, dacă:

- $n > n_1$, atunci sistemul fie nu este complet controlabil, fie nu este complet observabil, sau ambele şi sistemul (A, B, C, D) nu este într-o formă minimală;
- $n = n_1$, atunci sistemul reprezentat prin matricele (A, B, C, D) este într-o formă minimală şi este complet controlabil şi complet observabil.

Dacă sistemul S este reprezentat într-o formă minimală, pentru determinarea polilor sistemului se poate utiliza următoarea teoremă.

Teorema 4.3 *Pentru un sistem liniar invariant în timp (LTI) descris în spaţiul stărilor:*

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4.8}$$

cu $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ şi $y \in \mathbb{R}^p$ dacă el este reprezentat într-o formă minimală, atunci polii sistemului sunt rădăcinilor ecuaţiei $|sI - A| = 0$ (mulţimea valorilor proprii ale matricei A).

O altă metodă pentru determinarea polilor sistemului este prin utilizarea formei Rosenbrock[5] de reprezentare matriceală a sistemului.

Teorema 4.4 *Pentru un sistem descris prin forma matriceală Rosenbrock:*

$$P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & U(s) \\ -V(s) & W(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

rădăcinile ecuaţiei $|T(s)| = |sI - A| = 0$ sunt polii sistemului.

Ex. 4.3 Se cunoaşte reprezentarea matriceală Rosenbrock a unui sistem:

[5]Pentru formele matriceale de reprezentare a sistemelor tehnice a se vedea [Patel şi Munro, 1982].

$$P(s) = \left[\begin{array}{ccc|cc} s+1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & s+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & k & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Polii sistemului sunt soluţiile ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \hat{s}_1 = -1, \;\; \hat{s}_2 = -2, \;\; \hat{s}_3 = -3$$

Determinarea polilor sistemului se poate realiza urmând paşii din Tabelul 4.1.

Tabelul 4.1: Algoritmul pentru determinarea polilor unui sistem descris în spaţiul stărilor sau sub forma unei matrice de transfer.

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor sau sub formă de matrice de transfer.

Se cere determinarea polilor sistemului.

Pasul 1: Dacă sistemul este descris în spaţiul stărilor prin matricele (A, B, C, D), şi dacă aceasta este o realizare minimală a sistemului, polii sistemului sunt valorile proprii ale matricei A (rădăcinile ecuaţiei $|sI - A| = 0$).

Pasul 2: Dacă sistemul este descris prin matricea de transfer $H(s)$, se determină forma Smith-McMillan $M(s)$ a reprezentării matriceale $H(s)$. Polii sistemului sunt polii tuturor fracţiilor raţionale din $M(s)$.

3 Zerourile de transmisie

In cazul sistemelor multivariabile zerourile sunt greu de observat la o primă analiză a acestuia. De exemplu matricea de transfer:

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{s} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

posedă un zerou la $s = 1$ care nu este vizibil. In plus în cazul sistemelor multivariabile există mai multe tipuri de zerouri.

O categorie importantă sunt zerourile de transmisie finite[6] şi infinite[7].

Definiţia 4.5 *Un sistem posedă un zerou de transmisie $s = s_0$ dacă există o stare iniţială x_0 diferită de zero, astfel încât dacă intrarea este $u(t) = u_0 e^{s_0 t} \cdot 1(t)$, atunci $x(t) = x_0 e^{s_0 t}$ şi $y(t) = 0$ pentru $t \to \infty$.*

[6]Sau simplu zerouri de transmisie;

[7]Sau zerouri la infinit;

Vectorul $[x_0\ u_0]^T$ *se numeşte direcţia de transmisie asociată zeroului de transmisie* s_0 *[Rodriguez, 2004b; Ly, 2003].*

Nota 4.4

Definiţia de mai sus este valabilă şi în cazul sistemelor monovariabile.

Observaţia 4.5

Din Definiţia 4.5 se poate observa că pentru un sistem, pentru un zerou de transmisie s_0*, există o intrare de forma* $u(t) = u_0 e^{s_0 t}$, $t \geq 0$*, care în anumite condiţii iniţiale* x_0*, să asigure* $y(t) = 0$*. Condiţiile iniţiale care să asigure acest deziderat, sunt* $x_0(t) = (s_0 I - A)^{-1} B u_0$*, iar zeroul de transmisie* s_0 *mai poartă denumirea de zerou de blocare.*

Observaţia 4.6

In cazul sistemelor de tip SISO nu se poate pune problema tratării explicite a direcţiei zeroului de transmisie, deoarece aceasta este evidentă.

In cazul sistemelor MIMO direcţia unui posibil zerou de transmisie este o problemă deschisă.

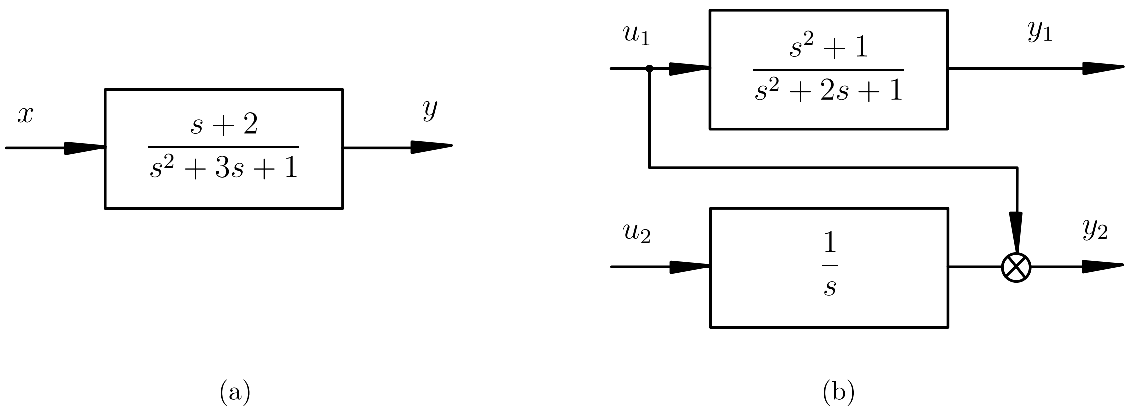


Figura 4.6: Studiu de caz: a) Sistem $SISO$, b) Sistem $MIMO$.

De exemplu [Rodriguez, 2004b], în cazul sistemului din Figura 4.6(a) direcţia zeroului $s_0 = -2$ este evidentă. Astfel dacă sistemului i se aplică o intrare $U(s) = \dfrac{1}{s+2} = \mathcal{L}\{e^{-2t}\}$, ieşirea sistemului va fi $y(t) = 0$. Acest lucru a fost evidenţiat şi pentru sistemul din Figura 4.1, exemplu care este mai sugestiv în acest sens.

Insă pentru sistemul din Figura 4.6(b), intrările sistemului sunt $u = [u_1\ \ u_2]^T$, iar dacă $u_1(t) = u_2(t) = \sin(t)$, ieşirile sistemului sunt cele reprezentate în Figura 4.7. Se observă că:

$$y_1(t) \rightarrow 0, \ \ \textit{pentru} \ \ t \geq 0$$
$$y_2(t) \not\rightarrow 0, \ \ \textit{pentru} \ \ t \geq 0$$

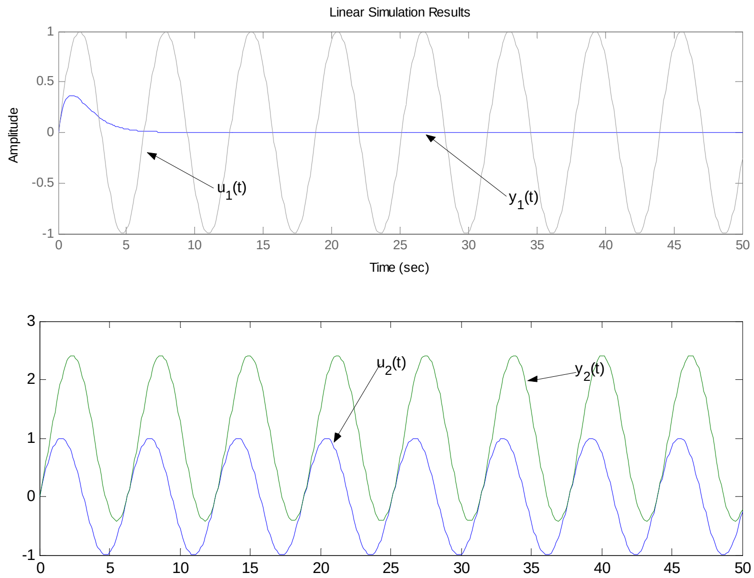


Figura 4.7: Ieşirile sistemului reprezentat în Figura 4.6(b) la intrarea $u = [u_1 \quad u_2]^T = [\sin(t) \quad \sin(t)]^T$, în condiţii iniţiale nule.

Este evident că ieşirea $y_1(t)$ este afectată de un zerou, din moment ce, în condiţiile date, $y_1(t) = 0$.

Dacă se analizează funcţia de transfer dintre $u_1 \rightarrow y_1$, se observă că aceasta posedă zerourile la $\pm j$. Conform Definiţiei 4.5, intrarea trebuie să fie de forma $u(t) = u_0 e^{s_0 t}$, iar cum zerourile sunt imaginare, rezultă că şi funcţia $u(t)$ este imaginară. Pentru a utiliza o intrare reală se utilizează numai partea reală din $u(t) = u_0 e^{\pm jt} = u_0[cos(t) \pm jsin(t)]$. Astfel, rezultă $u(t) = u_0 \cos(t)$ şi dacă de exemplu $u_0 = 1$, va rezulta tot $y_1(t) = 0$, deci $\pm j$ sunt zerouri de transmisie.

3.1 Metode pentru determinarea zerourilor de transmisie

Pentru determinarea zerourilor de transmisie în cazul unor sisteme descrise printr-un cvadruplu (A, B, C, D) există mai multe metode, în funcţie de forma de reprezentare a sistemului.

Teorema 4.5 *Un sistem descris prin cvadruplul (A, B, C, D) prezintă zerouri de transmisie dacă şi numai dacă matricea Rosenbrock, notată $P(s)$, are rangul mai mic decât rangul maxim posibil [Ly, 2003].*

$$P(s) = \begin{bmatrix} s_0 I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}_{(n+p)\times(n+m)} \tag{4.10}$$

Rangul maxim posibil al matricei $P(s)$ este $n + \min(p, m)$.

In cazul $m = p$, pentru a verifica existenţa unui posibil zerou s_0 este suficient să

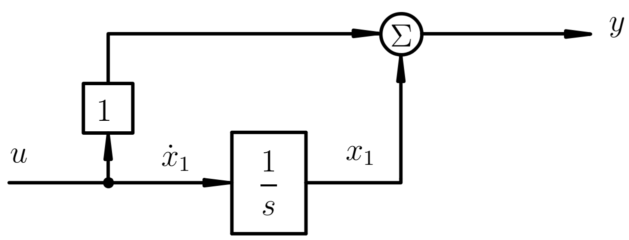


Figura 4.8: Schema bloc a realizării de stare a sistemului $H(s) = 1 + \frac{1}{s}$.

se calculeze $|P(s_0)| = 0$, iar soluţiile s_0 ale ecuaţiei vor fi zerourile de transmisie ale sistemului. Dacă un astfel de zerou există, atunci *direcţia* acestuia $[x_0, u_0]^T$ poate fi determinată prin rezolvarea ecuaţiei:

$$\begin{bmatrix} s_0 I - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

adică $[x_0, u_0]^T = \mathcal{K}er(P(s_0))$.

Nota 4.5

Pentru sistemele SISO zerourile de transmisie se pot determina direct din funcţia de transfer.

Sistemele MIMO pot avea poli şi zerouri comune dar care să nu se anuleze (compenseze) şi astfel să apară în matricea de transfer [Patel şi Munro, 1982]. Aceste zerouri sunt tot zerouri de transmisie şi se propagă spre ieşirea (ieşirile) sistemului.

Zerourile de transmisie, în general, ***nu sunt*** *echivalente cu zerourile elementelor raţionale ale matricei de transfer! [Rodriguez, 2004b]*

Pentru demonstrarea celor de mai sus următoarele două exemple [Rodriguez, 2004b] sunt elocvente.

Ex. 4.4 Se consideră sistemul descris prin $H(s) = \frac{s+1}{s} = 1 + \frac{1}{s}$. Există un posibil zerou de transmisie la $s = -1$.

Pentru a verifica dacă acest zerou este de transmisie se determină matricele A, B, C, D. Pentru aceasta se desenează schema din Figura 4.8, din care:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1 = u \\ y = x_1 + u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0, \;\; B = 1 \\ C = 1, \;\; D = 1 \end{array}$$

Pentru verificare, rezultă: $C(sI - A)^{-1}B + D = 1(sI - 0)^{-1} + 1 = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}$.

Se calculează determinantul matricei Rosenbrock:

$$\begin{vmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = s + 1 = 0 \Rightarrow s_0 = -1$$

Rezultă că $s_0 = -1$ este zerou de transmisie pentru sistemul dat, iar pentru determinarea direcţiei asociate acestuia se rezolvă ecuaţia:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este $[x_0 \;\; u_0]^T = k \cdot [1 \;\; -1]^T$, unde $k \in \mathbb{R}$.

Se verifică definiţia zeroului de transmisie. Dacă intrarea sistemului este $u(t) = k \cdot e^{s_0 t} = k \cdot e^{-t}$, starea sistemului este $x(t) = \int_0^t u dt = k \cdot e^{-t}$, iar ieşirea $y(t) = k \cdot e^{-t} - k \cdot e^{-t} = 0$ pentru $t > 0$, şi condiţia este verificată.

Se verifică dacă $s = -1$ este zerou de transmisie pornind şi de la funcţia de transfer a sistemului:

$$y(s) = H(s)u(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + [C(sI - A)^{-1}B + D]u(s)$$

Se consideră iniţial că sistemul porneşte din condiţii iniţiale nule, adică $x_0 = 0$. Răspunsul sistemului la o intrare $u(t) = u_0 e^{-t}$, $u_0 \neq 0$ este:

$$y(s) = \frac{s+1}{s} \cdot \frac{u_0}{s+1} = \frac{u_0}{s}$$

In domeniul timp răspunsul este $y(t) = u_0$, deci ieşirea ar fi 0 numai dacă $u_0 = 0$, adică dacă sistemului nu i se aplică nici o intrare, ceea ce este exclus în condiţiile prezentate! Astfel, răspunsul sistemului nu este 0, mai mult cu o astfel de intrare s-a excitat şi starea sistemului $x(t) = \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = u_0 - u_0 e^{-t}$, care în condiţiile date este diferită de zero.

Concluzionând se poate afirma că plecând din condiţii iniţiale nule, nu se poate observa dacă $s_0 = -1$ este zerou (ieşirea sistemului nu tinde la 0), chiar dacă se utilizează o intrare de forma $u(t) = u_0 e^{s_0 t} = u_0 e^{-t}$!

Condiţia ca intrarea sistemului să fie $u(t) = u_0 e^{s_0 t} = u_0 e^{-t}$, este o condiţie necesară dar nu şi suficientă. Pentru o soluţie completă se porneşte din condiţii iniţiale nenule, $x_0 \neq 0$. In aceste condiţii, aplicând o intrare $u(t) = u_0 e^{s_0 t} = u_0 e^{-t}$, ieşirea sistemului este:

$$y(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{u_0}{s} = \frac{x_0 + u_0}{s}$$

In acest caz condiţia ca ieşirea să fie zero (pentru $t \to \infty$) este $u_0 = -s_0$, adică $[x_0, u_0] = k \cdot [1, -1]$, chiar condiţia deja determinată.

Explicaţia pentru care nu este suficient să se pornească de la condiţii iniţiale nule este că intrarea va influenţa şi starea sistemului şi nu numai ieşirea acestuia. Acest lucru se poate observa dacă se calculează şi evoluţia stării:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = x_0 + u_0(1 - e^{-t}) = \underbrace{x_0 + u_0}_{=0} - u_0 e^{-t} = x_0 e^{-t}.$$

Se poate observa din relaţia precedentă că o alegere corectă a lui u_0 în funcţie de x_0, asigură $y = x_0 e^{-t} + u_0 e^{-t} = 0$. De asemenea se verifică şi relaţia $x_0(t) = (sI - A)^{-1}Bu_0$.

$\boxed{\text{Ex. } 4.5}$ Fie sistemul descris prin cvadruplul (A, B, C, D):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & k \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se calculează matricea de transfer:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D \Rightarrow H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{k}{s+2} \end{bmatrix}$$

Se determina matricea Rosenbrock şi se calculează determinantul acesteia:

$$P(s) = \left| \begin{array}{ccc|cc} s+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & s+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -k & 0 & 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow ks - 5s - 15 = 0 \Rightarrow s = \frac{15}{k-5}$$

Pentru $k = 10$ rezultă zeroul de transmisie $s_0 = 3$, iar pentru $k = 35$ rezultă zeroul $s_0 = 0.5$. Se observă că s_0, pentru valorile lui k alese, nu este zerou pentru elementele matricei de transfer a sistemului $H(s)$ determinată anterior. Direcţia zeroului de transmisie $s_0 = 3$ este $[x_0 \;\; u_0]^T = \mathcal{K}er(P(3)) = [6 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 24 \;\; -15]^T$.

O altă modalitate pentru determinarea zerourilor de transmisie pentru un sistem $MIMO$ este prin utilizarea formei de reprezentare Smith-McMillan a matricei de transfer aferentă sistemului:

Teorema 4.6 *Un sistem descris prin matricea de transfer $H(s)$, cu forma standard Smith-McMillan asociată M(s), prezintă zerouri de transmisie dacă şi numai dacă M(s) are polinoame în s la numărător, iar rădăcinile acestor polinoame sunt zerouri de transmisie pentru sistem.*

Nota 4.6

Conform acestei teoreme, zerourile de transmisie sunt rădăcinile polinomului zero, adică ale ecuaţiei $z_H(s) = 0$.

Ex. 4.6 Având funcţia de transfer de la exemplul anterior,

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{k}{s+2} \end{bmatrix}$$

se calculează forma standard Smith-McMillan. Va rezulta:

$$H(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \underbrace{\begin{bmatrix} s(s+2) & (s+1)(s+3) \\ 5(s+2)(s+3) & k(s+1)(s+3) \end{bmatrix}}_{N(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}}_{d(s)}$$

unde $d(s)$ este cel mai mic numitor comun al funcţiilor raţionale din $H(s)$. Se calculează cei mai mari factori comuni al tuturor minorilor lui $N(s)$:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 1 \\ \delta_1 &= 1 \\ \delta_2 &= |N(s)| = ks(s+1)(s+2)(s+3) - 5(s+1)(s+2)(s+3)^2 = \\ &= (s+1)(s+2)(s+3)(ks - 5s - 15) \end{aligned}$$

Forma Smith va fi:

$$S(s) = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)(s+3)(ks-5s-15) \end{bmatrix}$$

Iar forma McMillan este $M(s) = \dfrac{S(s)}{d(s)}$:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{(ks-5s-15)(s+1)(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & (ks-5s-15) \end{bmatrix}$$

Se observă că forma McMillan $M(s)$ are un polinom în s la numărător, iar rădăcina acestuia este $s_0 = 3$ pentru $k = 10$ şi s_0 este zerou de transmisie.

Este de observat în cazul acestui exemplu este că $H(s)$ prezintă un zerou la $s = 0$, dar care nu este de transmisie. In capitolele următoare se va determina natura acestui zerou.

Observaţia 4.7

Pentru un sistem MIMO există mai multe tipuri de zerouri.

Nota 4.7

Dacă un sistem MIMO:

- *are toate zerourile de transmisie situate în semiplanul stâng, atunci el este de fază minimă;*
- *are cel puţin unul dintre zerourile de transmisie situat în semiplanul drept, atunci el este de fază neminimă.*

O altă modalitate pentru determinarea zerourilor de transmisie este dacă sistemul este descris printr-o matrice de transfer în care nu există simplificări poli-zerouri:

Teorema 4.7 *Dacă un sistem MIMO este descris prin matricea de transfer $[H(s)]_{m\times p}$ şi aceasta este într-o formă ireductibilă, atunci acest sistem prezintă zerouri de transmisie la acele valori $s = s_0$, care nu sunt poli ai sistemului, pentru care $H(s)$ îşi micşorează rangul, $rang(H(s)) < min(m,p)$.*

Ex. 4.7 Fie sistemul descris prin:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Se scrie forma Smith-McMillan, pentru determinarea polilor şi zerourilor sistemului. Astfel se scrie:

$$H(s) = \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & (s-1)(s+1) & (s-1)(s+1) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)}$$

Forma Smith şi forma McMillan sunt:

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s-1)^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s-1)(s+2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(s-1)}{(s+2)} & 0 \end{bmatrix},$$

şi evident $s = 1$ ar trebui să fie zerou de transmisie.

Dar cum $s = 1$ este şi pol al sistemului, Teorema 4.7 nu se este valabilă! Rangul maxim al matricei $H(s)$ este 2, iar prin inspecţie se observă că există un posibil zerou de transmisie la $s = 1$. Pentru a verifica acest lucru, se calculează rangul matricei $H(s)$ când $s = 1$. Se observă că dacă $s = 1$, minorul $\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$ devine $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$ şi are rangul egal cu 1 şi cum elementul $\lim\limits_{s\to 1}\left(-\dfrac{1}{s-1}\right)$ nu este definit, rangul matricei $H(s)$ este egal cu 2. In concluzie sistemul nu prezintă zerouri de transmisie.

Nota 4.8

Dacă un sistem MIMO este descris printr-o matrice de transfer $H(s)$ pătratică şi s_0 nu este un pol al sistemului, atunci s_0 este zerou de transmisie dacă $|H(s_0)| = 0$.

Ex. 4.8 Se consideră matricea de transfer de la Exemplul 4.6. Determinantul acesteia este:

$$\frac{sk - 5s - 15}{(s+1)(s+3)(s+2)} = 0$$

iar pentru $k = 10$ rezultă $s_0 = 3$ care după cum s-a observat este zerou de transmisie.

In Tabelul 4.2 sunt sintetizaţi paşii necesari a fi parcurşi pentru determinarea zerourilor de transmisie finite.

3.2 Zerourile sistemului la infinit

Zerourile unui sistem la infinit sunt un caz particular de zerouri de transmisie.

Pentru determinarea zerourilor la infinit trebuie cunoscută matricea de transfer a sistemului, în care se înlocuieşte $s = 1/z$. Pentru noua matrice de transfer rezultată (funcţie de transfer în z) se calculează forma Smith-McMillan, iar numărul de zerouri rezultate la $z = 0$ (zerourile $z = 0$ ale fracţiilor raţionale) în forma Smith-McMillan este egal cu numărul de zerouri la infinit ale sistemului.

Tabelul 4.2: Algoritmul pentru determinarea zerourilor de transmisie finite.

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor sau prin matrice de transfer.

Se cere să se determine zerourile de transmisie ale sistemului.

Pasul 1: Dacă sistemul este descris în spaţiul stărilor se calculează forma Rosenbrock:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix},$$

1. Dacă sistemul are numărul de intrări egal cu numărul de ieşiri ($m = p$), zerourile de transmisie sunt soluţiile ecuaţiei $|P(s)| = 0$.
2. Dacă $m \neq p$, zerourile de transmisie sunt valorile s pentru care $P(s)$ îşi micşorează rangul.

Pasul 2: Dacă sistemul este descris prin matricea de transfer $H(s)$, se alege una din următoarele situaţii:

1. Se determină forma Smith-McMillan $M(s)$ a reprezentării matriciale $H(s)$. Zerourile de transmisie sunt zerourile fracţiilor raţionale din $M(s)$.
2. Dacă sistemul are $m = p$, zerourile de transmisie sunt acele soluţii ale ecuaţiei $|H(s)| = 0$ care nu sunt şi poli pentru sistem.
3. Dacă sistemul posedă $m \neq p$, zerourile de transmisie sunt valorile s, care nu sunt poli ai sistemului, pentru care $H(s)$ îşi micşorează rangul.

$\boxed{\text{Ex. 4.9}}$ Fie matricea de transfer a unui sistem:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Se doreşte determinarea zerourilor la infinit.
Se înlocuieşte $s = 1/z$ în $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(1/z) &= \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z+1} & 0 & \dfrac{z(z-1)}{(z+1)} \\ -\dfrac{z}{z+1} & \dfrac{z}{2z+1} & \dfrac{z}{2z+1} \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} z(2z+1) & 0 & -z(z-1) \\ -z(2z+1) & z(z+1) & z(z+1) \end{bmatrix}}_{N(1/z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(z+1)(2z+1)}}_{d(1/z)} \end{aligned}$$

Forma Smith a reprezentării matriceale a sistemului:

$$S(1/z) = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z^4 - z^3 - z^2 + z & 0 \end{bmatrix}$$

Iar forma Smith-McMillan:

$$M(1/z) = \frac{S(1/z)}{d(1/z)} = \begin{bmatrix} \frac{z}{(2z+1)(z^2-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{z(z-1)}{2z+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Se observă în $M(s)$ că există două zerouri la $z = 0$. In consecinţă sistemul prezintă două zerouri la infinit ($s = \infty$) de ordinul întâi. In plus se poate determina că sistemul posedă trei poli şi un zerou de transmisie. Ca urmare numărul de zerouri de transmisie este diferit de numărul de poli.

Observaţia 4.8

In general, pentru un sistem multivariabil numărul polilor (n) nu este egal cu suma zerourilor de transmisie finite (n_f) şi infinite n_∞, $n \neq n_f + n_\infty$, mai mult $n \geq n_f + n_\infty$.

Ex. 4.10 Având matricea de transfer a unui sistem:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{5}{s+1} & \frac{10}{s+2} \end{bmatrix},$$

să se determine zerourile la infinit pentru acest sistem.
Se înlocuieşte $s = 1/z$ în $H(s)$:

$$\begin{aligned} H(1/z) &= \begin{bmatrix} \frac{3z+1}{z^2+3z+1} & \frac{z}{2z+1} \\ \frac{5z}{z+1} & \frac{10z}{2z+1} \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} (z+1)(2z+1)(3z+1) & z(z+1)(z^2+3z+1) \\ 5z(z^2+3z+1)(2z+1) & 10z(z^2+3z+1)(z+1) \end{bmatrix}}_{N(1/z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(z^2+3z+1)(2z+1)(z+1)}}_{d(1/z)} \end{aligned}$$

Formele matriceale Smith şi Smith-McMillan asociate sunt:

$$S(1/z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{(2z+1)(-z^6+z^5-15z^4-41z^3-39z^2-15z-2)}{2} \end{bmatrix}$$

$$M(1/z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(z^2+3z+1)(z+1)(2z+1)} & 0 \\ 0 & \frac{z(z^3-3z^2-7z-2)}{2} \end{bmatrix}.$$

Se observă din $M(1/z)$ că sistemul posedă un zerou la infinit (la $z = 0$).

Observaţia 4.9

Dacă un sistem este descris printr-o funcţie de transfer $H(s)$, acestuia i se pot calcula numai zerourile de transmisie (finite sau infinite) [Ly, 2003].

In Tabelul 4.3 sunt enumeraţi paşii necesari pentru determinarea zerourilor de transmisie infinite aferente unui sistem.

Tabelul 4.3: Algoritmul pentru determinarea zerourilor de transmisie infinite.

Se dă un sistem descris printr-o matrice de transfer.

Se cere să se determine zerourile la infinit ale sistemului.

Pasul 1: Dacă sistemul este descris prin matrice de transfer $H(s)$, se substituie $s = 1/z$, rezultând matricea de transfer $H(1/z)$.

Pasul 2: Se determină forma Smith-McMillan $M(1/z)$ aferentă reprezentării matriceale $H(1/z)$.

Pasul 3: Numărul de zerouri la $z = 0$ din $M(1/z)$ este egal cu numărul de zerouri la infinit.

4 Zerourile de decuplare

Se poate vorbi de zerouri de decuplare ale unui sistem (S) numai dacă acesta este descris în spaţiul stărilor:

$$(S) : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{4.12}$$

cu $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ şi $y \in \mathbb{R}^p$.

O astfel de descriere a sistemului oferă o imagine mult mai apropiată de realitate şi mai transparentă decât descrierea sub formă de matrice de transfer:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{4.13}$$

In cazul sistemelor multivariabile, $H(s)$ din (4.13) este o matrice de funcţii raţionale. In aceste funcţii pot apărea anulări (simplificări) între numitorii şi numărătorii funcţiilor raţionale din $H(s)$. In continuare se vor studia probleme legate de astfel de simplificări, de efectele lor în matricea de transfer rezultată şi astfel se ajunge la *zerourilor de decuplare*.

4.1 Zerourile de decuplare pe intrare

Definiţia 4.6 *Zerourile de decuplare pe intrare*[8] *ale sistemului S sunt [Ly, 2003; Schrader şi Sain, 1989; Patel şi Munro, 1982]:*

- *Valorile s pentru care matricea* $Q_i = (sI - A)^{-1} \cdot B$ *are rangul mai mic decât m:*

$$rang(Q_i) = rang[(sI - A)^{-1} \cdot B] < m \tag{4.14}$$

sau

- *Zerourile polinoamelor invariante*[9] *ale matricei:*

$$P_i(s) = [sI - A \;\; B]; \tag{4.15}$$

sau

- *Polii necontrolabili ai matricei* $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Din definiţia de mai sus se observă faptul că zerourile de decuplare pe intrare depind numai de matricile A sau B, indiferent dacă sunt determinate din relaţiile (4.14) şi (4.15) sau dacă sunt "polii necontrolabili" ai sistemului.

In [Lewis, 2004b] autorul demonstrează legătura dintre zerourile de decuplare pe intrare şi controlabilitatea unui sistem este demonstrată de .

Teorema 4.8 *Un sistem este complet controlabil dacă şi numai dacă el nu prezintă zerouri de decuplare pe intrare.*

Efectele unor astfel de zerouri sunt că sistemul nu mai poate fi complet controlat adică o intrare *nu mai este cuplată* cu o anumită stare.

Se doreşte sinteza unui sistem de control fără zerouri de decuplare pe intrare, astfel încât determinarea existenţei unor astfel de zerouri este foarte importantă.

Ex. 4.11 Se consideră următorul sistem descris în spaţiul stărilor:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Se calculează matricea $P_i(s)$ după care aceasta se aduce la forma *Smith*:

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} s+1 & -4 & 2 \\ 0 & s-3 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{s}{2} - \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-3 & 0 \end{bmatrix}}_{P_i} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \frac{s}{2} \end{bmatrix}}_{R}$$

Polinoamele invariante ale matricei P_i sunt:

$$\begin{aligned} n_1(s) &= 1 \\ n_2(s) &= s - 3 \end{aligned}$$

[8] Notate pe scurt z.d.i.

[9] Polinoamele invariante ale unei matrice polinomiale $P(s)$ sunt polinoamele în s ale formei matriceale *Smith* atasate matricei $P(s)$.

Singurul zerou al polinoamelor invariante ale matricei P_i este $s = 3$, şi în consecinţă este zerou de decuplare pe intrare al sistemului.

Pentru a verifica faptul că $s = 3$ este şi pol necontrolabil al sistemului se calculează polii acestuia: $\hat{s}_1 = -1$ şi $\hat{s}_2 = 3$.

Intâi se verifică controlabilitatea sistemului. Matricea de controlabilitate este:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

al cărui rang este $1 < 2$, deci există un pol necontrolabil iar sistemul este necontrolabil. Se verifică dacă $s = 3$ este polul necontrolabil prin aplicarea testului PBH:

$$P_i(s)\,|_{s=3} = \begin{bmatrix} s+1 & -4 & 2 \\ 0 & s-3 & 0 \end{bmatrix}_{s=3} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangul $P_i(s)|_{s=3}$ este $1 < 2$, deci este un pol necontrolabil.

Se mai poate verifica şi că există un vector $w^T = [0, \alpha], \quad \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât să satisfacă şi primul criteriu al testului PBH şi anume: $w^T P_i = 0$ şi $w^T B = 0$.

Din exemplul anterior se poate observa legătura directă existentă între zerourile de decuplare pe intrare şi proprietatea de controlabilitate a unui sistem. Un astfel de zerou *decuplează* o intrare de o anumită stare, astfel încât sistemul devine necontrolabil.

$\boxed{\text{Ex. 4.12}}$ Să se verifice dacă sistemul descris prin:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{aligned},$$

prezintă zerouri de decuplare pe intrare.

Se verifică zerourile polinoamelor invariante ale matricei:

$$P(s) = [\; sI - A \quad B \;] = \begin{bmatrix} s & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & s+4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & s+2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{s}{6} - \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 2 + \frac{s}{2} & -\frac{1}{2} \\ -(1+s)(s+4) & 3s+3 & 3s^2+15s+18 & -3s-9 \end{bmatrix}}_{L(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{S(s)}.$$

$$\cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & s+7 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -\frac{1}{9} & s-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{72} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{s+1}{36} & -s^2-4s-3 & -s-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{s}{24}+\frac{1}{8} & s^2+4s+3 & 0 \end{bmatrix}}_{R(s)}$$

Matricea $S(s)$ prezintă un singur polinom invariant, deci zeroul de decuplare pe intrare al sistemului este $d.z.i = \{-1\}$.

In Exemplul 3.14 din §3 se poate observa că $s = -1$ este şi pol necontrolabil al sistemului şi de asemenea el nu apare în matricea de transfer rezultată:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{s}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Nota 4.9

Zerourile de decuplare pe intrare nu apar în reprezentarea matricei de transfer rezultate, având ca efect o reprezentare de ordin inferior a sistemului [Patel şi Munro, 1982].

In exemplul anterior zeroul $s = -1$ nu apare în matricea de transfer rezultată, el fiind anulat de un pol la $s = -1$. Indiferent dacă în matricea $H(s)$ rezultată proiectantul realizează matematic această simplificare, anularea se va face funcţional!

4.2 Zerouri de decuplare pe ieşire

Definiţia 4.7 *Zerourile de decuplare pe ieşire*[10] *ale sistemului* (S) *sunt[Ly, 2003; Schrader şi Sain, 1989; Patel şi Munro, 1982]:*

- *Valorile s pentru care matricea* $Q_o = C \cdot (sI - A)^{-1}$ *are rangul mai mic decât p:*

$$rang(Q_o) = rang[C \cdot (sI - A)^{-1}] < p \tag{4.16}$$

sau

- *Zerourile polinoamelor invariante ale matricei:*

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

[10]Notate pe scurt z.d.o.;

sau

- *Polii neobservabili ai matricei* $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$.

Zerourile de decuplare depind numai de matricele A şi C şi ”sunt poli neobservabili” ai sistemului [Lewis, 2004b].

Efectul unor astfel de zerouri este că prin anularea influenţei polului corespunzător, starea respectivă nu mai poate fi urmărită la ieşirea sistemului. Din nou apare un fenomen de *decuplare* a unei stări, dar în acest caz cu ieşirea sistemului.

In sinteza unui sistem de control trebuie evitată prezenţa unor zerouri de decuplare pe ieşire.

Teorema 4.9 *Un sistem este complet observabil dacă şi numai dacă el nu prezintă zerouri de decuplare pe ieşire.*

Nota 4.10

Zerourile de decuplare pe ieşire nu apar în reprezentarea funcţiei de transfer rezultate, având ca efect o reprezentare de ordin inferior a sistemului [Patel şi Munro, 1982].

Ex. 4.13 Se consideră următorul sistem în spaţiul stărilor [Ly, 2003]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} .$$

Se urmăreşte determinarea eventualelor zerouri de decuplare pe ieşire.

Se calculează matricea $P_o(s)$:

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 8 \\ -4 & s-7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & s+1 \end{bmatrix}}_{L(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & s-3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_o(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{-5-s}{8} \end{bmatrix}}_{R(s)}$$

Polinoamele invariante ale matricei $P_o(s)$ sunt $n_1 = 1$ şi $n_2(s) = s - 3$, deci sistemul prezintă un singur zerou de decuplare pe ieşire la $s = 3$.

Pentru a verifica dacă acest zerou este şi pol neobservabil se calculează matricea de observabilitate:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este $1 < 2$, deci sistemul nu este complet observabil. Polii sistemului sunt $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 3$. Polul neobservabil se determină utilizând testul PHB:

$$rang \begin{bmatrix} \lambda_2 I - A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1,$$

deci polul $\lambda_2 = 3$ este neobservabil.

$\boxed{\text{Ex. 4.14}}$ Să se calculeze zerourile de decuplare pe ieşire ale sistemului:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea $P_o(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$ este:

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -s-6 & 1 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{s+1}{11} & \frac{-s^2-7s-17}{11} & \frac{1}{11} \\ -11 & 6 & 17s+6 & -(s+6)(17s+6) & 11s+6 \end{bmatrix}}_{L(s)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_o(s)} \cdot$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{s}{11} & \frac{s+1}{11} \end{bmatrix}}_{R(s)}$$

Se observă faptul că matricea $P_o(s)$ nu prezintă polinoame invariante în s, deci sistemul nu posedă zerouri de decuplare pe ieşire.

De asemenea se poate observa din Exemplul 3.20, §3, că sistemul este complet observabil.

4.3 Zerourile de decuplare pe intrare şi pe ieşire

$\boxed{\text{Definiţia 4.8}}$ *Zerourile de decuplare pe intrare şi pe ieşire*[11] *ale unui sistem S sunt:*

- *acele zerouri ale sistemului care sunt şi zerouri de decuplare pe intrare cât şi zerouri de decuplare pe ieşire;*
- *valorile s care sunt şi polii necontrolabili şi neobservabili ai sistemului (A, B, C, D).*

V. Patel şi N. Munro [Patel şi Munro, 1982] prezintă o procedură simplă pentru determinarea *z.d.i.o.* când se cunosc *z.d.i.* şi *z.d.o.*, expusă în Tabelul 4.4.

4.4 Zerourile de decuplare ale sistemului

$\boxed{\text{Definiţia 4.9}}$ *Zerourile de decuplare*[12] *ale sistemului sunt elementele mulţimii zerourilor de decuplare pe intrare şi a zerourilor de decuplare pe ieşire.*

[11]Notate pe scurt z.d.i.o.;

[12]Notate pe scurt z.d.;

Tabelul 4.4: Algoritmul pentru determinarea zerourilor de decuplare pe intrare şi pe ieşire ale unui sistem.

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor.

Se cere să se determine zerourile de decuplare pe intrare şi pe ieşire ale sistemului.

Pasul 1: Se elimină din mulţimea zerourilor de decuplare pe ieşire (z.d.o.), mulţimea zerourilor de decuplare pe intrare (z.d.i.):

$$\{z.d.o_e\} = \{z.d.o.\} - \{z.d.i.\}$$

Pasul 2: Zerourile de decuplare pe intrare şi pe ieşire (z.d.i.o.) sunt:

$$\{z.d.i.o.\} = \{z.d.o.\} - \{z.d.o_e\}$$

In Tabelul 4.5 este prezentată o metodă simplă [Patel şi Munro, 1982] pentru determinarea $z.d.$ când se cunosc $z.d.i.$ şi $z.d.o.$

Tabelul 4.5: Algoritmul pentru determinarea zerourilor de decuplare ale sistemului.

Se dă un sistem descris în spaţiul stărilor.

Se cere să se determine zerourile de decuplare ale sistemului.

Pasul 1: Se calculează mulţimea formată din reuniunea zerourile de decuplare pe intrare (z.d.i.) şi a zerourile de decuplare pe ieşire (z.d.o.).

Pasul 2: Se elimină din reuniunea zerourile de decuplare pe intrare (z.d.i.) şi a zerourile de decuplare pe ieşire (z.d.o.), zerourile de decuplare pe intrare şi pe ieşire (z.d.i.o.):

$$\{z.d.\} = \{z.d.i. \cup z.d.o.\} - \{z.d.i.o.\}$$

Evident dacă se cunosc zerourile de decuplare ale sistemului, polii funcţiei (matricei) de transfer rezultate se pot determina prin eliminarea din valorile proprii ale matricei A a zerourilor de decuplare, care vor elimina polii corespunzători din funcţia (matricea) de transfer a sistemului.

5 Zerourile invariante

Zerourile invariante ale sistemului sunt acele zerouri care sunt invariante într-o buclă închisă [Patel şi Munro, 1982]. Cunoaşterea acestor zerouri este deosebit de importantă în studierea robusteţei sistemului la perturbaţii. Dacă se cunosc zerourile invariante ale unui sistem în buclă deschisă se poate studia robusteţea la perturbaţii pe calea directă când sistemul este în buclă închisă [Bosgra et al., 2003].

Invarianţa zerourilor unui sistem descris în spaţiul stărilor nu se referă însă numai la invarianţa acestora într-o buclă de reglare ci şi la operaţii sau transformări care se pot aplica asupra intrărilor, stărilor sau a ieşirilor sistemului [Ly, 2003].

Zerourile invariante se pot determina numai din forma de reprezentare Rosenbrock a sistemelor [Ly, 2003].

Definiţia 4.10 *Zerourile invariante ale unui sistem descris sub reprezentarea matriceală Rosenbrock*

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix},$$

sunt rădăcinile polinoamelor invariante ale matricei $P(s)$.

Ex. 4.15 Fie sistemul:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

Reprezentarea sub matrice Rosenbrock a sistemului este:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s+5 & 8 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & s-7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & s-3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru determinarea polinoamelor invariante ale matricei $P(s)$ se calculează forma Smith de reprezentare a matricei:

$$P(s) = L(s) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2+2s-15 & 0 \end{bmatrix} \cdot R(s)$$

Polinoamele invariante sunt $n_1(s) = n_2(s) = n_3(s) = 1$ şi $n_4(s) = s^2 + 2s - 15$. Rezultă că zerourile invariante ale sistemului sunt $s = \{3, -5\}$.

In continuare se verifică care dintre acestea sunt zerouri de transmisie şi care sunt de decuplare.

Matricea de transfer a sistemului este:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Analizând $H(s)$ (forma Smith-McMillan este chiar această formă) deducem că $s = -5$ este zerou de transmisie.

Din matricea de transfer rezultă că sistemul posedă două zerouri de decuplare (nu se ştie exact dacă pe intrare sau pe ieşire) din moment ce sistemul original era de ordinul trei iar în funcţia rezultată apare un singur pol.

Se verifică dacă $s = 3$ este zerou de decuplare pe intrare. Se calculează matricea:

$$P_i(s) = [\ sI - A \quad B\ ] = \begin{bmatrix} s+5 & 8 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & s-7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & s-3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Forma Smith este:

$$P_i(s) = L(s) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R(s),$$

cu polinoamele invariante $n_1(s) = n_2(2) = n_3(s) = 1$, deci sistemul nu prezintă nici-un zerou de decuplare pe intrare.

Se verifică dacă $s = 3$ este zerou de decuplare pe ieşire:

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5 & 8 & 0 \\ -4 & s-7 & 0 \\ -1 & -2 & s-3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = L(s) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 - 6s + 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R(s)$$

Forma Smith a matricei $P_o(s)$ prezintă polinoamele invariante $n_1(s) = n_2(s) = 1$ şi $n_3(s) = s^2 - 6s + 9$, deci $s = 3$ sunt două zerouri de decuplare pe ieşire. Rezultă că acestea sunt şi doi poli neobservabili, care nu mai apar în matricea de transfer $H(s)$.

Din exemplul de mai sus se pot susţine câteva observaţii foarte utile cu privire la zerourile de transmisie, cele de decuplare şi zerourile invariante ale sistemului.

Nota 4.11

Toate zerourile de transmisie sunt zerouri invariante ale sistemului [Ly, 2003].

Pornind de la remarca de mai sus, o altă modalitate de a determina zerourile de transmisie este:

Observaţia 4.10

Zerourile de transmisie sunt acele zerouri invariante care nu sunt zerouri de decuplare [Ly, 2003].

Nota 4.12

Un zerou de decuplare nu este şi necesar un zerou invariant.

Interpretarea notei de mai sus este că un pol necontrolabil sau neobservabil nu este neaparat un zerou invariant al sistemului.

6 Zerourile sistemului

Definiţia 4.11 *Zerourile sistemului sunt totalitatea zerourilor invariante, a celor de decuplare şi a zerourilor la infinit.*

In Figurile 4.10 şi 4.9 este prezentată sugestiv formarea zerourilor sistemului.

Dacă sistemul este descris sub formă de matrice de transfer singurele zerouri care se pot determina sunt cele de transmisie finite şi infinite.

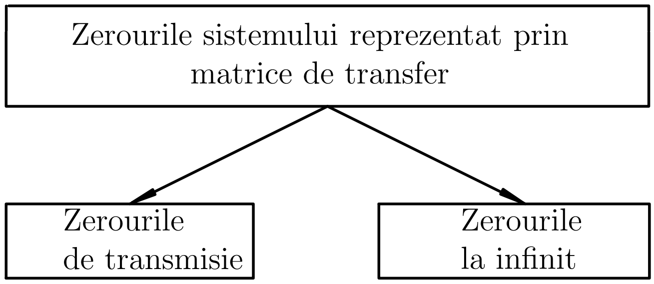


Figura 4.9: Zerourile sistemului reprezentat sub formă de matrice de transfer.

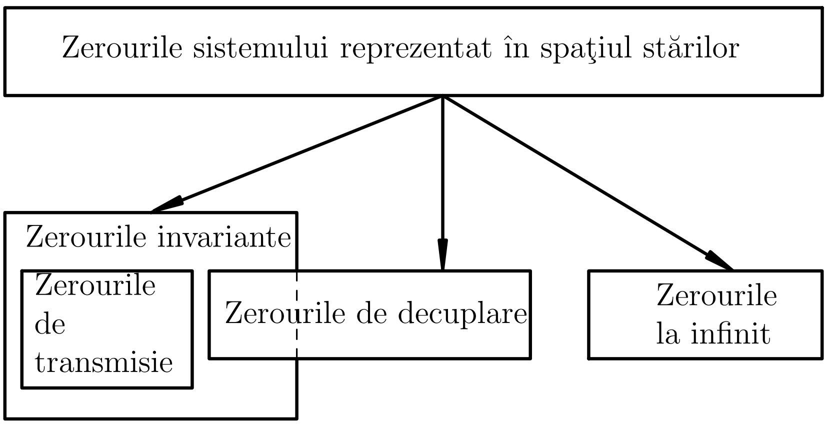


Figura 4.10: Zerourile sistemului reprezentat în spaţiul stărilor.

Pentru calcularea zerourilor de decuplare şi a celor invariante este necesar ca sistemul să fie reprezentat în spaţiul stărilor [Ly, 2003].

7 Importanţa cunoaşterii zerourilor sistemelor

Cunoaşterea zerourilor sistemelor, fie ele monovariabile sau multivariabile, este importantă sub două aspecte care intervin în etapa de sinteză a unui controler:

- poziţia lor relativă în spaţiul stărilor;
- poziţia lor relativă faţă de polii sistemului.

Un exemplu în care este importantă poziţionarea polilor şi în special a zerourilor unui sistem este când se urmăreşte sinteza unui controler care să asigure un control robust şi o atenuare a perturbaţiilor pe un domeniu de frecvenţe cât mai larg.

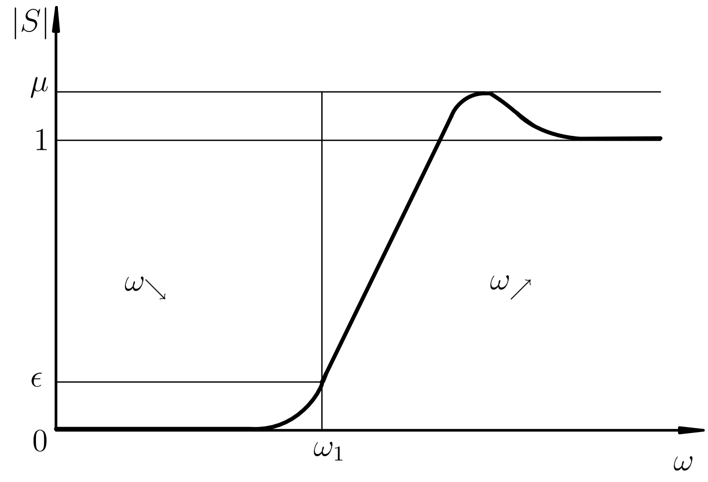


Figura 4.11: Limitele funcţiei de sensibilitate la frecvenţe joase ($\omega \searrow$) şi înalte ($\omega \nearrow$).

In sinteza unui controler trebuie avut în vedere şi aspectul privind caracterul complementar dintre funcţia de sensibilitate (S) a unei bucle de control şi complementara acesteia (T).

Cerinţa care se impune pentru aceste două caracteristici ale sistemului de reglare în buclă închisă este ca ele să fie maxime şi minime (în mod complementar) în domenii de frecvenţă diferite. O problema apare în comportamentul celor două caracteristici în zona de trecere [13].

In cazul sistemelor minimale, adică al sistemelor care au toţi polii şi toate zerourile situate în semiplanul stâng, problema este rezolvată relativ simplu prin limitarea scăderii amplificării buclei cu max. $1-2\ dB$/decadă.

Insă în cazul sistemelor neminimale, adică care posedă zerouri în semiplanul drept această condiţie nu mai poate fi îndeplinită deoarece faza sistemului nu mai urmăreşte aceeaşi "direcţie" cu cea a modulului sistemului. Efectul imediat în cazul unor astfel de sisteme este reducerea amplificării [Bosgra et al., 2003].

In [Freudenberg şi Looze, 1985] s-au studiat efectele unor poli sau zerouri situate în semiplanul drept asupra robusteţii unui sistem, prin efectul lor direct asupra funcţiilor S şi T. Astfel s-a demonstrat că pentru un sistem neminimal dependenţa dintre funcţia de sensibilitate S şi frecvenţă este influenţată şi de poziţiile zerourilor din semiplanul drept, precum şi de poziţiile relative între acestea şi eventualii poli instabili.

In Figura 4.11 se prezintă dependenţa $|S(j\omega)|$ în general. Se impune ca la frecvenţe joase ($\omega \searrow$), $|S(j\omega)|$ să fie cât mai mică, şi în plus să fie menţinută astfel pe un interval de frecvenţe joase cât mai lung. Desemenea pentru frecvenţe înalte ($\omega \nearrow$), $|S(j\omega)|$ trebuie să fie cât mai apropiată de 1 pentru a nu se atinge punctul $(-1,0)$ în diagrama Nyquist.

Freundenberg şi Loose au demonstrat că aceste două condiţii nu pot fi îndeplinite simultan la valorile dorite. Astfel cu cât banda de frecvenţe joase pentru care $|S|$ este minimă (zona până la ω_1) este mai mare cu atât valoarea de vârt μ este mai mare. Dacă $|S|$ prezintă vârfuri în jurul zonei în care diagrama Nyquist intersectează cercul

[13]Zona în care modulul amplificării în buclă deschisă este aproximativ egal cu 1 ($0\ dB$) în domeniul frecvenţial.

unitate, şansele ca aceasta să atingă punctul $(-1, 0)$ sunt mai mari. Altfel spus, atenuarea perturbaţiilor la frecvenţe joase se poate realiza numai cu costul unor amplificări mari la perturbaţii înalte.

Efectele zerourilor situate în semiplanul drept sunt [Bosgra et al., 2003]:

- Limita superioară pentru care se poate menţine S la valori scăzute la frecvenţe joase este limitată de poziţia (valoarea) celui mai mic zerou situat în semiplanul drept. Poziţia acestui zerou va inflenţa direct atenuarea perturbaţiilor în bucla închisă de control.

- Dacă sistemul prezintă poli instabili, atenuarea perturbaţiilor este afectată. Mai mult, dacă există perechi poli - zerouri situate în semiplanul drept, atenuarea perturbaţiilor este cu atât mai influenţată (în sens negativ) cu cât aceste perechi sunt mai apropiate.

- Dacă sistemul nu posedă zerouri în semiplanul drept, lăţimea de bandă maximă pentru atenuarea perturbaţiilor este dată numai de capacitatea sistemului[14].

Identic şi pentru funcţia complementară T a sensibilităţii efectele prezenţei unor poli instabili şi/sau a unor zerouri situate în semiplanul drept pot fi rezumate astfel [Bosgra et al., 2003]:

- Limita inferioară pentru care T poate fi făcută mică este influenţată de poziţia celui mai mare pol instabil. Intotdeauna această limită este mai mare decât modulul polului instabil.

- Dacă sistemul prezintă şi perechi poli-zerouri situate în semiplanul drept, această limită este şi mai afectată, efectul amplificându-se dacă polul şi zeroul sunt apropiate. In plus dacă aceste valori se aproprie până devin identice pot apărea moduri necontrolabile sau neobservabile în sistem.

In concluzie se poate afirma că zerourile din semiplanul drept limitează frecvenţa până la care S poate fi făcută mică la frecvenţe joase şi polii instabili limitează frecvenţa de la care T poate fi făcută mică la frecvenţe înalte.

Astfel importanţa poziţionării zerourilor este importantă şi faţă de cea a polilor dar şi fată de axa absciselor în spaţiul stărilor. Cunoaşterea acestor poziţionări devine extrem de importantă în etapa de sinteză a unui controler prin care adesea se doreşte atenuarea perturbaţiilor din bucla închisă dar şi o robusteţe la perturbaţii parametrice în structura sistemului.

8 Probleme de studiu

Problema 4.1. Fie sistemul descris prin:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & -\dfrac{2}{s+1} \\ -\dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

[14]Fiecare sistem posedă o limită pentru comanda pe care o poate primi. Această caracteristică poartă numele de *capacitatea sistemului* [Bosgra et al., 2003].

Să se determine zerourile de transmisie aferente matricei de transfer $H(s)$.

Problema 4.2. Să se analizeze pe baza problemei anterioare dacă la un sistem $MIMO$ intrarea nemărginită implică automat ieşire mărginită.

Problema 4.3. Un sistem multivariabil este descris în spaţiul stărilor prin ecuaţiile:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

1. Să se determine polii sistemului.
2. Să se determine dacă sistemul prezintă sau nu zerouri de decuplare.
3. Să se determine matricea de transfer aferentă descrierii sistemului şi să se evidenţieze eventualele compensări poli - zerouri.
4. Să se determine eventualele zerouri de transmisie existente.

Problema 4.4. Se consideră sistemul:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -7 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} u.$$

Să se determine zerourile sistemului.

Rezumat

Poziţionarea polilor şi a zerourilor unui sistem multivariabil influenţează prin valorile lor performanţele de control.

S-au prezentat diferite metode pentru determinarea polilor sistemelor multivariabile, atât în spaţiul stărilor cât şi din matricea de transfer.

Sistemele multivariabile posedă mai multe tipuri de zerouri.

O categorie aparte de zerouri sunt cele de transmisie, finite sau infinite.

La sistemele multivariabile pot apărea compensări între poli şi zerouri dacă sistemul este necontrolabil sau neobservabil, rezultând astfel zerouri de decuplare.

O altă categorie de zerouri sunt zerourile invariante care nu pot fi influenţate într-o buclă inchisă.

In final s-a prezentat succint importanţa cunoaşterii poziţionării polilor şi a zerourilor în spaţiul stărilor.

CAPITOLUL 5

Concluzii

Sistemele multivariabile prezintă prin natura lor un grad ridicat de complexitate. Această complexitate este generată în primul rând de numărul de intrări şi/sau ieşiri ale sistemului. Aceste semnale nu sunt însă direct legate de sistemul în cauză ci sunt legate îndeosebi de finalitatea sistemului controlat.

Pe lângă acest aspect, complexitatea sistemelor multivariabile rezidă şi în conexiunile existente între diferite subsisteme ale sistemului considerat. Deşi la o vedere de ansamblu asupra sistemului, aceste conexiuni sunt mai dificil de observat, efectele lor sunt prezente şi pot fi evaluate.

Două dintre aceste efecte sunt de exemplu pierderea proprietăţilor de controlabilitate şi observabilitate. Aceste două proprietăţi sunt proprietăţi intrinseci ale sistemului şi evaluează capacitatea sistemului de a-i fi controlate şi apoi observate la ieşire, modurile de comportare ale stărilor sistemului. Aceste două proprietăţi sunt deosebit de importante în vederea aplicării unei strategii de control, mai ales că toată teoria controlului cu reacţie negativă se bazează pe existenţa acestor două proprietăţi.

Problema controlabilităţii unui sistem este asimilată cu modul în care intrările sistemului influenţează stările acestuia. Problema observabilităţii unui sistem este asociată cu modul în care ieşirile sistemului surprind comportamentul stărilor sistemului.

S-au prezentat diferite metode de verificare a existenţei acestor două proprietăţi (metode bazate pe matricea grammian, bazate pe matricea de controlabilitate, respectiv observabilitate), metode pentru determinarea modurilor care implică cele două proprietăţi (testul PBH pentru controlabilitate/observabilitate), precum şi metode pentru determinarea stărilor care influenţează aceste proprietăţi (descompunerea modală a sistemelor).

De asemenea s-au expus şi modalităţi pentru determinarea subspaţiilor de controlabilitate/necontrolabilitate, respectiv observabilitate/neobservabilitate. Proprietăţile de controlabilitate şi observabilitate au fost studiate şi din punct de vedere al sistemelor duale, când ele se păstrează dar sunt inversate. Astfel dacă sistemul dual este controlabil, atunci sistemul iniţial este observabil şi vice-versa.

Partea a doua a lucrării este dedicată analizei sistemelor multivariabile din punct de vedere al polilor şi al zerourilor acestuia. Poziţionarea polilor şi a zerourilor sistemelor influenţează, prin valorile lor, performanţele de control.

S-au definit polii şi zerourile unui sistem şi s-au prezentat diferite metode pentru determinarea polilor sistemelor multivariabile, reprezentate atât în spaţiul stărilor cât şi sub formă de matrice de transfer. S-au atins şi tratat probleme legate de multiplicitatea polilor în cazul sistemelor monovariabile şi multivariabile. Tot aici s-a definit şi ordinul McMillan asociat unui pol şi unui sistem multivariabil. S-a tratat relaţia existentă între valorile proprii ale matricei de stare şi polii matricei de transfer şi s-a analizat rezultatul acestei relaţii privind minimalitatea reprezentării sistemului.

De asemenea s-a arătat că sistemele multivariabile posedă mai multe tipuri de zerouri.

O categorie aparte de zerouri sunt zerourile de transmisie, finite sau infinite. Aceste zerouri au ca efect direct blocarea cel puţin a unei ieşiri a sistemului, chiar dacă la intrare se aplică un semnal diferit de zero. S-au prezentat diferite metode pentru determinarea zerourilor de transmisie în funcţie de forma de reprezentare a sistemului. Astfel, dacă sistemul este reprezentat sub formă de matrice de transfer, zerourile de transmisie se pot determina din forma Smith-McMillan asociată matricei de transfer. Zerourile de transmisie sunt rădăcinile polinomului zero asociat matricei Smith-McMillan. In caz particular, când există un sistem cu un număr egal de intrări şi ieşiri şi când matricea de transfer $H(s)$ nu prezintă poli şi zerouri la aceleaşi frecvenţe, zerourile de transmisie sunt soluţiile ecuaţiei $|H(s)| = 0$. Existenţa unui zerou de transmisie z_0 este echivalent cu reducerea rangului matricei de transfer pentru valoarea $s = z_0$. Dacă sistemul este reprezentat în spaţiul stărilor, zerourile de transmisie sunt prezente la acele valori s la care matricea Rosenbrock îşi micşorează rangul.

La sistemele multivariabile pot apărea compensări între poli şi zerouri dacă sistemul este necontrolabil sau neobservabil, rezultând astfel zerouri de decuplare pe intrare, respectiv de ieşire. Aceste tipuri de zerouri sunt cauza pierderii proprietăţilor de controlabilitate şi observabilitate. Metodele de determinare a acestor zerouri sunt strâns legate de metodele prezentate la studiul controlabilităţii şi observabilităţii sistemelor. Este de menţionat că pot exista zerouri de decuplare atât pe intrare şi pe ieşire, iar aceste tipuri de zerouri sunt denumite zerouri de decuplare pe intrare şi pe ieşire.

O altă categorie de zerouri sunt zerourile invariante care nu pot fi influenţate într-o bucla închisă. Aceste zerouri se pot determina numai dacă sistemul este reprezentat în spaţiul stărilor şi conţin mulţimea zerourilor de transmisie şi o parte din mulţimea zerourilor de decuplare. Zerourile sistemului sunt formate din mulţimea zerourilor de transmisie (finite şi infinite) şi mulţimea zerourilor de decuplare.

Elementele teoretice prezentate au fost susţinute prin exemple concludente. In anexa lucrării sunt prezentate şi secvenţele *Maple* pentru rezolvarea problemelor matematice din cadrul exemplelor prezentate.

De asemenea elementele teoretice (definiţii, teoreme) prezentate sunt preluate din literatura de specialitate, făcându-se referiri bibliografice în acest sens. Demonstraţiile acestor noţiuni aparţin în totalitate autorilor lucrărilor menţionate. Forma de reprezentare a ideilor, susţinerea şi justificarea lor aparţin autorului acestui material.

Lucrarea de faţă este un referat de doctorat, în cadrul stagiului de doctorat cu tema de cercetare *Contribuţii la conducerea şi supervizarea integrată a sistemelor complexe*. Prin acest referat s-a urmărit şi soluţionat câteva probleme specifice analizei sistemelor multivariabile: controlabilitatea, observabilitatea, poli, zerouri, forma minimală de reprezentare a sistemului. Contribuţiile autorului privesc modalitatea de punere a problemelor şi modalitatea de abordare a acestora în vederea soluţionării lor.

Deoarece în literatura de specialitate din România nu există o tratare asemănătoare a problemelor ridicate, prezentul referat se doreşte a fi publicat în seria *Rapoarte Tehnice* ale *Universităţii Tehnice din Cluj Napoca* sub titlul *Elemente de teoria sistemelor multivariabile.*

ANEXA

Răspunsuri la problemele propuse

Problema 3.1

Se alege o matrice de intrare B:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Se calculează matricea de controlabilitate Φ_C:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \alpha b_{11} & \alpha b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & \alpha b_{21} & \alpha b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & \alpha b_{31} & \alpha b_{32} \end{bmatrix}$$

Rangul matricei de controlabilitate este cel mult $2 < 4$ (sunt maxim două coloane liniar independente) deci sistemul nu este controlabil.

Problema 3.2

Se determină matricea de controlabilitate:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei de controlabilitate este $2 < 3$ deci sistemul nu este controlabil şi există un mod necontrolabil. Pentru a determina acest mod se calculează valorile proprii ale matricei A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$ şi $\lambda_3 = -2 - \sqrt{3}$.

Pentru fiecare valoare $s = \lambda_i$ în parte se verifică dacă rangul matricei $[\lambda_i I - A \quad B]$ este maxim:

- $s = \lambda_1 = -1$, rezultă $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ cu rangul $2 < 3$, deci $\lambda_1 = -1$ determină un mod necontrolabil;
- $s = \lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$, rezultă $\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1+\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ cu rangul maxim, 3, deci $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$ determină un mod controlabil;
- $s = \lambda_3 = -2 - \sqrt{3}$, rezultă $\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1-\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ cu rangul 3, deci $\lambda_3 = -2 - \sqrt{3}$ determină un mod controlabil.

Pentru calcularea subspaţiului de controlabilitate $\mathcal{X}_c$ şi a celui de necontrolabilitate $\bar{\mathcal{X}}_c$, se determină matricea de transformare $P = [P1 \;\; P2]$, astfel:

- deoarece rangul matricei de controlabilitate a sistemului este $n_1 = 2$, rezultă imediat că $dim(\mathcal{X}_c) = 2$ şi $dim(\bar{\mathcal{X}}_c) = 1$;
- se construieşte matricea P_1, utilizând prima şi a doua coloană a matricei Φ_c:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Coloanele matricei P_1 formează şi o bază pentru subspaţiul $\mathcal{X}_c$.
- matricea P_2 este formată dintr-un vector coloană x care satisface ecuaţia $\Phi_c^T x = 0$, adică $P_2 = \mathcal{K}er(\Phi_c^T)$:

$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

  Coloana matricei P_2 formează şi o bază pentru subspaţiul $\bar{\mathcal{X}}_c$.

Pentru descompunerea sistemului în partea controlabilă şi în partea necontrolabilă se parcurg etapele:

- se scrie matricea de transformare P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- folosind matricea de transformare P se scriu matricele sistemului echivalent:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- se identifică uşor submatricele:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_{22} = [-1], \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- se verifică dacă perechea (A_{11}, B_1) este controlabilă:

$$\tilde{\Phi}_c = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}B & \tilde{A}_{11}\tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

  Cum rangul matricei $\tilde{\Phi}_c$ este egal cu 2, rezultă că perechea (A_{11}, B_1) este controlabilă.

Problema 3.3

1. Se calculează matricea de controlabilitate:

$$\Phi_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este $2 = n$ deci sistemul este complet controlabil.

2. Se calculează matricea de observabilitate:

$$\Phi_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este $1 < 2$, deci sistemul nu este observabil.

Se determină valorile proprii ale matricei A: $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = -2$. Se cunoaşte deja că unul dintre modurile determinate de cele două valori proprii nu este observabil. Pentru a determina acest mod se determină rangul matricei $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$, pentru $s = \lambda_1 = -1$ şi $s = \lambda_2 = -2$:

- pentru $s = \lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, al cărei rang este 1, deci modul determinat de $\lambda = -1$ implică neobservabilitatea sistemului;

- pentru $s = \lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, al cărei rang este 2, deci modul detrminat de $\lambda = -2$ este observabil.

Pentru a verifica dacă starea $x = [1, 5]^T$ este observabilă este necesar să se determine subspaţiile observabile şi neobservabile ale sistemului, după care se verifică dacă vectorul $x = [1, 5]^T$ este inclus complet în subspaţiul observabil. Pentru aceasta se parcurg etapele:

- cum rangul matricei de observabilitate este egal cu 1 rezultă că $dim(\mathcal{X}_o) = 1$ şi $dim(\bar{\mathcal{X}}_o) = 1$.
- se scrie matricea P_1 folosind prima coloană a matricei Φ_c^T:
$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Coloana matricei P_1 este o bază pentru subspaţiul $\mathcal{X}_o$.
- se scrie matricea P_2 utilizând un vector coloană x care satisface ecuaţia $\Phi_c x = 0$, adică $P_2 = \mathcal{K}er(\Phi_c)$:
$$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Coloana matricei P_2 este o bază pentru subspaţiul $\bar{\mathcal{X}}_o$.
- se scrie matricea de transformare $P = [P_1 \;\; P_2]$:
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
- se verifică dacă vectorul $x = [1, 5]^T$ este inclus complet în subspaţiul observabil. Pentru aceasta se calculează:
$$x = P \begin{bmatrix} x_o \\ \bar{x}_o \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_o \\ \bar{x}_o \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$
Cum există o componentă nenulă $\bar{x}_o = [2]$ situată în subspaţiul neobservabil, rezultă că vectorul nu este observabil.

3. Matricea de transfer a sistemului este:
$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+2} & -\dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

Determinantul matricei de transfer este identic zero, $|H(s)| \equiv 0$, şi în consecinţă sistemul nu este controlabil funcţional.

4. Dacă $C = [1 \quad 1] \Rightarrow m = 2$, $p = 1$ deci sistemul, în acest caz, este controlabil funcţional dacă şi numai dacă există un minor de dimensiune 1×1 din $H(s)$ identic diferit de zero. In acest caz:

$$H(s) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{s+2} & -\dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix},$$

deci sistemul este controlabil funcţional.

Problema 3.4

Pentru cotrolabilitatea pe ieşire se aplică Teorema 3.8:

$$rang \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 0 & 18 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Cum rangul matricei este mai mic decât numărul de ieşiri ale sistemului, rezultă că sistemul nu este controlabil pe ieşire. Accest lucru presupune că ieşirea sistemului este cuplată cu o stare necontrolabilă.

Se determină valorile proprii ale matricei A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -5$ şi se determină modurile controlabile utilizând testul PHB:

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 I - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este $2 < 3$ deci modul determinat de $\lambda_1 = -1$ nu este controlabil.

$$\lambda_2 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_2 I - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este 3, deci modul determinat de $\lambda_1 = -3$ este controlabil.

$$\lambda_3 = -5 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_3 I - A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

al cărei rang este 3, deci modul determinat de $\lambda_1 = -5$ este controlabil.

Rezultă că ieşirea sistemului este cuplată cu modul necontrolabil determinat de $\lambda_1 = -1$, astfel încât sistemul este necontrolabil pe ieşire.

Pentru examinarea controlabilităţii funcţionale se calculează matricea de transfer a sistemului:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{2}{s+3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinantul acesteia este $|H(s)| \equiv 0$, deci sistemul nu este controlabil funcţional.

Problema 4.1

Se rescrie funcţia de transfer sub forma:

$$H(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} (s+2) & -2(s+2) \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}}_{N(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}_{d(s)}$$

Cei mai mari divizori comuni (sau c.m.m.d.c) ai tututor minorilor lui $N(s)$ sunt:

$$\begin{aligned} &\delta_0 = 1 \\ &\delta_1 = c.m.m.d.c(s+2, -2(s+2), -1, s+1) = 1 \\ &\delta_2 = |N(s)| = (s+2)(s+1) - 2(s+1) = (s+2)(s-1) \end{aligned}$$

Forma Smith este:

$$S(s) = \begin{bmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\delta_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)(s-1) \end{bmatrix}$$

iar forma McMillan:

$$M(s) = \frac{S(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{s-1}{s+1} \end{bmatrix}$$

din care rezultă că $s_0 = 1$ este zerou de transmisie.

Verificare: Dacă s_0 este zerou de transmisie şi dacă intrarea este $u(t) = u_0 e^{s_0 t}$, atunci există o stare $x(t) = x_0 e^{s_0 t}$ prin care ieşirea $y(t) \to 0$, pentru $t > 0$.

Dacă $u(t) = [2e^t \;\; e^t]^T$ atunci rezultă că $U(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$ şi:

$$\left.\begin{aligned} U(s) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \\ Y(s) &= H(s) \cdot U(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{-2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Se calculează răspunsul sistemului $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = [0 \;\; e^{-t} - e^{-2t}]^T$. Se observă că pentru $t \to \infty$, $y(t) \to 0$, deci condiţia este verificată.

Problema 4.2

Analizând problema precedentă se poate observa că dacă intrarea sistemului este nemărgintită, respectiv $u(t) = u_0 e^{s_0 t}$, unde $s_0 > 0$ este un zerou de transmisie, atunci ieşirea sistemului va fi mărginită de zero.

Se verifică pentru o intrare $u(t) = [2e^t \quad e^{2t}]^T$, tot nemărginită dar care nu mai respectă condiţia precedentă. In acest caz $U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s-1} & \dfrac{1}{s-2} \end{bmatrix}$, iar ieşirea va fi:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{-2}{s+1} \\ \dfrac{-1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s-1} \\ \dfrac{2}{s-2} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{(s+1)(s-1)} - \dfrac{2}{(s+1)(s-2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)(s-1)} + \dfrac{1}{(s+2)(s-2)} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{-2}{(s+1)(s-1)(s-2)} \\ \dfrac{s^2-2s+3}{(s+1)(s-1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3(s+1)} + \dfrac{1}{s-1} - \dfrac{2}{3(s-2)} \\ -\dfrac{1}{3(s+1)} - \dfrac{3}{s-1} + \dfrac{11}{3(s-2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Prin aplicarea transformatei Laplace inverse se obţine:

$$
y(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3}e^{-t} + e^t - \dfrac{2}{3}e^{2t} \\ \\ -\dfrac{1}{3}e^{-t} - 3e^t + \dfrac{11}{3}e^{-2t} \end{bmatrix}
$$

Se calculează limita $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = -\infty$, deci ieşirea nu este mărginită.

Concluzie: La un sistem $MIMO$, intrarea nemărginită implică ieşire mărginită numai în cazul în care $u(t) = u_0 e^{s_0 t}$, unde s_0 este zerou de transmisie şi în anumite condiţii iniţiale, $x_0 \neq 0$.

Problema 4.3

1. Polii sistemului sunt:

$$
[sI - A] = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3.
$$

2. Pentru z.d.i. se calculează matricea de controlabilitate:

$$
\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 10 \end{bmatrix}
$$

Rangul matricei Φ_c este 3 $\Rightarrow \nexists$ z.d.i.

Pentru z.d.o. se calculează matricea de observabilitate:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei Φ_o este $2 < 3 \Rightarrow$ există un z.d.i.

Se verifică pe rând fiecare pol utilizând testul PHB pentru a determina care dintre cele trei moduri sunt neobservabile.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang = 3 \Rightarrow \text{mod(pol)observabil}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang = 3 \Rightarrow \text{mod(pol)observabil}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_3 I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow rang = 2 < 3 \Rightarrow \text{mod(pol)neobservabil}$$

In concluzie există un singur zerou de decuplare pe ieşire, şi anume la $s = -3$.

3. Matricea de transfer a sistemului este :

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B \;=\; \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{s}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Polii matricei de transfer sunt polii sistemului $\{-1, -2, -3\}$ din care se elimină zerourile de decuplare $\{-3\}$.

Se observă că polul $s = -3$ nu mai apare în $H(s)$ fiind eliminat de zeroul de decuplare pe ieşire prezent la $s = -3$.

4. Se calculează forma Smith-McMillan:

$$H(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s & s \end{bmatrix}}_{N(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+2)}}_{d(s)}$$

Din $N(s)$ rezultă forma Smith:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iar forma McMillan este:

$$M(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

deci sistemul nu prezintă zerouri de transmisie.

O altă metodă de a verifica existenţa zerourilor de transmisie este rezolvând ecuaţia $|H(s)| = 0$ şi rezultă tot faptul că sistemul nu prezintă zerouri de transmisie.

Problema 4.4

1. Se determină zerourile de decuplare.

Se verifică controlabilitatea:

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -10 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 12 & 9 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei Φ_c este maxim şi egal cu $3 = n$, deci sistemul este complet controlabil şi în consecinţă toate modurile sunt controlabile.

Matricea de observabilitate este:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

iar rangul ei este $1 < n$, deci sistemul posedă două moduri neobservabile. Pentru determinarea acestor două moduri se calculează polii sistemului: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ şi $\lambda_3 = 3$, şi se aplică testul PHB pentru fiecare pol în parte:

$$rang \begin{bmatrix} \lambda_1 I - A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ -1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$rang \begin{bmatrix} \lambda_2 I - A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 7 & 7 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$rang \begin{bmatrix} \lambda_3 I - A \\ C \end{bmatrix} = rang \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Rezultă că modurile la $s = 2$ şi $s = -3$ sunt neobservabile, deci ar putea fi două zerouri de decuplare pe ieşire. Pentru a verifica acest lucru se verifică dacă $s = \{2, 3\}$ sunt şi rădăcini ale polinoamelor invariante ale matricei:

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = L(s) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 + 5s + 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot R(s)$$

Polinoamele invariante ale matricei $P_o(s)$ sunt $n_1(s) = n_2(s) = 1$ şi $n_3(s) = s^2 + 5s+$ cu rădăcinile $s = \{2, 3\}$ care sunt astfel zerouri de decuplare pe ieşire, aşa cum era de aşteptat.

1. Se determină zerourile invariante ale sistemului. Acestea sunt rădăcinile polinoamelor invariante ale matricei Rosenbrock a sistemului:

$$P(s) = L(s) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^2 + 3s - 10 & 0 \end{bmatrix} \cdot R(s)$$

Polinoamele invariante ale matricei $P(s)$ sunt $n_1(s) = n_2(s) = n_3(s) = 1$ şi $n_4(s) = s^2 + 3s - 10$. Rezultă că zerourile invariante ale sistemului sunt $s = \{2, -5\}$.

Se observă că $s = 3$, deşi este zerou de decuplare, el nu este şi zero invariant pentru sistem!

2. Se calculează zerourile de transmisie. Se deduce că $s = -5$ este zerou de transmisie. Pentru verficare se calculează matricea de transfer a sistemului:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{s+1} & 0 \end{bmatrix},$$

din care se observă că $s = -5$ este zero de transmisie. Pentru $s = -5$ se determină şi direcţia de transmisie. Se calculează $P(-5)$:

$$P(-5) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -8 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru determinarea direcţiei zeroului se rezolvă ecuaţia $P(-5)\cdot[x_0, u_0] = 0$. Deoarece ieşirea sistemului depinde numai de primele două stări şi în plus $y_2 = 0$ ecuaţia se reduce la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -11 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -8 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \\ u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de unde rezultă $7x_{20} - 2u_{10} = 0$, $-4x_{10} - 11x_{20} = 0$ şi $2x_{10} + 2x_{20} + u_{10} = 0$. Rezultă:

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/4 \\ \\ 2/7 \end{bmatrix} u_{10}.$$

ANEXA

Secvenţe *Maple* pentru rezolvarea exemplelor propuse

Exemplul 3.2

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[1,0],[1,-1]]);B:=Matrix([[0],[1]]);C:=Matrix([0,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conditiile initiale:

```
> x_i:=Vector([0,0]);
```

$$x\_i := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg,exponential):eAt:=simplify(Matrix(exponential(A,t)));
```

$$eAt := \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2}\,e^t - \frac{1}{2}\,e^{(-t)} & e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

Solutia sistemului este data de componenta libera **x_lib**:

```
> x_lib:=Vector([eAt.x_i]);
```

$$x\_lib := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si de componenta fortata **x_for**:

```
> with(linalg,exponential):eAt2:=simplify(Matrix(exponential(A,t-tau)).
> B);
```

$$eAt2 := \begin{bmatrix} 0 \\ e^{(-t+\tau)} \end{bmatrix}$$

```
> x_fort:=Vector([(int(eAt2[1,1],tau=0..t)),(int(eAt2[2,1],tau=0..t))])
> ;
```

$$x\_fort := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

```
> x:=Add(x_lib,x_fort);
```

$$x := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

Iesirea sistemului **y_0** in conditii initiale nule va fi:

```
> y_0:=C.x;
```

$$y\_0 := \begin{bmatrix} 1 - e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

```
> with(plots):plot(y_0,t=0..10,labels=[t, y]);
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

Daca sistemul porenste din conditii initiale nenule:

```
> x_i:=Vector([1,1]);
```

$$x\_i := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Iesirea sistemului **y_1** va fi:

```
> x_lib:=Vector([eAt.x_i]);x:=Add(x_lib,x_fort);y_1:=simplify(C.x);
```

$$x\_lib := \begin{bmatrix} e^t \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} e^t \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{(-t)} + 1 \end{bmatrix}$$

$$y\_1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{(-t)} + 1 \end{bmatrix}$$

```
> plot([x[1],x[2],t=0..3],labels=[x_1, x_2]);
> with(plots):plot(y_1,t=0..10,labels=[t, y]);
```

Exemplul 3.4

```
> with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,-1],[0,-1]]);B:=Matrix([[0],[1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg,
> exponential):W:=Matrix(exponential(A*s)).Matrix(B.Transpose(B)).Matrix
> (exponential(Transpose(A)*s));
```

$$\mathrm{W} := \begin{bmatrix} (e^{(-s)}-1)^2 & (e^{(-s)}-1)\,e^{(-s)} \\ (e^{(-s)}-1)\,e^{(-s)} & (e^{(-s)})^2 \end{bmatrix}$$

```
> for j from 1 by 1 to 2 do for i from 1 by 1 to 2 do
> print(int(W[i,j],s));  end do;end do;
```

$$-\frac{1}{2}\,(e^{(-s)})^2 + 2\,e^{(-s)} - \ln(e^{(-s)})$$

$$-\frac{1}{2}\,(e^{(-s)})^2 + e^{(-s)}$$

$$-\frac{1}{2}\,(e^{(-s)})^2 + e^{(-s)}$$

$$-\frac{1}{2}\,e^{(-2\,s)}$$

```
> f:= (i,j) -> int(W[i,j],s=0..t_1-t_0):  W2:=Matrix(2,f);
```

$$\mathrm{W2} := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,(e^{(-t\_1+t\_0)})^2 + 2\,e^{(-t\_1+t\_0)} - \ln(e^{(-t\_1+t\_0)}) - \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\,(e^{(-t\_1+t\_0)})^2 + e^{(-t\_1+t\_0)} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\,(e^{(-t\_1+t\_0)})^2 + e^{(-t\_1+t\_0)} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\,e^{(-2\,t\_1+2\,t\_0)} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> Rank(W2);
```

$$2$$

Exemplul 3.5

```
> with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-1,4],[0,3]]);B:=Matrix([[2],[0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg,
> exponential):W:=simplify(Matrix(exponential(A*s)).Matrix(B.Transpose(B
> )).Matrix(exponential(Transpose(A)*s)));
```

$$\mathrm{W} := \begin{bmatrix} 4\,e^{(-2\,s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> for j from 1 by 1 to 2 do for i from 1 by 1 to 2 do
> print(int(W[i,j],s));  end do;end do;
```

$$-2\,(e^{(-s)})^2$$

$$0$$

$$0$$

$$0$$

```
> f:= (i,j) -> int(W[i,j],s=0..t_1-t_0):  W2:=Matrix(2,f);
```

$$\mathrm{W2} := \begin{bmatrix} -2\,e^{(-2\,t\_1+2\,t\_0)}+2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(W2);
```

$$1$$

Exemplul 3.6

```
> with(LinearAlgebra);
```

Matricile **A** si **B** sunt:

```
> A:=Matrix([[0,1],[0,-1]]); B:=Matrix([[0],[1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate **Ctr** aferenta este:

```
> Ctr:= Matrix([[B,A.B]]);
```

$$Ctr := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Iar rangul matricei **Ctr** este:

```
> Rank(Ctr);
```

$$2$$

Rangul este 2, egal cu numarul de stari, deci sistemul este controlabil.

Exemplul 3.7

```
> with(LinearAlgebra);
```

Matricile **A** si **B** sunt:

```
> A:=Matrix([[0,1],[0,-1]]); B:=Matrix([[1],[-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate **Ctr** aferenta este:

```
> Ctr:= Matrix([[B,A.B]]);
```

$$Ctr := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iar rangul matricei **Ctr** este:

```
> Rank(Ctr);
```

$$1$$

Rangul este $1 < 2$, deci sistemul este necontrolabil.

Exemplul 3.8

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,-3,0,0],[1,-4,0,0],[0,0,0,-1],[0,0,1,-2]]);B:=Matrix([[
> 3,2],[1,2],[1,1],[1,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Phi1:=Matrix([B,A.B,A.A.B,A.A.A.B]);
```

$$\Phi 1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -6 & 3 & 18 & -3 & -54 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> W:=Phi1.Transpose(Phi1);
```

$$\mathrm{W} := \begin{bmatrix} 3316 & 3292 & 92 & 92 \\ 3292 & 3284 & 84 & 84 \\ 92 & 84 & 8 & 8 \\ 92 & 84 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Exemplul 3.9

```
> with(LinearAlgebra);
```

Matricile **A** si **B** sunt:

```
> A:=Matrix([[0,1],[1,0]]); B:=Matrix([[1,1],[1,-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate **Ctr** aferenta este:

```
> Ctr:= Matrix([[B,A.B]]);
```

$$Ctr := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iar rangul matricei **Ctr** este:

```
> Rank(Ctr);
```

$$2$$

Rezulta ca sistemul este controlabil. Daca se considera insa intrarea:

```
> b1:=Matrix([[1],[1]]);
```

$$b1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Controlabilitatea sistemului in cest caz va fi:

```
> Ctr1:= Matrix([[b1,A.b1]]);
```

$$Ctr1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Iar rangul matricei **Ctr1** va fi:

```
> Rank(Ctr1);
```

$$1$$

Deci sistemul nu mai este controlabil. Daca alegem intrarea ca fiind:

```
> b2:=Matrix([[1],[-1]]);
```

$$b2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Iar matricea de controlabilitate **Ctr2** a sistemului va fi:

```
> Ctr2:= Matrix([[b2,A.b2]]);
```

$$Ctr2 := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cu rangul:

```
> Rank(Ctr2);
```

$$1$$

Deci sistemul este nu este controlabil.

Exemplul 3.10

```
> with(LinearAlgebra);
```

Matricile **A** si **B** sunt:

```
> A:=Matrix([[0,1],[0,-1]]); B:=Matrix([[1],[-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se determina valorile proprii ale matricii A:

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> s1:=0;s2:=-1;
```

$$s1 := 0$$
$$s2 := -1$$

Se determina un vector **w** care sa satisfaca conditia **w^T*B=0**:

```
> [w1,w2].B=0;
```

$$[1,\ 1]\ .\ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

```
> w1:=a;w2:=a;w=<w1,w2>;
```

$$w1 := a$$
$$w2 := a$$
$$w = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

```
> Transpose(<w1,w2>).A = s1*Transpose(w);
```

$$[0,\ 0] = 0$$

Se observa ca ecuatia are solutii pentru **w1=w2=a**!!!

Se determina si rangul matricii de test **PHB**:

```
> Matrix([s1*IdentityMatrix(2)-A,B]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$1$$

Ambele metode indica faptul ca modul la **s1=0** este necontrolabil.

Se verifica si modul **s2=-1**.

```
> Transpose(<w1,w2>).A = s2*Transpose(<w1,w2>);
```

$$[0,\ 0] = [-a,\ -a]$$

Deci nu se verifica prima conditie!!!

Se determina si rangul matricii de test **PHB**:

```
> Matrix([s2*IdentityMatrix(2)-A,B]);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$2$$

Ambele metode indica faptul modul la **s2=-1** este controlabil.

Exemplul 3.11

```
> restart;with(LinearAlgebra);with(linalg, exponential):
```

Matricile **A** si **B** sunt:

```
> A:=Matrix([[-1,0],[0,0]]); B:=Matrix([[1],[0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metoda Grammian:

```
> W:=Int(Matrix(exponential(A*s)).Matrix(B.Transpose(B)).Matrix(exponen
> tial(Transpose(A)*s)),s=0..t1-t0);
```

$$\mathrm{W} := \int_0^{t1-t0} \begin{bmatrix} (e^{(-s)})^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds$$

```
> W:=simplify(W);
```

$$\mathrm{W} := \int_0^{t1-t0} \begin{bmatrix} e^{(-2\,s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds$$

```
> W:=Matrix([[1-exp(-2*(t1-t0)),0],[0,0]]);
```

$$\mathrm{W} := \begin{bmatrix} 1 - e^{(-2\,t1+2\,t0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(W);
```

$$1$$

Matricea de controlabilitate:

```
> Ctr:=Matrix([B,A.B]);
```

$$Ctr := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

`Rangul ei:`

```
> Rank(Ctr);
```

$$1$$

Se determina valorile proprii ale matricei A:

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se determina un rangul matricei [lambda*I-A B]:

```
> Matrix([lambda[1]*IdentityMatrix(2)-A,B]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$1$$

```
> Matrix([lambda[2]*IdentityMatrix(2)-A,B]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$2$$

```
> Ctr.Transpose(Ctr);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(%);
```

$$0$$

Exemplul 3.12

```
> A:=Matrix([[0,1,0,0],[0,-4,-10,0],[0,0,0,1],[0,-1,-1,0]]);B:=Matrix([
> [0,0],[1,0],[0,0],[]]);C:=Matrix([[1,0,0,0],[0,0,1,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se determina valorile proprii si vectorii proprii ale matricei **A.**
Matricea de transformare va fi **P=v**;

```
> (e,v):=Eigenvectors(A);
```

$$e,\, v := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -2 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -10 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Se calculeaza matricele echivalente **A1, B1, C1**:

```
> A1:=MatrixInverse(v).A.v;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=MatrixInverse(v).B;
```

$$B1 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{12} & 0 \\ \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=C.v;
```

$$C1 := \begin{bmatrix} -2 & \frac{10}{3} & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate este:

```
> Contro:=Matrix([B,A.B,A.A.B,A.A.A.B]);
```

$$Contro := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 16 & 0 & -54 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}$$

Se determina si rangul acesteia:

```
> Rank(Contro);
```

$$4$$

Exemplul 3.13

```
> restart;with(LinearAlgebra);A:=Matrix([[0,-3,0,0],[1,-4,0,0],[0,0,0,-
> 1],[0,0,1,-2]]);B:=Matrix([[3,2],[1,2],[1,1],[1,1]]);C:=Matrix([[0,1,0
> ,0],[0,0,0,1]]);DD:=Matrix([[0,0],[0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DD := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(4));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Matricea de transfer a sistemului initial:

```
> H1:=simplify(Matrix([C]).MatrixInverse((sI-Matrix([A]))).Matrix([B]))
> ;
```

$$H1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{1+s} & \frac{1}{1+s} \end{bmatrix}$$

Valori proprii ale matricei A. Se poate observa ca acestea sunt diferite:

```
> Eigenvalues(A);
```

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate a sistemului initial:

```
> Contro1:=Matrix([B,A.B,A.A.B,A.A.A.B]);
```

$$Contro1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -6 & 3 & 18 & -3 & -54 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei de controlabilitate a sistemului initial:

```
> Rank(Contro1);
```

$$3$$

Se scrie o matrice care contine vectorii baza ai matricei **Contro1**:

```
> P1:=Matrix([Contro1[1..4,1],Contro1[1..4,2],Contro1[1..4,4]]);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se determina o matrice formata din solutia ecuatiei **Contro1*x=0:**

```
> P2:=NullSpace(Transpose(Contro1));
```

$$P2 := \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Matricea de tsrnaformare este formata din matricea **P1** si **P2:**

```
> P:=Matrix([P1,P2[1]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se determina matricele sistemului echivalent:

```
> A_(ech):=MatrixInverse(P).A.P;
```

$$\mathrm{A\_}(ech) := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> B_(ech):=MatrixInverse(P).B;
```

$$\mathrm{B\_}(ech) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> C_(ech):=C.P;
```

$$\mathrm{C\_}(ech) := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se scriu si submatricele sistemului echivalent:

```
> A11:=Matrix([A_(ech)[1..3,1],A_(ech)[1..3,2],A_(ech)[1..3,3]]);
```

$$A11 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> A12:=Matrix([A_(ech)[1..3,4]]);
```

$$A12 := \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> A22:=Matrix([A_(ech)[4,4]]);
```

$$A22 := \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=Matrix([B_(ech)[1..3,1],B_(ech)[1..3,2]]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=Matrix([C_(ech)[1..2,1..3]]);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se verifica controlabilitatea, tinand cont numai de perechea **(A11,B1):**

```
> Contro2:=Matrix([B1,A11.B1,A11.A11.B1,A11.A11.A11.B1]);
```

$$Contro2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Contro2);
```

$$3$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(3));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Se calculeaza matricea de transfer a partii controlabile:

```
> H:=simplify(Matrix([C1]).MatrixInverse(sI-Matrix(A11)).Matrix(B1));
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{1}{1+s} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{1+s} & \frac{1}{1+s} \end{bmatrix}$$

```
> xf:=Vector([0,1,0,0]);
```

$$xf := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixInverse(P).xf;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{-1}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> eq1:= a*3+b*2-6*c=-1/2;eq2:=a+b*2-6*c=3/8;eq3:=a+b-c=-1/8;
```

$$eq1 := 3\,a + 2\,b - 6\,c = \frac{-1}{2}$$

$$eq2 := a + 2\,b - 6\,c = \frac{3}{8}$$

$$eq3 := a + b - c = \frac{-1}{8}$$

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{a,b,c});
```

$$\{a = \frac{-7}{16},\ c = \frac{-3}{64},\ b = \frac{17}{64}\}$$

```
> xf:=Vector([2,1,4,0]);
```

$$xf := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> eq1:= a*3+b*2-6*c=2;eq2:=a+b*2-6*c=1;eq3:=a+b-c=4;
```

$$eq1 := 3\,a + 2\,b - 6\,c = 2$$

$$eq2 := a + 2\,b - 6\,c = 1$$

$$eq3 := a + b - c = 4$$

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{a,b,c});
```

$$\{c = \frac{13}{8},\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{41}{8}\}$$

```
> MatrixInverse(P).xf;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{17}{8} \\ \frac{5}{8} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplul 3.14

```
> restart;with(LinearAlgebra);A:=Matrix([[0,-3,0,0],[1,-4,0,0],[0,0,0,-
> 1],[0,0,1,-2]]);B:=Matrix([[3,2],[1,2],[1,1],[1,1]]);C:=Matrix([[0,1,0
> ,0],[0,0,0,1]]);DD:=Matrix([[0,0],[0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DD := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(4));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> H1:=Matrix([C.B,C.A.B,C.A.A.B,C.A.A.A.B]);
```

$$H1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(H1);
```

$$2$$

Exemplul 3.15

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-7,-2,6],[2,-3,-2],[-2,-2,1]]);B:=Matrix([[1,1],[1,-1],[1
> ,0]]);C:=Matrix([[-1,-1,2],[1,1,-1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Se determina valorile proprii si vectorii proprii ai matricei **A:**

```
> (e,v):=Eigenvectors(A);
```

$$e,\, v := \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se determina matricele sistemului echivalent

```
> \Lambda:=Matrix(MatrixInverse(v).A.v);
```

$$\Lambda := \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=Matrix(MatrixInverse(v).B);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=Matrix(C.v);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se verifica cu testul **PBH,** daca starea s=-1 este controlabila:

```
> PBH:=Matrix([simplify(-1*IdentityMatrix(3)-A),B]);
```

$$PBH := \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(PBH);
```

$$2$$

Se verifica controlabilitatea pe iesire:

```
> Contro_output:=Matrix([C.B,C.A.B,C.A.A.B]);
```

$$Contro\_output := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$1$$

Exemplul 3.16

```
> with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,-3,0,0],[1,-4,0,0],[0,0,0,-1],[0,0,1,-2]]);B:=Matrix([[
> 3,2],[1,2],[1,1],[1,1]]);C:=Matrix([[0,1,0,0],[0,0,0,1]]);DD:=Matrix([
> [0,0],[0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DD := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(4));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> H:=Matrix([C]).MatrixInverse((sI-Matrix([A]))).Matrix([B]);
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{3}{s^2+4\,s+3} + \dfrac{s}{s^2+4\,s+3} & \dfrac{2}{s^2+4\,s+3} + \dfrac{2\,s}{s^2+4\,s+3} \\ \dfrac{1}{s^2+2\,s+1} + \dfrac{s}{s^2+2\,s+1} & \dfrac{1}{s^2+2\,s+1} + \dfrac{s}{s^2+2\,s+1} \end{bmatrix}$$

```
> H:=simplify(H);
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+s} & \dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{1}{1+s} & \dfrac{1}{1+s} \end{bmatrix}$$

```
> DetH:=Determinant(H);
```

$$DetH := -\frac{s-1}{(1+s)^2\,(s+3)}$$

```
> Ctr:=Matrix([B,A.B,A.A.B,A.A.A.B]);
```

$$Ctr := \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 & -6 & 3 & 18 & -3 & -54 \\ 1 & 2 & -1 & -6 & 1 & 18 & -1 & -54 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Ctr);
```

$$3$$

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> Matrix([lambda[3]*IdentityMatrix(4)-A,B]);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$3$$

Exemplul 3.17

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,1],[1,0]]);B:=Matrix([[0],[1]]);C:=Matrix([1,-1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Conditiile initiale:

```
> x_i:=Vector([0,0]);
```

$$x\_i := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg,exponential):eAt:=simplify(Matrix(exponential(A,t)));
```

$$eAt := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(-t)} + \frac{1}{2}\,e^{t} & \frac{1}{2}\,e^{t} - \frac{1}{2}\,e^{(-t)} \\ \frac{1}{2}\,e^{t} - \frac{1}{2}\,e^{(-t)} & \frac{1}{2}\,e^{(-t)} + \frac{1}{2}\,e^{t} \end{bmatrix}$$

Solutia sistemului este data de componenta libera **x_lib**:

```
> x_lib:=Vector([eAt.x_i]);
```

$$x\_lib := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

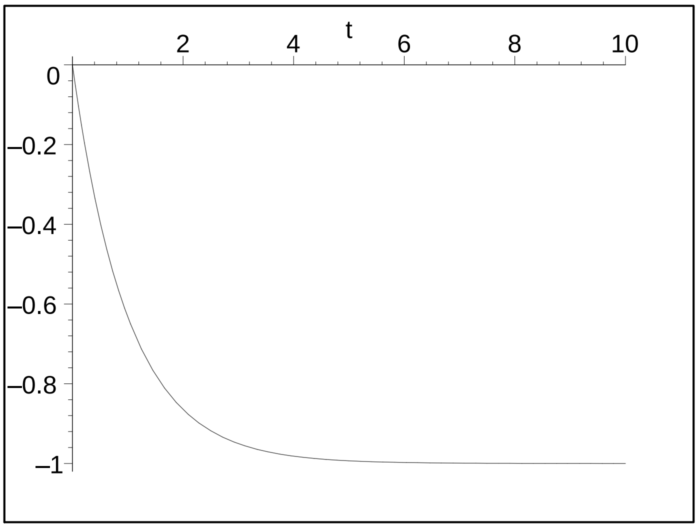
Si de componenta fortata **x_for**:

```
> with(linalg,exponential):eAt2:=simplify(Matrix(exponential(A,t-tau)).
> B);
```

$$eAt2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,e^{(t-\tau)} - \frac{1}{2}\,e^{(-t+\tau)} \\ \frac{1}{2}\,e^{(-t+\tau)} + \frac{1}{2}\,e^{(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

```
> x_fort:=Vector([(int(eAt2[1,1],tau=0..t)),(int(eAt2[2,1],tau=0..t))])
> ;
```

$$x\_fort := \begin{bmatrix} -1 + \frac{1}{2}\,e^{(-t)} + \frac{1}{2}\,e^{t} \\ \frac{1}{2}\,e^{t} - \frac{1}{2}\,e^{(-t)} \end{bmatrix}$$




```
> x:=Add(x_lib,x_fort);
```

$$x := \begin{bmatrix} -1 + \frac{1}{2}e^{(-t)} + \frac{1}{2}e^{t} \\ \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

Iesirea sistemului **y_0** in conditii initiale nule va fi:

```
> y_0:=C.x;
```

$$y\_0 := \begin{bmatrix} -1 + e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

Daca sistemul porenste din conditii initiale nenule:

```
> x_i:=Vector([k,k]);
```

$$x\_i := \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$$

Iesirea sistemului **y_1** va fi:

```
> x_lib:=Vector([eAt.x_i]);x:=Add(x_lib,x_fort);y_1:=simplify(C.x);
```

$$x\_lib := \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}e^{(-t)} + \frac{1}{2}e^{t})\,k + (\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{(-t)})\,k \\ (\frac{1}{2}e^{(-t)} + \frac{1}{2}e^{t})\,k + (\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{(-t)})\,k \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} (\frac{1}{2}e^{(-t)} + \frac{1}{2}e^{t})\,k + (\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{(-t)})\,k - 1 + \frac{1}{2}e^{(-t)} + \frac{1}{2}e^{t} \\ (\frac{1}{2}e^{(-t)} + \frac{1}{2}e^{t})\,k + (\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{(-t)})\,k + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

$$y\_1 := \begin{bmatrix} -1 + e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

```
> with(plots):plot(y_0,t=0..10,labels=[t, y]);
```

Exemplul 3.19

```
> with(LinearAlgebra);with(linalg, exponential):
```

```
> A:=Matrix([[0,1],[-3,-4]]);B:=Matrix([[1,2],[-3,-4]]);C:=Matrix([[1,1
> ],[-2,-2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> M1:=simplify(Matrix(exponential(Transpose(A)*s)));
```

$$M1 := \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{(-s)} - \frac{1}{2}e^{(-3\,s)} & \frac{3}{2}e^{(-3\,s)} - \frac{3}{2}e^{(-s)} \\ -\frac{1}{2}e^{(-3\,s)} + \frac{1}{2}e^{(-s)} & -\frac{1}{2}e^{(-s)} + \frac{3}{2}e^{(-3\,s)} \end{bmatrix}$$

```
> M2:=Matrix(Transpose(C).C);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> M3:=Matrix(exponential(A*s));
```

$$M3 := \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{(-s)} - \frac{1}{2}e^{(-3\,s)} & -\frac{1}{2}e^{(-3\,s)} + \frac{1}{2}e^{(-s)} \\ \frac{3}{2}e^{(-3\,s)} - \frac{3}{2}e^{(-s)} & -\frac{1}{2}e^{(-s)} + \frac{3}{2}e^{(-3\,s)} \end{bmatrix}$$

Se verifica conditia de observabilitate Grammian:

```
> M:=simplify(Int(M1.M2.M3,s=0..t1-t0));
```

$$M := \int_0^{t1-t0} \begin{bmatrix} 5\,e^{(-6\,s)} & 5\,e^{(-6\,s)} \\ 5\,e^{(-6\,s)} & 5\,e^{(-6\,s)} \end{bmatrix} ds$$

```
> M := Matrix(%id = 14337776);
```

$$M := \begin{bmatrix} \%1 & \%1 \\ \%1 & \%1 \end{bmatrix} \%1 := 5 - 5\,e^{(-6\,t1+6\,t0)}$$

Rangul matricei M este:

```
> Rank(M);
```

$$1$$

Matricea de observabilitate:

```
> Phi1:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$\Phi1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Phi1);
```

$$1$$

```
> W:=Matrix([Transpose(Phi1).Phi1]);
```

$$W := \begin{bmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 50 \end{bmatrix}$$

```
> Determinant(W);
```

$$0$$

Exemplul 3.20

```
> with(LinearAlgebra);with(linalg, exponential):
> A:=Matrix([[0,0,-6],[0,1,-6],[0,1,-6]]);C:=Matrix([[0,0,1],[1,1,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea de observabilitate:

```
> Phi1:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$\Phi 1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei de observabilitate este:

```
> Rank(Phi1);
```

$$3$$

Exemplul 3.21

```
> with(LinearAlgebra);with(linalg, exponential):
> A:=Matrix([[0,0,0],[2,0,-1],[3,1,0]]);C:=Matrix([[1,0,1]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Phi1:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$\Phi 1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Phi1);
```

$$2$$

Valorile proprii ale matricei A sunt:

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}$$

Se determina un vector care sa satisfaca ecuatia C*w=0:

```
> LinearSolve(C,<0>,free='w');
```

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -w_1 \end{bmatrix}$$

Valorile proprii si vectorii proprii ai matricei A sunt:

```
> (v,e):=Eigenvectors(A);
```

$$v,\, e := \begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ I & -I & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se verifica pentru fiecare pol daca este indeplinita conditia de observabilitate PHB:

```
> lambda1:=0;
```

$$\lambda 1 := 0$$

```
> Matrix([[lambda1.IdentityMatrix(3)-A],[C]]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$3$$

```
> lambda2:=1;
```

$$\lambda 2 := 1$$

```
> Matrix([[lambda2.IdentityMatrix(3)-A],[C]]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$3$$

```
> lambda3:=-1;
```

$$\lambda 3 := -1$$

```
> Matrix([[lambda3.IdentityMatrix(3)-A],[C]]);
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$3$$

Exemplul 3.22

```
> with(LinearAlgebra);with(linalg, exponential):
> A:=Matrix([[-1,0],[0,0]]);C:=Matrix([1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate este:

```
> Phi1:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$\Phi1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Phi1);
```

$$1$$

Valorile proprii si vectorii proprii ai matricei A sunt

```
> (v,e):=Eigenvectors(A);
```

$$v,\, e := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> lambda1:=0;
```

$$\lambda1 := 0$$

```
> Matrix([[lambda1.IdentityMatrix(2)-A],[C]]);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$1$$

```
> lambda2:=-1;
```

$$\lambda2 := -1$$

```
> Matrix([[lambda2.IdentityMatrix(2)-A],[C]]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(%);
```

$$2$$

Exemplul 3.24

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,1],[-3,-4]]);B:=Matrix([[1,2],[-3,-4]]);C:=Matrix([[1,1
> ],[-2,-2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Se determina matricea de transfer a sistemului:

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(2));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> H1:=simplify(Matrix([C.MatrixInverse(sI-A).B]));
```

$$H1 := \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{s+3} & -\dfrac{2}{s+3} \\ \dfrac{4}{s+3} & \dfrac{4}{s+3} \end{bmatrix}$$

Matricea de observabilitate:

```
> Obs1:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$Obs1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei de observabilitate:

```
> Rank(Obs1);
```

$$1$$

Transpusa matricei de observabilitate:

```
> Transpose(Obs1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Deoarece rangul matricei de observabilitate este egal cu 1, rezulta ca dimensiunea subspatiului de observabilitate este egala cu 1.

O baza a subspatiului de observabilitate este data de o linie din matricea de observabilitate; fie aceasta prima linie:

```
> P1:=Matrix(%[1..2,1]);
```

$$P1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O baza a subspatiului de neobservabilitate este data de subspatiul nul al matricei de observabilitate:

```
> P2:=NullSpace(Obs1);
```

$$P2 := \{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

Matricea de transformare **P** este formata din vectorii baza i celor doua subspatii:

```
> P:=Matrix([P1,P2[1]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se scriu matricele echivalente ale sistemului, determinate de matricea de transformare **P:**

```
> A_(ech):=MatrixInverse(P).A.P;
```

$$\text{A\_}(ech) := \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

```
> B_(ech):=MatrixInverse(P).B;
```

$$\text{B\_}(ech) := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> C_(ech):=C.P;
```

$$\text{C\_}(ech) := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se scriu submatricele sistemului echivalent:

```
> A11:=Matrix([A_(ech)[1,1]]);
```

$$A11 := \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$$

```
> A21:=Matrix([A_(ech)[2,1]]);
```

$$A21 := \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$

```
> A22:=Matrix([A_(ech)[2,2]]);
```

$$A22 := \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=Matrix([C_(ech)[1..2,1]]);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

```
> Obs2:=Matrix([[C1],[C1.A11]]);
```

$$Obs2 := \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Obs2);
```

$$1$$

Se determina matricea de transfer a sistemului numai in functie de partea observabila:

```
> H2:=Matrix([C1.MatrixInverse(s-A11).Matrix([B_(ech)[1,1..2]])]);
```

$$H2 := \begin{bmatrix} -\frac{2}{s+3} & -\frac{2}{s+3} \\ \frac{4}{s+3} & \frac{4}{s+3} \end{bmatrix}$$

Fie o stare a sistemului este:

```
> x:=Vector([3,3]);
```

$$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixInverse(P).x;
```

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fie o alta stare a sistemnului:

```
> x:=Vector([3,4]);
```

$$x := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

```
> MatrixInverse(P).x;
```

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplul 3.25

```
> with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-1,2],[4,-3]]);B:=Matrix([[1,0],[0,1]]);C:=Matrix([[0,1],
> [1,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=Transpose(A);B1:=Transpose(B);C1:=Transpose(C);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Contro:=Matrix([B,A.B]);
```

$$Contro := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Contro);
```

$$2$$

```
> Obs:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$Obs := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Obs);
```

$$2$$

```
> Contro1:=Matrix([C1,A1.C1]);
```

$$Contro1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Contro1);
```

$$2$$

```
> Obs1:=Matrix([[B1],[B1.A1]]);
```

$$Obs1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Obs1);
```

$$2$$

Exemplul 3.26

```
> with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,1],[-3,-4]]);B:=Matrix([[1,2],[-3,-4]]);C:=Matrix([[1,1
> ],[-2,-2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> A1:=Transpose(A);B1:=Transpose(B);C1:=Transpose(C);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B1 := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$C1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> Contro:=Matrix([B,A.B]);
```

$$Contro := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Contro);
```

$$2$$

```
> Obs:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$Obs := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ -3 & -3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Obs);
```

$$1$$

```
> Contro1:=Matrix([C1,A1.C1]);
```

$$Contro1 := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Contro1);
```

$$1$$

```
> Obs1:=Matrix([[B1],[B1.A1]]);
```

$$Obs1 := \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Obs1);
```

$$2$$

Exemplul 4.2

```
> with(LinearAlgebra);
> G:=Matrix([[1/(s+1),0,(s-1)/(s+1)/(s+2)],[-1/(s-1),1/(s+2),1/(s+2)]])
> ;
```

$$G := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ -\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

> Se determina cel mai mic multiplu comun al numitorilor din **G**:

```
> cmmnc:=lcm(s+1,(s+2)*(s-1),s-1,s+2,s+2);
```

$$cmmnc := (s+1)(s-1)(s+2)$$

```
> G1:=simplify(G*cmmnc);
```

$$G1 := \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)(s+2) & -1+s^2 & -1+s^2 \end{bmatrix}$$

Forma Smith:

```
> G2:=SmithForm(G1);
```

$$G2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s+s^3-s^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma McMillan:

```
> Mc:=simplify(G2/cmmnc);
```

$$Mc := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)(-1+s^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s-1}{s+2} & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.3

```
> with(LinearAlgebra);with(linalg, exponential):
> A:=Matrix([[-1,0,0],[1,-3,0],[0,0,-2]]);B:=Matrix([[1,0],[0,0],[0,1]]
> );C:=Matrix([[1,-3,1],[5,0,k]]);Dd:=Matrix([[0,0],[0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$Dd := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(3));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Reprezentarea Rosenbrok a sistemului:

```
> R:=Matrix([[sI-A,-B],[C,Dd]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & s+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polii sistemului:

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.4

```
> A:=Matrix([0]);B:=Matrix([1]);C:=Matrix([1]);Dd:=Matrix([1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$Dd := \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value
```

Matricea Rosenbrock:

```
> R:=simplify(Matrix([[s,-B],[C,Dd]]));
```

$$R := \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantul matricei **R** este:

```
> Dett:=Determinant(R);
```

$$Dett := s + 1$$

Solutia ecuatiei **Dett=0** este:

```
> solve(Dett=0,s);
```

$$-1$$

Directia zeroului **s=-1**:

```
> X:=matrix([[-1,-1],[1,1]]);Y:=vector([0,0]);
```

$$X := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y := [0,\ 0]$$

```
> linsolve(X, Y);
```

$$[-\_t_1,\ \_t_1]$$

Exemplul 4.5

```
> restart;with(LinearAlgebra);
```

```
> A:=Matrix([[-1,0,0],[1,-3,0],[0,0,-2]]);B:=Matrix([[1,0],[0,0],[0,1]]
> );C:=Matrix([[1,-3,1],[5,0,k]]);Dd:=Matrix([[0,0],[0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$Dd := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(3));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Matricea de transfer matriciala a sistemului:

```
> H:=Matrix([C]).MatrixInverse((sI-Matrix([A]))).Matrix([B])+Dd;
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} - \frac{3}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{5}{s+1} & \frac{k}{s+2} \end{bmatrix}$$

```
> H:=simplify(H);
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{5}{s+1} & \frac{k}{s+2} \end{bmatrix}$$

Matricea Rosenbrock a sistemului:

```
> R:=Matrix([[sI-A,-B],[C,Dd]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & s+3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & k & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zerourile sistemului:

```
> Dett:=Determinant(R);
```

$$Dett := k\,s - 5\,s - 15$$

```
> solve(Dett=0,s);
```

$$\frac{15}{k-5}$$

```
> k:=10;
```

$$k := 10$$

```
> with(linalg):
> s:=3;
```

$$s := 3$$

```
> Y:=vector([0,0,0,0,0]);
```

$$Y := [0, 0, 0, 0, 0]$$

```
> linsolve(R,Y);
```

$$[6\_t_1,\ \_t_1,\ -3\_t_1,\ 24\_t_1,\ -15\_t_1]$$

Exemplul 4.6

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-1,0,0],[1,-3,0],[0,0,-2]]);B:=Matrix([[1,0],[0,0],[0,1]]
> );C:=Matrix([[1,-3,1],[5,0,k]]);Dd:=Matrix([[0,0],[0,0]]);sI:=simplify
> (s*IdentityMatrix(3));
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$Dd := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> H:=simplify(Matrix([C]).MatrixInverse((sI-Matrix([A]))).Matrix([B])+D
> d);
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+3)} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{k}{s+2} \end{bmatrix}$$

Se determina cel mai mic multiplu comun al numitorilor din **H**:

```
> cmmnc:=lcm((s+1)*(s+3),(s+2),s+1,s+2);
```

$$cmmnc := (s+1)(s+3)(s+2)$$

Valoarea lui **k =10:**

```
> k:=10;
```

$$k := 10$$

```
> H1:=simplify(H*cmmnc);
```

$$H1 := \begin{bmatrix} (s+2)\,s & (s+1)(s+3) \\ 5\,(s+3)(s+2) & 10\,(s+1)(s+3) \end{bmatrix}$$

Forma Smith:

```
> H2:=SmithForm(H1);
```

$$H2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+2)\,(-9\,s+s^3+s^2-9) \end{bmatrix}$$

Forma McMillan:

```
> Mc:=simplify(H2/cmmnc);
```

$$Mc := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)\,(s+3)\,(s+2)} & 0 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.7

```
> with(LinearAlgebra);
> H:=Matrix([[1/(s+1),0,(s-1)/(s+1)/(s+2)],[-1/(s-1),1/(s+2),1/(s+2)]])
> ;
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)\,(s+2)} \\ -\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Se determina cel mai mic multiplu comun al numitorilor din **H**:

```
> cmmnc:=lcm((s+1),1,(s+1)*(s+2),s-1,s+2,s+2);
```

$$cmmnc := (s+1)\,(s-1)\,(s+2)$$

```
> H1:=simplify(H*cmmnc);
```

$$H1 := \begin{bmatrix} (s-1)\,(s+2) & 0 & (s-1)^2 \\ -(s+1)\,(s+2) & s^2-1 & s^2-1 \end{bmatrix}$$

Forma Smith:

```
> H2:=SmithForm(H1);
```

$$H2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^3-s-s^2+1 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma McMillan:

```
> Mc:=simplify(H2/cmmnc);
```

$$Mc := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)\,(s^2-1)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s-1}{s+2} & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.8

```
> with(LinearAlgebra);
> H:=Matrix([[s/(s+1)/(s+3),1/(s+2)],[5/(s+1),k/(s+2)]]);
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)\,(s+3)} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{k}{s+2} \end{bmatrix}$$

```
> Dett:=Determinant(H);
```

$$Dett := \frac{s\,k - 5\,s - 15}{(s+1)\,(s+3)\,(s+2)}$$

```
> k:=10;
```

$$k := 10$$

```
> s1:=solve(Dett=0,s);
```

$$s1 := 3$$

Exemplul 4.9

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> H:=Matrix([[1/(s+1),0,(s-1)/(s+1)/(s+2)],[-1/(s-1),1/(s+2),1/(s+2)]])
> ;
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s-1}{(s+1)\,(s+2)} \\ -\frac{1}{s-1} & \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

```
> s:=1/z;
```

$$s := \frac{1}{z}$$

```
> H:=Matrix([[1/(s+1),0,(s-1)/(s+1)/(s+2)],[-1/(s-1),1/(s+2),1/(s+2)]])
> ;
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{z}+1} & 0 & \frac{\frac{1}{z}-1}{(\frac{1}{z}+1)\,(\frac{1}{z}+2)} \\ -\frac{1}{\frac{1}{z}-1} & \frac{1}{\frac{1}{z}+2} & \frac{1}{\frac{1}{z}+2} \end{bmatrix}$$

```
> H:=simplify(H);
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{z}{1+z} & 0 & -\frac{(-1+z)\,z}{(1+z)\,(1+2\,z)} \\ \frac{z}{-1+z} & \frac{z}{1+2\,z} & \frac{z}{1+2\,z} \end{bmatrix}$$

Se determina cel mai mic factor comun din **H**:

```
> cmmnc:=lcm(z+1,0,(z+1)*(2*z+1),z-1,2*z+1,2*z+1);
```

$$cmmnc := (1+z)\,(-1+z)\,(1+2\,z)$$

```
> H1:=simplify(H*cmmnc);
```

$$H1 := \begin{bmatrix} (-1+z)\,(1+2\,z)\,z & 0 & -(-1+z)^2\,z \\ z\,(1+z)\,(1+2\,z) & z\,(-1+z^2) & z\,(-1+z^2) \end{bmatrix}$$

Forma Smith:

```
> S:=SmithForm(H1);
```

$$S := \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z - z^3 - z^2 + z^4 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma McMillan:

```
> Mc:=simplify(S/cmmnc);
```

$$Mc := \begin{bmatrix} \dfrac{z}{(1+2\,z)\,(-1+z^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(-1+z)\,z}{1+2\,z} & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.10

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> H:=Matrix([[s/(s+1/(s+3)),1/(s+2)],[5/(s+1),10/(s+2)]]);
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s+\dfrac{1}{s+3}} & \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{5}{s+1} & \dfrac{10}{s+2} \end{bmatrix}$$

```
> s:=1/z;
```

$$s := \frac{1}{z}$$

```
> H2:=Matrix([[s/(s+1/(s+3)),1/(s+2)],[5/(s+1),10/(s+2)]]);
```

$$H2 := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{z\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\dfrac{1}{z}+3}\right)} & \dfrac{1}{\dfrac{1}{z}+2} \\ \dfrac{5}{\dfrac{1}{z}+1} & \dfrac{10}{\dfrac{1}{z}+2} \end{bmatrix}$$

```
> H2:=simplify(H2);
```

$$H2 := \begin{bmatrix} \dfrac{1+3\,z}{1+3\,z+z^2} & \dfrac{z}{1+2\,z} \\ \dfrac{5\,z}{1+z} & \dfrac{10\,z}{1+2\,z} \end{bmatrix}$$

Se determina cel mai mic factor comun din **H**:

```
> cmmnc:=lcm(z^2+3*z+1,2*z+1,z+1,2*z+1);
```

$$cmmnc := (1+3\,z+z^2)\,(1+z)\,(1+2\,z)$$

```
> H2:=simplify(H2*cmmnc);
```

$$H2 := \begin{bmatrix} (1+z)\,(1+2\,z)\,(1+3\,z) & (1+3\,z+z^2)\,(1+z)\,z \\ 5\,(1+3\,z+z^2)\,(1+2\,z)\,z & 10\,(1+3\,z+z^2)\,(1+z)\,z \end{bmatrix}$$

Forma Smith:

```
> S:=SmithForm(H2);
```

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{(1+2\,z)\,z\,(z^5-15\,z^4-41\,z^3-39\,z^2-15\,z-2+z^6)}{2} \end{bmatrix}$$

Forma McMillan:

```
> Mc:=simplify(S/cmmnc);
```

$$Mc := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(1+3\,z+z^2)\,(1+z)\,(1+2\,z)} & 0 \\ 0 & \dfrac{z\,(z^3-3\,z^2-7\,z-2)}{2} \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.11

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-1,4],[0,3]]);B:=Matrix([[2],[0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(2));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> P:=Matrix([sI-A,B]);
```

$$P := \begin{bmatrix} s+1 & -4 & 2 \\ 0 & s-3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> smith(P,s,L,R);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s-3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eval(L);
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{-1}{4} & 0 \\ \dfrac{s}{2}-\dfrac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

```
> eval(R);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2}-\dfrac{s}{2} \end{bmatrix}$$

Matricea de controlabilitate:

```
> Ctr:=Matrix([[B,A.B]]);
```

$$Ctr := \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(Ctr);
```

$$1$$

Polii sistemului:

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se verifica daca **s=3** este pol necontrolabil pentru sistem:

```
> s:=3;rank(P);
```

$$s := 3$$
$$1$$

Exemplul 4.12

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,-3,0,0],[1,-4,0,0],[0,0,0,-1],[0,0,1,-2]]);B:=Matrix([[
> 3,2],[1,2],[1,1],[1,1]]);C:=Matrix([[0,1,0,0],[0,0,0,1]]);DD:=Matrix([
> [0,0],[0,0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DD := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(4));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> P:=Matrix([sI-A,B]);
```

$$P := \begin{bmatrix} s & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & s+4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & s+2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(P);
```

$$4$$

```
> with(linalg):

Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected

> smith(P,s,L,R);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eval(L);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{s}{6}-\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 2+\frac{s}{2} & \frac{-1}{2} \\ -(s+1)\,(s+4) & 3+3\,s & 18+15\,s+3\,s^2 & -9-3\,s \end{bmatrix}$$

```
> eval(R);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 7+s & 3 \\ 1 & -1 & 1 & \frac{-1}{9} & 1-s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{72} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-11}{72} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{36}+\frac{s}{36} & -3-s^2-4\,s & -1-s \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}-\frac{s}{24} & 3+s^2+4\,s & 0 \end{bmatrix}$$

```
> s:=-1;
```

$$s := -1$$

```
> P2:=Matrix([sI-A,B]);
```

$$P2 := \begin{bmatrix} s & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & s+4 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & s+2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(P2);
```

$$4$$

Matricea de transfer a sistemului:

```
> H:=simplify(Matrix([C]).MatrixInverse((sI-Matrix([A]))).Matrix([B]));
```

$$H := \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+3} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.13

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-5,-8],[4,7]]);C:=Matrix([[2,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(2));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> P:=Matrix([[sI-A],[C]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} s+5 & 8 \\ -4 & s-7 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> smith(P,s,L,R);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3+s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eval(L);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & s+1 \end{bmatrix}$$

```
> eval(R);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{8} - \frac{s}{8} \end{bmatrix}$$

Matricea de observabilitate:

```
> Obs:=Matrix([[C],[C.A]]);
```

$$Obs := \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei **Obs** este:

```
> Rank(Obs);
```

$$1$$

Polii sistemului:

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se aplica testul **PHB** pentru determinarea starii neobservabile:

```
> H1:=simplify(Matrix([[lambda[1]*IdentityMatrix(2)-A],[C]]));
```

$$H1 := \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(H1);
```

$$1$$

```
> H2:=simplify(Matrix([[lambda[2]*IdentityMatrix(2)-A],[C]]));
```

$$H2 := \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -4 & -8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> Rank(H2);
```

$$2$$

Exemplul 4.14

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[0,0,-6],[1,0,-11],[0,1,-6]]);C:=Matrix([[0,0,1],[1,1,0]])
> ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(3));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

```
> P:=Matrix([[sI-A],[C]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} s & 0 & 6 \\ -1 & s & 11 \\ 0 & -1 & s+6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> smith(P,s,L,R);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eval(L);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6-s & 1 \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11}+\frac{s}{11} & -\frac{17}{11}-\frac{7}{11}s-\frac{1}{11}s^2 & \frac{1}{11} \\ -11 & 6 & 6+17\,s & -(6+17\,s)\,(s+6) & 11\,s+6 \end{bmatrix}$$

```
> eval(R);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{s}{11} & \frac{1}{11}+\frac{s}{11} \end{bmatrix}$$

Exemplul 4.15

```
> restart;with(LinearAlgebra);
> A:=Matrix([[-5,-8,0],[4,7,0],[1,2,3]]);B:=Matrix([[2,0],[0,0],[0,1]])
> ;C:=Matrix([2,2,0]);Dd:=Matrix([1,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Dd := \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> sI:=simplify(s*IdentityMatrix(3));
```

$$sI := \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

Reprezentarea Rosenbrock:

```
> P:=Matrix([[sI-A,-B],[C,Dd]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} s+5 & 8 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & s-7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & s-3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the previous binding of the name GramSchmidt has been removed
and it now has an assigned value

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

```
> S:=smith(P,s,L,R);
```

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15+2\,s+s^2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> eval(L);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 0 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{s}{2} & 1 \\ -1-s & -6-2\,s & 15-2\,s-s^2 & -2-2\,s \end{bmatrix}$$

```
> eval(R);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}+\frac{s}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & -\frac{1}{4}-\frac{s}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{s}{2} & -\frac{9}{4}+\frac{s^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s-3 \end{bmatrix}$$

Matricea de transfer:

```
> H:=simplify(Matrix(C.MatrixInverse((sI-A)).B+Dd));
```

$$H := \begin{bmatrix} \dfrac{s+5}{1+s} & 0 \end{bmatrix}$$

```
> simplify(H);
```

$$\begin{bmatrix} \dfrac{s+5}{1+s} & 0 \end{bmatrix}$$

Polii sistemului:

```
> lambda:=Eigenvalues(A);
```

$$\lambda := \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> P_i:=Matrix([sI-A,B]);
```

$$P\_i := \begin{bmatrix} s+5 & 8 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & s-7 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & s-3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> smith(P_i,s,L,R);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> P_o:=Matrix([[sI-A],[C]]);
```

$$P\_o := \begin{bmatrix} s+5 & 8 & 0 \\ -4 & s-7 & 0 \\ -1 & -2 & s-3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> smith(P_o,s,L,R);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s^2-6\,s+9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ANEXA

Elemente de algebra liniară. Vectori

Definiţie

Un vector $\mathbf{x}$ de dimensiune n este un şir de n elemente x_k, $1 \le k \le n$.

Dacă vectorul este reprezentat sub forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

atunci vectorul $\mathbf{x}$ este un vector *coloană*.

Dacă vectorul este reprezentat sub forma:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix},$$

atunci vectorul $\mathbf{x}$ este un vector de tip *linie*.

Dacă elementele x_k sunt reale, atunci vectorul $\mathbf{x}$ este real, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ iar dacă elementele x_k sunt complexe, vectorul $\mathbf{x}$ complex, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Vector transpus

Vectorul transpus $\mathbf{x}^T$ al unui vector coloană $\mathbf{x}$ este:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Vectorul transpus al unui vector coloană este un vector linie şi invers.

Vector transpus şi conjugat

Vectorul transpus şi conjugat, notat $\mathbf{x}^H$ al unui vector coloană $\mathbf{x}$ este vectorul linie:

$$\mathbf{x}^H = \left[\begin{array}{cccc} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdots & \bar{x}_n \end{array} \right],$$

unde $\bar{x}_k$, $1 \leq k \leq n$ este conjugatul elementului x_k; de exemplu dacă $x_k = a + bi$ atunci $\bar{x}_k = a - bi$, unde $i\sqrt{(}-1)$.

Dacă $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}^H = \mathbf{x}^T$.

Produsul a doi vectori

Pentru doi vectori $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ produsul celor doi vectori este un scalar $a = \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \mathbf{x}^H \mathbf{y}$.

Norma unui vector

Norma unui vector $\mathbf{x}$ este o funcţie reală care satisface următoarele axiome:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
- $\|\mathbf{x}\| = 0$, dacă şi numai dacă $\mathbf{x} = 0$;
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\|$, $\forall a \in \mathbb{C}$;
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Norma euclidiană a unui vector

Norma euclidiană a unui vector este întotdeauna un număr real şi este asociată cu noţiunea de lungime a vectorului. Se calculează astfel:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \bullet \mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2},$$

unde $|x_k|$, $1 \leq k \leq n$ este valoarea absolută a elementului x_k.

Proprietăţi:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$;
- $\|\mathbf{x}\| = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$;
- $\|a\mathbf{x}\| = |a| \, \|\mathbf{x}\|$, $\forall a \in \mathbb{C}$;
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (inegalitatea triunghiului);
- $|\mathbf{x}^H \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ (inegalitatea *Cauchy-Schwartz*).

Norma p a unui vector

Norma p (norma *Hölder*), $p \geq 1$ a unui vector $\mathbf{x}$ notată $\|\mathbf{x}\|_p$, este egală cu:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Cele mai cunoscute norme sunt $p = 1$, $p = 2$ (norma euclidiană) şi $p = \infty$ (norma la infinit):

- $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;
- $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}$;
- $\|\mathbf{x}\|_\infty = max(|\mathbf{x}|)$.

Intre cele trei norme există relaţia: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt[n]{\|x\|_2} \leq n\,\|x\|_\infty$.

Vectori liniar independenţi

O mulţime de vectori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \ldots \mathbf{z}$ sunt liniar independenţi dacă şi numai dacă $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + \ldots + f\mathbf{z} = 0$ implică $a = b = \ldots = f = 0$.

ANEXA

Elemente de algebra liniară. Matrice

Definiţie

Reprezentarea unor numere sau funcţii sub formă de vectori, aranjaţi într-un număr finit de linii (n) şi coloane (m):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

poartă denumirea de matrice şi se notează $A(n \times m)$, $A_{n\times m}$ sau simplu A.

Numerele (funcţiile) a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$, sunt denumite *elementele matricei*, unde i denotă *linia* din matrice iar j *coloana*.

Când numărul de linii este egal cu numărul de coloane, $n = m = p$, matricea poartă denumirea de matrice *pătratică* de ordinul p.

Dacă elementele a_{ij} sunt reale, atunci matricea A este o matrice reală, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ iar dacă elementele a_{ij} sunt complexe, matricea A este o matrice complexă, $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Transpusa unei matrice

Transpusa unei matrice $A_{n\times m}$ este o matrice notată $A^T_{m\times n}$:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Conjugata unei matrice

Conjugata unei matrice $A_{n\times m}$ este o matrice notată $A^H_{n\times m}$ sau $A^*_{n\times m}$:

$$A^H(A^*) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1m} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nm} \end{bmatrix}$$

Matricea diagonală

Matricea diagonală este o matrice pătratică care are toate elementele nesituate pe diagonala principală egale cu 0.

Matricea identitate

Matricea identitate, notată I_n este o matrice diagonală de dimensiune $n \times n$ ale cărei elemente sunt toate egale cu 1.

Matricea zero

Matricea zero, notată $0_{n\times m}$ este o matrice de dimensiune $n \times m$ ale cărei elemente sunt toate egale cu 0.

Adunarea a două matrice

Fie două matrice $A_{n\times m}$ şi $B_{n\times m}$, cu elementele a_{ij}, respectiv b_{ij}, $1 \leq i \leq n$ şi $1 \leq j \leq m$.

Suma celor două matrice este tot o matrice $C_{n\times m} = A + B$ ale cărei elemente sunt $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Adunarea a două matrice este:

- comutativă, $A + B = B + A$;
- asociativă, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Inmulţirea a două matrice

Fie două matrice $A_{n\times m}$ şi $B_{m\times p}$, cu elementele a_{ij}, respectiv b_{ij}, $1 \leq i \leq n$ şi $1 \leq j \leq m$.

Produsul celor două matrice este tot o matrice $C_{m\times p} = AB$ ale cărei elemente sunt:

$$c_{ij} = a_{i1}B_{1j} + a_{12}2j + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

In general înmulţirea a două matrice nu este comutativă, $AB \neq BA$.

Relaţii utile privind înmulţirea a două matrice:

- $(AB)^T = B^T A^T$;
- $(AB)^H = B^H A^H$;
- $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{de\ k\ ori}$;

- $(AB)^k = \underbrace{AB \cdot AB \cdot AB \cdots AB}_{de\ k\ ori}$;

- $(AB)^k \neq A^k B^k$, dacă $AB \neq BA$.

Minorul unei matrice

Un minor de ordinul k al unei matrice $A_{n\times m}$, $k < max(n,m)$ este determinantul matricei $A'_{k\times k}$ obţinută din eliminarea a $n-k$ linii şi $m-k$ coloane din matricea A.

Minorul principal al unei matrice este acel minor a cărui matrice conţine elementele diagonalei principale ale matricei A.

Determinantul unei matrice

Determinatul unei matrice $A_{n\times n}$ notat $|A|$ sau $det(A)$, se calculează cu relaţia:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

unde C_{ij} este cofactorul elementului a_{ij}.

Cofactorul unui element a_{ij} este egal cu $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, unde M_{ij} este *minorul* elementului a_{ij} care se obţine prin calcularea determinantului matricei de dimensiune $(n-1)\times(n-1)$ obţinut prin înlăturarea liniei i şi a coloanei j din determinantul original.

Dacă o matrice A pătratică, are determinantul $det(A) = 0$, se spune că aceasta este singulară.

Pentru două matrice pătratice A şi B există relaţia:

$$det(AB) = det(A)det(B) = det(BA).$$

Relaţii utile pentru calcularea determinanţilor îin cazul unei matrice $A_{n\times n}$:

- $det(A^T) = det(A)$;

- $det(A^H) = conj(det(A))$;

- $det(cA) = c^n det(A)$,

- $det(A^k) = (det(A)))^k$, dacă $det(A) = 0$ atunci $k > 0$;

- $det(A) = 0$, dacă coloanele (sau liniile) ale matricei A sunt liniar dependente;

- $det(A) = 0$, dacă există două coloane (linii) identice;

- $det(A) = 0$, dacă există o coloană (linie) cu toate elementele egale cu 0.

Adjuncta unei matrice

Adjuncta unei matrice pătratice A este matricea transpusă formată prin înlocuirea fiecărui element a_{ij} cu cofactorul său C_{ij}.

$$adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nm} \end{bmatrix}$$

Relaţii utile:

- $adj(A)A = det(A)I$;
- $adj(A^T) = adj(A)^T$;
- $adj(A^H) = adj(A)^H$.

Inversa unei matrice

Inversa unei matrice A, notată A^{-1} este tot o matrice care satisface relaţia:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Inversa unei matrice A se calculează cu relaţia:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}.$$

O matrice A poate avea o inversă numai dacă $det(A) \neq 0$.
Intre două matrice pătratice A şi B există relaţia:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Rangul unei matrice

Rangul unei matrice $A_{n\times m}$, notat $rang(A)$, este cel mai mic număr r pentru care există două matrice $X_{n\times r}$ şi $Y_{r\times m}$ astfel încât $A = XY$.
Proprietăţi utile în calcularea rangului unei matrice:

- $rang(A_{n\times m}) \leq min(m, n)$;
- $rang(A)$ = numărul maxim de linii (coloane) independente ale matricei A;
- $rang(A_{n\times m}) = n$ dacă şi numai dacă toate coloanele matricei A sunt liniar independente;
- $rang(A) = rang(A^T) = rang(A^H)$;
- dacă $rang(A) < n$ rezultă $|A_{n\times n}| = 0$;
- $rang(A + B) \leq rang(A) + rang(B)$.

Imaginea sau domeniul unei matrice

Imaginea sau domeniul unei matrice $A_{m\times n}$, notată $\mathcal{R}ange(A)$ este subspaţiul format din vectorii $[\alpha]_{n\times 1}$ pentru care ecuaţia $Ax = \alpha$ are soluţie.

Domeniul unei matrice A este complementul ortogonal al subspaţiului nul al matricei A^H.

Subspaţiul nul al unei matrice

Subspaţiul nul al unei matrice $A_{m\times n}$ se notează cu $\mathcal{K}er(A)$ sau $\mathcal{N}ull(A)$ şi este un subspaţiu format din vectori $[x]_{n\times 1}$ care satisfac relaţia $Ax = 0$.

Subspaţiul ortogonal al unei matrice A este complementul ortogonal al domeniului matricei A^H.

Valori proprii. Vectori proprii

Pentru o matrice A de dimensiune $n \times n$ dacă există o valoare scalară λ şi un vector nenul w astfel încât:

$$Aw = \lambda w$$

atunci λ este o *valoare proprie* a matricei A iar w este *vectorul propriu* corespunzător.

- Vectorul propriu w nu este unic. Orice scalar $\alpha \neq 0$ poate forma un nou vector propriu $w^* = \alpha w$.
- O matrice $A_{n\times n}$ are exact n valori proprii (nu neaparat distincte).
- Dacă o matrice $A_{n\times n}$ posedă n valori proprii diferite, atunci ea posedă şi n vectori proprii diferiţi. Dacă se notează cu $W = [w_1, w_2, \ldots, w_n]$ matricea vectorilor proprii corespunzători celor λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ valori proprii, atunci se poate scrie:

$$\diamond \quad AW = W\Lambda$$

$$\diamond \quad W^{-1}AW = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$$

- Produsul valorilor proprii ai unei matrice $A_{n\times n}$ este egal cu determinantul matricei:

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$$

Spectrul unei matrice

Spectrul unei matrice A, notat $\lambda(A)$, este mulţimea tuturor valorilor proprii ale matricei A.

Polinomul caracteristic ale unei matrice

Polinomul caracteristic $p(s)$ al unei matrice A este definit ca fiind determinantul matricei $(sI - A)$, $p(s) = det(sI - A) = |sI - A|$.

Matricea caracteristică

Matricea caracteristică a unei matrice $A_{n\times n}$ este tot o matrice $(sI - A)$ şi este o funcţie de s.

Ecuaţia caracteristică a unei matrice

Ecuaţia caracteristică a matricei A este definită astfel:

$$\begin{aligned} &det(sI - A) = 0, \quad sau \\ &s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

şi este o ecuaţie în s.

Soluţiile ecuaţiei caracteristice sunt valorile proprii λ_i, $i = 1\ldots n$ ale matricei $A_{n\times n}$, adică:

$$\lambda_i^n + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda_i + \alpha_0 = 0$$

Teorema Cayley-Hamilton

O matrice A îşi satisface ecuaţia caracteristică $det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$:

$$A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

Matricea Grammian

Matricea Grammian a unei matrice A, notată $Gram(A)$, este matricea $A^H A$ şi posedă următoarele proprietăţi:

- este pozitiv semi-definită;
- $|Gram(A)| = 0$ dacă şi numai dacă minorul principal al matricei $Gram(A)$ este 0;
- $rang(Gram(A)) = rang(A)$;

Grammianul unei matrice

Grammianul unei matrice A, notat $gram(A)$, este egal cu $|Gram(A)| = |A^H A|$ şi se bucură de următoarele proprietăţi:

- este real şi mai mare sau egal cu zero;
- este strict mai mare decât zero, dacă şi numai dacă matricea A are toate coloanele liniar independente;

- $gram(A) = 0$ dacă şi numai dacă minorul principal al matricei $Gram(A)$ este egal cu 0;
- pentru o matrice $A_{n\times m}$, $n < m$, $gram(A) = 0$;
- pentru o matrice pătratică A_n, $gram(A) = gram(A^H) = |A|^2$.

Matrice polinomială

O matrice $A_{m\times n}(s) = [p_{ik}(s)] \in \mathbb{R}$, $i = 1\dots m$, $k = 1\dots n$ se numeşte matrice polinomială dacă $p_{ik}(s)$ sunt polinoame.

Rangul unei matrice polinomiale $A(s)$ nu depinde de argumentul s.

Matrice unimodală

O matrice unimodală $A(s)$ este o matrice polinomială în s care are determinantul egal cu o constantă diferită de zero. Determinantul acesteia nu depinde de variabila s.

Inversa unei matrice unimodale este tot o matrice unimodală.

Matrice la dreapta

O matrice la stânga este o matrice unimodală care înmulţită la dreapta cu o matrice polinomială aplică o operaţie elementară pe linii sau coloane în matricea polinomială.

Matrice la stânga

O matrice la stânga este o matrice unimodală care înmulţită de la stânga cu o matrice polinomială aplică o operaţie elementară pe linii sau coloane în matricea polinomială.

Echivalenţa a două matrice

Două matrice A_1 şi A_2 sunt echivalente, notat $A_1 \sim A_2$, dacă există două mulţimi de matrice la stânga $\{L_1, L_2 \dots L_i\}$ şi la dreapta $\{R_1, R_2 \dots R_j\}$, astfel încât:

$$A_1 = L_j \dots L_2 L_1 A_2 R_1 R_2 \dots R_i.$$

ANEXA

Reprezentarea sistemelor sub formă de matrice Rosenbrock

Dacă pentru un sistem după aplicarea transformatei Laplace (cu condiţii iniţiale nule) rezultă matricea:

$$\begin{aligned} T(s)\gamma &= U(s)u \\ y &= V(s)\gamma + W(s)u, \end{aligned}$$

unde γ, u şi y sunt vectorii rezultaţi în urma aplicării transformatei Laplace, iar $T_{r\times r}$, $U_{r\times m}$, $V_{p\ timesr}$ şi $W_{p\times m}$ sunt matrice polinomiale, atunci matricea rezultată poartă denumirea de matrice Rosenbrock. Este de notat faptul că γ_i sunt variabilele sistemului şi nu sunt în mod necesar variabilele de stare ale sistemului [Patel şi Munro, 1982].

Aceste ecuaţii pot fi scrise sub forma:

$$\begin{bmatrix} T(s) & -U(s) \\ V(s) & W(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

şi reprezentarea matriceală *Rosenbrock* [Rosenbrock, 1970] a sistemului este:

$$P(s) = \begin{bmatrix} T(s) & -U(s) \\ V(s) & W(s) \end{bmatrix}$$

Observaţia 1

Dimensiunea r a matricei $T(s)_{r\times r}$ trebuie astfel aleasă încât r să fie mai mare sau egală cu gradul polinomului $|T(s)|$.

Polii sistemului sunt rădăcinile ecuaţiie $|T(s)| = 0$.

Dacă se cunoaşte matricea Rosenbrock, funcţia (matricea) de transfer este:

$$H(s) = V(s)T^{-1}U(s) + W(s).$$

In cazul în care sistemul este descris în spaţiul stărilor printr-un cvadruplu (A, B, C, D) forma matriceală Rosenbrock este:

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

ANEXA

Forma Smith-McMillan de reprezentare a sistemelor

O matrice raţională $G(s)_{m\times n} = [G_{ik}(s)]$, $i = 1\dots m$, $k = 1\dots n$, poate fi redusă la forma Smith-McMillan.

Astfel matricea $G(s)$ se poate scrie sub forma:

$$G(s) = 1/d(s)\cdot N(s),$$

unde $N(s)_{m\times n}$ este o matrice polinomială, iar $d(s)$ este cel mai mic multiplu comun al numitorilor fracţiilor din $G(s)$.

Matricea $N(s)$, cu rangul r poate fi scrisă sub forma *Smith*:

$$S(s) = L(s)N(s)R(s),$$

unde $L(s)$ şi $R(s)$ sunt două matrice de transformare la stânga, respectiv la dreapta, unimodale. O modalitate de determinare a acestor două matrice este prezentată în [Ly, 2003; Bosgra et al., 2003], dar există şi metode directe prin utilizarea de programe dedicate, de exemplu [Maplesoft, 2005] sau [Wolfram Research, 2005]. O metodă pentru detrminarea matricei $S(s)$ este prezentată şi în [Patel şi Munro, 1982].

Mai mult, dacă:

- $n > m$: $S(s) = diag[\Psi_i(s), O_{m,n-m}]$;
- $n = m$: $S(s) = diag[\Psi_i(s)]$;
- $n < m$: $S(s) = \begin{bmatrix} \Psi_i(s) \\ O_{m-n,n} \end{bmatrix}$,

unde $i = 1\dots r$, iar Ψ_i sunt *polinoamele invariante* în s ale matricei $N(s)$ astfel încât Ψ_i să dividă pe Ψ_{i+1}.

Polinoamele Ψ_i se pot determina astfel:

$$\Psi_i = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)},$$

unde $D_i(s)$ este cel mai mare divizor comun al tuturor minorilor $i \times i$ din $N(s)$.

In urma acestor operaţii matricea polinomială iniţială $N(s)$ este echivalentă cu matricea diagonală $S(s)$, $N(s) \sim S(s)$.

Şi matricea iniţială $G(s)$ poate fi scrisă printr-o matrice echivalentă diagonală, denumită forma *Smith-McMillan*. Aceasta este:

- $M(s) = diag\left[\frac{\epsilon_i}{\delta_i}, O_{m,n-m}\right]$, dacă $n > m$;
- $M(s) = diag\left[\frac{\epsilon_i}{\delta_i}\right]$, dacă $n = m$;
- $M(s) = diag\begin{bmatrix} \frac{\epsilon_i}{\delta_i} \\ O_{m-n,n} \end{bmatrix}$, dacă $n < m$,

unde $i = 1 \ldots r$ şi se obţine prin înmulţirea matricei $S(s)$ cu $1/d(s)$ şi prin simplificarea tuturor factorilor comuni ce pot apărea în $M(s)$, astfel încât ϵ_i şi δ_i, $i = 1 \ldots r$ sunt polinoame coprime.

Astfel matricea $G(s) \sim M(s)$.

Bibliografie selectivă

Belea, C. şi Vortolomei, M. [1985]. *Metode algebrice şi algoritmi de siteză optimală a sistemelor dinamice*, Ed. Academiei Române, Bucureşti.

Bosgra, O. H., Kwakernaak, H. şi Meinsma, G. [2003]. Notes for a Course of the Dutch Institute of Systems and Control. Delft University of Technology.

Brookes, M. [2005]. The Matrix Reference Manual, http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb /matrix/intro.html.

Dobra, P. [1999]. *Sisteme neliniare*, U.T.Press, Cluj-Napoca.

Dobra, P. [2002]. *Teoria sistemelor. Realizări de stare*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca.

Dorf, R. C. [1980]. *Modern Control Systems*, Addison-Wesley Publishing Company.

Dragomir, T. L. [2004]. *Elemente de teoria sistemelor, Vol. I*, Ed. Politehnica, Timişoara.

Dragomir, T. L. şi Preitl, S. [1979]. *Elemente de teoria sistemelor şi reglaj automat, Vol. I-II*, Timişoara.

Feedback Instruments Ltd. [2000]. Digital Pendulul System, Sussex, UK.

Filipescu, A. şi Stamatescu, S. [2002]. *Teoria sistemelor. Analiza şi sinteza sistemelor liniare în abordare structurală*, Matrix Rom, Bucureşti.

Freudenberg, J. S. şi Looze, D. P. [1985]. Right Half Plane Poles and Zeros and Design Tradeoffs in Feedback Systems, *IEEE Trans. Automatic Control* .

Goodwin, G. C., Graebe, S. F. şi Salgado, M. E. [2000]. *Control System Design*, Prentice Hall.

Havre, K. şi Skogestad, S. [2004]. Limitations Imposed by RHP Zeros/Poles in Multivariable Systems, *Technical report*, Chemical Engineering, Norwegian University of Science and Technology, N-7034 Trondheim, Norway.

Hovelaque, V., Commault, C. şi Dion, J. [2004]. Poles and Zeros of Linear Structured Systems. Laboratoire d'Automatique de Grenoble, St Martin d'Heres, France.

Hăngănuţ, M. [1971]. *Automatica*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Hăngănuţ, M. [1996]. *Teoria sistemelor, Vol. II*, Litografia Universităţii Tehnice din Cluj-Napoca.

Ionescu, V. [1985]. *Teoria sistemelor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti.

Ionescu, V. şi Varga, A. [1994]. *Teoria sistemelor: sinteză robustă, metode numerice de calcul*, Editura All, Bucureşti.

Isoc, D. [2001]. *Introducere în analiza, modelarea şi identificarea sistemelor*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca.

Isoc, D. şi Ignat, A. D. [2005]. Complex Thermal Experimental Benchmark. Implementing and Modeling Notes., *15th Int. Conference on Control Systems and Computer Science, Bucureşti, Romania* .

Johansson, K. H. [1997]. *Relay Feedback and Multivariable Control*, PhD thesis, Department of Automatic Control Lund Institute of Technology.

Lewis, A. D. [2004a]. A Mathematical Approach to Classical Control. Department of Mathematics & Statistics, Queen's University, Kingston, ON K7L 3N6 Canada.

Lewis, F. [2004b]. http://arri.uta.edu/acs/bios/lewis.html.

Ly, U. [2003]. Linear Systems Theory. Department of Aeronautics and Astronautics, Box 352400, University of Washington, Seattle, WA 98195.

Maplesoft [2005]. Maple, http://www.maplesoft.com.

Mathworks [2005]. Matlab Control System Toolbox User's Guide, www.mathworks.com.

Morari, M. şi Zafiriou, E. [1989]. *Robust Process Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Morris, K. şi Rebarber, R. [2005]. Zeros of SISO Infinite-Dimensional Systems, *Technical report*, University of Waterloo, Dept. of Applied Mathematics.

Patel, R. şi Munro, N. [1982]. *Multivariable System Theory and Design*, International Series on Systems and Control.

Polderman, J. şi Willems, J. [1997]. *Introduction to Mathematical Systems Theory, A Behavioral Approach*, Springer Verlag.

Rodriguez, A. [2004a]. A Practical Approach to Signals, Systems and Controls, `http://www.eas.asu.edu/~aar`.

Rodriguez, A. [2004b]. Multivariable Control System Design, Class Notes, `http://www.eas.asu.edu/~aar/classes/eee598S98/notes/notes.html`.

Rodriguez, A. A. [2004c]. Controllabilty of Linear Time Varying Systems, `http://www.eas.asu.edu/~aar/classes/eee598S98/problems/582s93sp001p00.html`.

Rodriguez, A. A. [2004d]. Multivariable Control System Design. Course at Arizona State University, USA.

Rosenbrock, H. H. [1970]. *State-Space and Multivariable Theory*, New York, Wiley.

Schrader, C. B. şi Sain, M. K. [1989]. Research on System Zeros, *Technical report*, Departament of electrical and Computer Engineering, university of Notre Dame, Notre Dame, Indiana 46556.

Schutter, B. D. [2000]. Minimal State-space Realization in Linear System Theory: An Oerview, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **Special Issue on Numerical Analysis in the 20th Century Vol. I: Approximation Theory**.

Siamantas, G. G. [1994]. *Examples of Multivariable Control Systems*, Master's thesis, University of Manchester.

Teodorescu, D. [1984]. *Sisteme automate deterministe*, Ed. Tehnică, Bucureşti.

Tham, M. [1999]. Multivariable Control: an Introduction to Decoupling Control, *Technical report*, Dept. of Chemical and Process Engineering, University of Newcastle upon Tyne.

Tpkarzewski, J. [2004]. A Note on Some Characterization of Invariant Zeros in Singular Systems and Algebraic Ccriteria of Nondegeneracy, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2004, Vol. 14, No. 2, 149-159* .

Villegas, A. [2004]. *Design of Robust Controllers for Multivariable Non-linear Plants*, Master's thesis, Dublin City University.

Wen, J. [2004]. Multivariable Control, Course at Renseeler Polytechnic Institute, USA.

Willems, J. C. [2003]. State Construction and Subspace Identification. University of Leuven, Belgium.

Willis, M. şi Tham, M. [2004]. Advanced Process Control, `http://lorien.ncl.\-ac.uk/ming/advcontrl/sect8.htm`.

Wolfram Research [2005]. Mathematica, http://www.wolfram.com/.

Index

Cayley-Hamilton, 25, 166
control
  automat, 17
  multivariabil centralizat, 7
  multivariabil descentralizat, 6
controlabilitate
  în sens Grammian, 23
  în sens larg, 18, 20
  definiţie, 22
  funcţională, 39
  intrare-ieşire, 38
  matrice de controlabilitate, 25
  pe ieşire, 38
  pe stare, 37
  testul PBH, 27
cuplare, 7

fază
  minimă, 69, 79
  neminimă, 69, 79
fenomen, 17
formă canonică diagonală, 32
formă minimală, 15, 71, 72
forma
  Rosenbrock, 72, 75, 78, 90, 169
  Smith, 82, 84, 90, 171
  Smith-McMillan, 70, 78, 82, 171
funcţie de transfer, 64

matrice
  înmulţirea, 162
  adjuncta, 164
  adunarea, 162
  determinantul, 163
  echivalenţa, 167
  ecuaţia caracteristică, 166
  grammianul, 166
  imaginea, 165
  inversa, 164
  minor, 163
  polinom caracteristic, 166
  rangul, 164
  spectrul, 165
matricea
  caracteristică, 166
  diagonală, 162
  grammian, 166
  identitate, 162
  la dreapta, 167
  la stânga, 167
  polinomială, 167
  unimodală, 167
  zero, 162
modurile sistemului, 66

observabilitate
  în sens Grammian, 44
  în sens larg, 41
  în sens larg, 43
  definiţie, 43
  matrice de observabilitate, 45
  testul PBH, 48
ordin McMillan, 71

polii sistemului, 12, 67, 71
polinom caracteristic, 66, 166
polinom invariant, 84, 171
proces, 17

reacţie inversă
  în sens larg, 17
  pe ieşire, 19
  pe stare, 19
realizare de stare, 15

sistem, 17
  liniar, 10
  liniar invariant în timp, 11
  monovariabil, 5
  multivariabil, 5
  neliniar, 10
stare
  necontrolabilă, 23
  neobservabilă, 44
  observabilă, 43
subspaţiu
  controlabil, 31, 34
  necontrolabil, 31, 34
  neobservabil, 51, 52
  observabil, 51, 52

valori proprii, 71, 165
vectori proprii, 32, 165

zerouri de blocare, 74
zerouri de decuplare
  în sens larg, 83
  ale sistemului, 89
  pe ieşire, 87
  pe intrare, 84
  pe intrare şi pe ieşire, 88
zerouri de transmisie
  în sens larg, 69, 74
  definiţie, 74
  determinare, 75, 78, 79
  la infinit, 80
zerouri invariante
  în sens larg, 90
  definiţie, 90
zerourile sistemului, 12, 91

AURELIAN D. IGNAT (Ing. 2003; SAp. 2004) este preparator universitar în cadrul Catedrei de Automatică a Universităţii Tehnice din Cluj Napoca şi doctorand fără frecvenţă la Universitatea *Politehnica* din Timişoara.

Principalele sale preocupări sunt dedicate modelării proceselor simple şi multivariabile (prin tehnici clasice, prin tehnicile matematicilor fuzzy, prin structuri cu reţele neuronale), cercetării structurilor complexe de control automat, a sistemelor de diagnoză şi evaluare a sistemelor de control.