

### 3.3. Formele canonice ale funcțiilor booleene

Considerăm o funcție booleană de 3 variabile, definită printr-un tabel de adevăr (Tabelul 3.3).

**Tabelul 3.3.** Exemplu de funcție logică definită prin tabelul de adevăr.

| Cod zecimal | $A B C$ | $F$ |
|-------------|---------|-----|
| 0           | 0 0 0   | 0   |
| 1           | 0 0 1   | 1   |
| 2           | 0 1 0   | 1   |
| 3           | 0 1 1   | 0   |
| 4           | 1 0 0   | 1   |
| 5           | 1 0 1   | 0   |
| 6           | 1 1 0   | 0   |
| 7           | 1 1 1   | 1   |

Există două forme de exprimare a acestei funcții logice, pornind de la tabelul de adevăr.

Pentru *prima formă*, considerăm combinațiile variabilelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pentru care funcția are valoarea 1. Considerând o combinație dată a variabilelor pentru care valoarea funcției este 1,  $F$  se poate exprima sub forma unui produs, în care variabilele care au valoarea 0 sunt complementate, iar cele care au valoarea 1 sunt necomplementate. De exemplu, pentru combinația  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ , valoarea funcției este  $\overline{A}\overline{B}C$ .

Un asemenea termen produs care conține o singură dată fiecare din cele  $n$  variabile ale funcției, fie sub formă complementată, fie sub formă necomplementată, se numește *termen minimal* sau *minterm*. Termenul are valoarea 1 numai pentru o anumită combinație a valorilor variabilelor, iar pentru toate celelalte  $2^n - 1$  combinații are valoarea 0.

Suma mintermilor corespunzătoare combinațiilor pentru care valoarea funcției este 1 va avea valoarea 1 numai pentru aceste combinații și va avea valoarea 0 pentru celelalte combinații. Această sumă, care este o reprezentare algebrică a funcției, se numește *formă canonică sub formă de sumă de produse* sau *formă disjunctivă normală*.

Pentru funcția dată ca exemplu, scriind termenii minimali pentru care  $F = 1$  și însumând se obține:

$$F(A, B, C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + ABC \quad (3.1)$$

Notând mintermii cu  $P_i$ , unde indicele  $i$  exprimă echivalentul zecimal al unei combinații a variabilelor pentru care funcția are valoarea 1, se poate scrie pentru același exemplu:

$$F(A, B, C) = P_1 + P_2 + P_4 + P_7 \quad (3.2)$$

sau

$$F(A, B, C) = \sum_{i \in k} P_i, \quad k = \{1, 2, 4, 7\} \quad (3.3)$$

sau

$$F(A, B, C) = \sum (1, 2, 4, 7) \quad (3.4)$$

Pentru a doua formă de exprimare a funcției, considerăm combinațiile variabilelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  pentru care valoarea funcției este 0. Funcția se poate exprima sub forma unui produs de termeni, fiecare termen fiind o sumă a variabilelor, în care variabilele care au valoarea 0 sunt necomplementate, iar cele care au valoarea 1 sunt complementate. De exemplu, pentru combinația  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ , termenul corespunzător este  $A + B + \overline{C}$ . Acest termen are valoarea 0 numai pentru această combinație (001) a variabilelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Un asemenea termen sumă care conține o singură dată fiecare din cele  $n$  variabile ale funcției, fie sub formă complementată, fie sub formă necomplementată, se numește *termen maximal* sau *maxterm*. Funcția se poate exprima sub forma unui produs al termenilor maximali, numită *formă canonică sub formă de produs de sume* sau *formă conjunctivă normală*.

Pentru funcția considerată, această formă este:

$$F(A, B, C) = (A + B + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C) \quad (3.5)$$

Notând maxtermii cu  $S_i$ , se poate scrie:

$$F(A, B, C) = S_0 \cdot S_3 \cdot S_5 \cdot S_6 \quad (3.6)$$

sau

$$F(A, B, C) = \prod_{i \in k} S_i, \quad k \in \{0, 3, 5, 6\} \quad (3.7)$$

sau

$$F(A, B, C) = \prod (0, 3, 5, 6) \quad (3.8)$$

Cele două forme canonice ale unei funcții booleene sunt echivalente.

Din cele prezentate anterior rezultă că mintermii și maxtermii se completează reciproc, deci

$P_i = \overline{S}_i$  sau  $S_i = \overline{P}_i$ . Cele două forme canonice sunt duale una alteia.

O funcție booleană de  $n$  variabile conține  $2^n$  mintermi și  $2^n$  maxtermi, deoarece fiecare variabilă poate avea două valori. Astfel, o funcție booleană de două variabile conține 4 mintermi și 4 maxtermi. Aceștia sunt prezentați în Tabelul 3.4, unde coloana  $P$  conține termenii produs (mintermii), iar coloana  $S$  conține termenii sumă (maxtermii).

**Tabelul 3.4.** Mintermii și maxtermii unei funcții booleene de două variabile.

| $A B$ | $P$                              | $S$                                 |
|-------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 0 0   | $P_0 = \overline{A}\overline{B}$ | $S_0 = A + B$                       |
| 0 1   | $P_1 = \overline{A}B$            | $S_1 = A + \overline{B}$            |
| 1 0   | $P_2 = A\overline{B}$            | $S_2 = \overline{A} + B$            |
| 1 1   | $P_3 = AB$                       | $S_3 = \overline{A} + \overline{B}$ |

Formele canonice sunt unice. Ele se pot utiliza pentru compararea diferitelor funcții booleene și pentru simplificarea acestor funcții.

Două funcții booleene sunt echivalente dacă formele lor canonice sunt identice.

Dacă o funcție booleană este specificată prin tabelul de adevăr, formele canonice se pot scrie direct din tabelă. Dacă o funcție booleană este specificată sub formă de expresie, pentru aducerea la forma disjunctivă normală (sub formă de sume de produse) se procedează astfel:

1. Se aduce expresia la forma de sumă de termeni produs.
2. Se examinează termenii pe rând și dacă un produs nu este minterm, se înmulțește cu sume de forma  $x_i + \overline{x}_i$ , unde  $x_i$  sunt variabilele care nu apar în produs.
3. Se aduce expresia la forma sumă de produse, aplicând distributivitatea operatorului  $\cdot$  față de operatorul  $+$ , și se elimină termenii redundanți.

### Exemplul 3.1

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{A} + BC \\
 &= \overline{A}(B + \overline{B})(C + \overline{C}) + (A + \overline{A})BC \\
 &= \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + ABC + \overline{A}BC \\
 &= \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + ABC
 \end{aligned}$$

Pentru aducerea unei expresii la forma conjunctivă normală (sub formă de produs de sume) se procedează astfel:

1. Se aduce expresia la forma de produs de termeni sumă.

2. Se examinează termenii pe rând și dacă un termen nu este maxterm, se adună produse de forma  $x_i \bar{x}_i$ , unde  $x_i$  sunt variabilele care nu apar în sumă.
3. Se aduce expresia la forma produs de sume, aplicând distributivitatea operatorului  $+$  față de operatorul  $\cdot$ , și se elimină termenii redundanți.

### Exemplul 3.2

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{A}(B+C) \\
 &= (\bar{A} + B\bar{B} + C\bar{C})(\bar{A}\bar{A} + B + C) \\
 &= (\bar{A} + B\bar{B} + C)(\bar{A} + B\bar{B} + \bar{C})(\bar{A}\bar{A} + B + C) \\
 &= (\bar{A} + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + C)(\bar{A} + B + C) \\
 &= (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(A + B + C)
 \end{aligned}$$

Trecerea de la o formă canonică la duală se poate realiza în două moduri:

- Pe baza tabelului de adevăr;
- Prin aplicarea succesivă a teoremei dublei negații și a teoremelor lui De Morgan.

### Exemplul 3.3

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} = \bar{\bar{F}}$$

Ținând cont de mintermii care apar în expresia funcției  $F$ , aceasta se poate scrie sub forma:

$$F = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_7$$

Complementul funcției  $F$  se poate scrie ținând cont de mintermii care nu apar în expresia acesteia:

$$\bar{F} = P_4 + P_5 + P_6$$

sau:

$$\bar{F} = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

Complementând din nou, se obține funcția inițială:

$$\begin{aligned}
 F &= \overline{\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}} \\
 &= \overline{\bar{A}\bar{B}C} \cdot \overline{\bar{A}B\bar{C}} \cdot \overline{A\bar{B}\bar{C}} \\
 &= (\bar{A} + B + C)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)
 \end{aligned}$$

sau

$$F = S_4 \cdot S_5 \cdot S_6$$