3.4. Minimizarea funcțiilor booleene

Minimizarea constă în obținerea formei celei mai simple de exprimare a funcțiilor booleene în scopul reducerii numărului de circuite şi a numărului de intrări ale acestora.

3.4.1. Metoda algebrică

Metoda algebrică constă în aplicarea succesivă a postulatelor şi teoremelor algebrei booleene scrise sub formă canonică disjunctivă sau conjunctivă. O funcție care nu este specificată inițial sub o formă canonică poate fi adusă la această formă.

În vederea minimizării, se urmăreşte reducerea numărului de termeni ai expresiei, a numărului de apariții ale variabilelor şi a numărului de variabile din fiecare termen. Apariția unei variabile complementate sau necomplementate reprezintă un *literal*.

Considerăm următoarea funcție:

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Grupând termenul 1 cu 2, 3 cu 5 şi 4 cu 6, se obține:

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B} + B\overline{C} + AC$$

Grupând termenul 1 cu 3, 2 cu 4 şi 5 cu 6, se obține:

$$F(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}C + AB$$

Acestea reprezintă expresii minimale ale funcției. Deci, o expresie minimală a unei funcții nu este, în mod obligatoriu, unică.

Metoda algebrică necesită experiență, devenind dificilă dacă expresia inițială a funcției este complicată. Un alt dezavantaj este faptul că nu se poate stabili cu uşurință dacă forma obținută este minimă sau se mai poate simplifica. Din aceste motive, în practică se utilizează metode grafice de minimizare.

3.4.2. Metoda diagramelor Karnaugh

Folosirea unei diagrame pentru simplificarea funcțiilor booleene a fost sugerată pentru prima dată de E. Veitch. Ulterior, M. Karnaugh propune de asemenea o formă de diagramă în acelaşi scop, rezultând diagrama Karnaugh. Această diagramă se utilizează în mod curent pentru reprezentarea funcțiilor booleene cu un număr relativ mic de variabile.

3.4.2.1. Reprezentarea funcțiilor prin diagrama Karnaugh

O diagramă Karnaugh constituie o variantă modificată a unui tabel de adevăr. În general, o diagramă Karnaugh pentru o funcție booleană de *n* variabile se reprezintă sub forma unui pătrat sau dreptunghi împărțit în 2^n pătrate (compartimente), fiecare pătrat fiind rezervat unui termen canonic al funcției.

Diagramele Karnaugh pentru funcțiile de 2, 3 şi 4 variabile sunt prezentate în Figura 3.3.

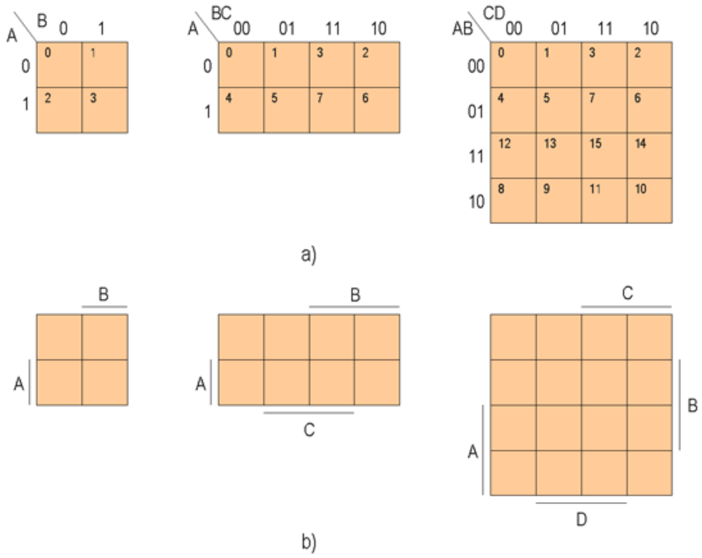

Figura 3.3. Diagrame Karnaugh pentru funcțiile booleene de 2, 3 şi 4 variabile.

O diagramă Karnaugh se notează fie indicând pe linie şi coloană combinațiile corespunzătoare fiecărui pătrat şi ordinea variabilelor (Figura 3.3(a)), fie indicând domeniul fiecărei variabile (Figura 3.3(b)). Pentru a se putea reprezenta în mod simplu funcții date în mod convențional prin indicii termenilor canonici, se poate nota fiecare compartiment cu indicele termenului canonic corespunzător.

O diagramă Karnaugh este astfel organizată încât două pătrate vecine (cu o latură comună) pe o linie sau pe o coloană corespund la combinații care diferă printr-o singură cifră binară, deci la doi termeni canonici care diferă printr-o singură variabilă, care apare într-unul din termeni sub formă complementată, iar în celălalt sub formă necomplementată. Asemenea două pătrate vecine, ale căror termeni canonici diferă printr-o singură variabilă, se numesc *adiacente*.

Se consideră adiacente şi pătratele aflate la capetele opuse ale unei linii, respectiv coloane, după cum se ilustrează în Figura 3.4. De aceea, este convenabil să se privească aceste diagrame ca suprafețe care se închid la margini. De exemplu, la o diagramă de 4 variabile, pătratele 0 şi 2, sau 0 şi 8 sunt adiacente. Deoarece unui termen canonic cu *n* literale îi corespund *n* termeni care diferă printr-un literal, într-o diagramă cu *n* variabile fiecare pătrat are *n* pătrate adiacente.

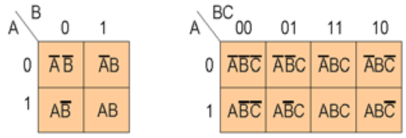

Figura 3.4. Ilustrarea adiacenței pătratelor de la capetele opuse ale liniilor.

În general, o funcție booleană de *n* variabile se poate reprezenta în spațiul *n*-dimensional al celor *n* variabile sub forma unui *hipercub*. Fiecărui termen canonic al funcției îi corespunde un vârf al hipercubului. Un grup de 2^m puncte ($m < n$), fiecare dintre ele adiacente la *m* puncte ale grupului, se numeşte *subcub*, şi se spune că subcubul acoperă aceste puncte ale grupului.

În diagrama Karnaugh, fiecare pătrat corespunde unui vârf al cubului *n*-dimensional din reprezentarea geometrică a funcției.

O funcție booleană dată sub forma canonică disjunctivă poate fi reprezentată pe o diagramă Karnaugh marcând cu 1 pătratele corespunzătoare mintermenilor funcției. Există o reprezentare similară pentru forma canonică conjunctivă a funcției. În diagramă se trece valoarea 0 în pătratele corespunzătoare maxtermilor.

3.4.2.2. Minimizarea funcțiilor prin diagrama Karnaugh

Modul de reprezentare prin diagrama Karnaugh este avantajos pentru minimizare, deoarece doi termeni canonici care diferă printr-o variabilă sunt adiacenți. Aceşti doi termeni se pot înlocui cu un termen în care lipseşte variabila prin care diferă cei doi termeni.

Exemplul 3.4

$F(A,B,C,D) = P_4 + P_6$

Funcția este reprezentată în Figura 3.5.

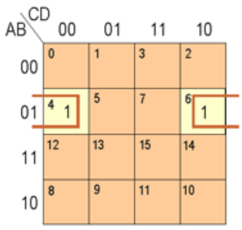

Figura 3.5. Reprezentarea funcției din Exemplul 3.4.

Se obține prin minimizare:

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} = \overline{A}B\overline{D}$$

În reprezentarea geometrică a unei funcții booleene, doi termeni canonici care diferă printr-o variabilă corespund la două vârfuri adiacente, deci definesc o latură a cubului n-dimensional. De aceea, se spune că două pătrate adiacente de pe diagramă reprezintă un *subcub unidimensional*.

Un grup de 4 pătrate adiacente, dintre care fiecare este adiacent cu alte două pătrate din același grup, formează un *subcub bidimensional*. Cei patru termeni canonici corespunzători acestor pătrate au o parte comună formată din două variabile, şi pot fi înlocuiți cu partea lor comună.

Exemplul 3.5

$$F(A,B,C,D) = P_0 + P_1 + P_4 + P_5$$

Funcția este reprezentată în Figura 3.6.

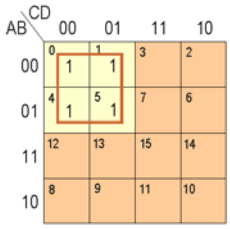

Figura 3.6. Reprezentarea funcției din Exemplul 3.5.

Se obține:

$$F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D = \overline{A}\,\overline{C}$$

Alte adiacențe posibile sunt prezentate în Figura 3.7.

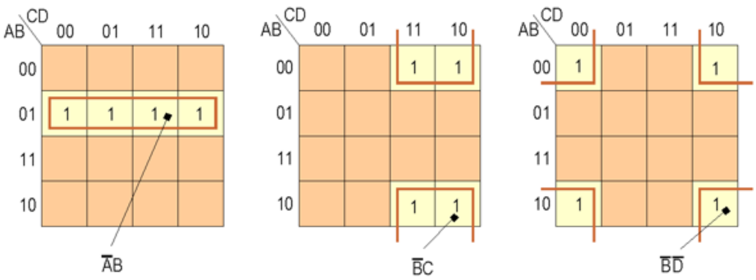

Figura 3.7. Unele adiacențe posibile pentru funcțiile de 4 variabile.

Pe o diagramă de 4 variabile se pot forma şi subcuburi tridimensionale, care cuprind 8 pătrate grupate astfel încât fiecare din ele este adiacent cu alte trei din acelaşi grup. Termenii canonici corespunzători pătratelor care formează un subcub tridimensional au o parte comună formată dintr-o singură variabilă, şi pot fi înlocuiţi cu această variabilă.

Exemplul 3.6

$F(A,B,C,D) = P_1 + P_3 + P_5 + P_7 + P_9 + P_{11} + P_{13} + P_{15}$

Funcţia este reprezentată în Figura 3.8.

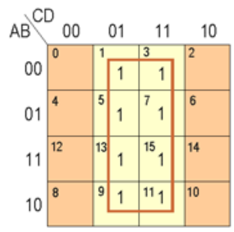

Figura 3.8. Reprezentarea funcţiei din Exemplul 3.6.

Rezultă prin minimizare:

$F(A,B,C,D) = D$

În general, fiecare subcub *m*-dimensional se poate exprima printr-un produs de *n-m* literale, cele *m* literale care nu apar fiind eliminate datorită adiacenţei. Deci, numărul de literale este cu atât mai mic, cu cât este mai mare dimensiunea subcubului.

Rezultă următoarea procedură de minimizare:

1. Se reprezintă funcţia pe diagramă, exprimată de obicei prin forma canonică disjunctivă.
2. Se grupează pătratele marcate cu 1 astfel încât să se obţină subcuburi cu dimensiunea cea mai mare posibilă. Astfel, pentru o diagramă cu *n* variabile, se caută să se formeze în primul rând subcuburi cu dimensiunea *n*-1, apoi *n*-2, şi în final, subcuburi unidimensionale. Fiecare pătrat marcat cu 1 trebuie să fie cuprins într-un subcub, dar acelaşi pătrat poate face parte din mai multe subcuburi, conform teoremei de idempotenţă.
3. Se scrie expresia finală a funcţiei, corespunzătoare numărului minim de subcuburi cât mai mari posibile şi care acoperă toate pătratele marcate cu 1. Aplicând teoremele algebrei booleene, funcţia obţinută se poate adapta pentru o implementare cu un anumit tip de circuit.

Exemplul 3.7

$$F(A,B,C,D) = P_1 + P_3 + P_9 + P_{10} + P_{11} + +P_{12} + P_{13} + P_{14}$$

O primă grupare a subcuburilor este cea din Figura 3.9(a).

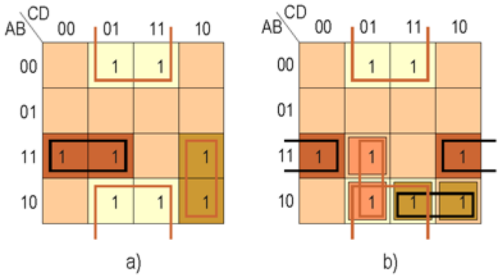

Figura 3.9. Două grupări diferite ale subcuburilor pentru funcția din Exemplul 3.7.

Prin această grupare se obține:

$$F(A,B,C,D) = \overline{B}D + AB\overline{C} + AC\overline{D}$$

Dacă se grupează subcuburile ca în Figura 3.9(b), se obține:

$$F(A,B,C,D) = \overline{B}D + AB\overline{D} + A\overline{C}D + A\overline{B}C$$

Aceasta nu reprezintă forma minimă, deoarece nu corespunde numărului minim de subcuburi.

Exemplul 3.8

$$F(A,B,C,D) = P_3 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{12} + P_{13} + P_{15}$$

Funcția este reprezentată în Figura 3.10.

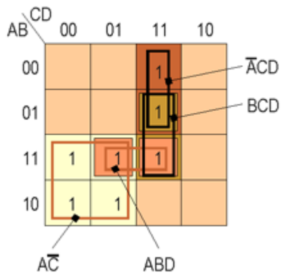

Figura 3.10. Reprezentarea funcției din Exemplul 3.8.

Există 4 subcuburi, care reprezintă termenii $A\overline{C}$, ABD, BCD, $\overline{A}CD$. Aceştia pot fi grupaţi în două moduri pentru a acoperi toate pătratele marcate cu 1 cu un număr minim de subcuburi. Rezultă două forme minime:

$$F(A,B,C,D) = A\overline{C} + ABD + \overline{A}CD$$

$$F(A,B,C,D) = A\overline{C} + BCD + \overline{A}CD$$

Pentru minimizarea funcţiilor exprimate printr-un produs de sume, procedeul este similar, subcuburile formându-se în poziţiile în care valoarea funcţiei este 0. La scrierea funcţiei se ţine cont de faptul că termenii reprezintă maxtermi.

Exemplul 3.9

$$F(A,B,C,D) = S_0 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 \cdot S_6 \cdot S_{10} \cdot S_{11} \cdot S_{14}$$

Funcţia este reprezentată în Figura 3.11.

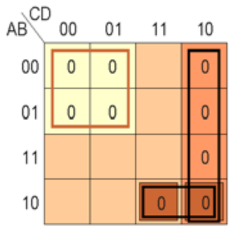

Figura 3.11. Reprezentarea funcţiei din Exemplul 3.9.

Rezultă:

$$F(A,B,C,D) = (A+C)(\overline{C}+D)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

Pentru a determina care dintre cele două forme minime, disjunctivă sau conjunctivă, conduce la un număr mai mic de circuite, trebuie determinate ambele forme. Dacă se dispune de porţi SAU-NU, este avantajos să se obţină forma minimă conjunctivă. Dacă se dispune de porţi ŞI-NU, este avantajos să se obţină forma minimă disjunctivă.

Se poate obţine forma disjunctivă minimă pentru funcţia negată, grupând zerourile şi scriind termenii minimali.

Exemplul 3.10

$$F(A,B,C,D) = P_1 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{12} + P_{13}$$

Reprezentarea funcţiei este dată în Figura 3.12.

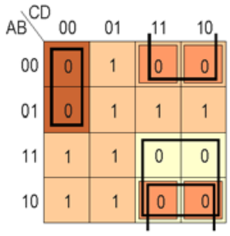

Figura 3.12. Reprezentarea funcției negate din Exemplul 3.10.

Se obține pentru funcția negată:

$$\overline{F}(A,B,C,D) = AC + \overline{B}C + \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$$

3.4.2.3. Minimizarea funcțiilor incomplet definite

O funcție este incomplet definită dacă în anumite puncte ale domeniului poate lua valoarea 0 sau valoarea 1.

Există și situații în care anumite combinații ale variabilelor sunt interzise. O combinație interzisă este denumită redundanță, și pentru o astfel de combinație se poate atribui drept valoare a funcției 0 sau 1.

Dacă o funcție este nedefinită în k puncte sau există k combinații interzise, rezultă 2^k funcții distincte posibile.

Procedeul de minimizare este în acest caz următorul:

1. Se reprezintă funcția pe diagramă, notând cu 1 pozițiile corespunzătoare variabilelor pentru care valoarea funcției este 1 și cu × pozițiile corespunzătoare variabilelor pentru care valoarea funcției este nedefinită.
2. Se obțin subcuburi cu dimensiunea cât mai mare, folosind în acest scop și pătratele notate cu ×, considerându-le marcate cu 1.
3. Se procedează în continuare ca și la minimizarea funcțiilor complet definite, cu observația că se utilizează numai subcuburile care conțin cel puțin un pătrat notat cu 1.

Exemplul 3.11

$$F(A,B,C,D) = \sum(0,1,2,5,8,11,15) + \sum\nolimits_{\Phi}(3,4,7,10,14)$$

Combinațiile indiferente sunt 3, 4, 7, 10, 14. Funcția este reprezentată în Figura 3.13.

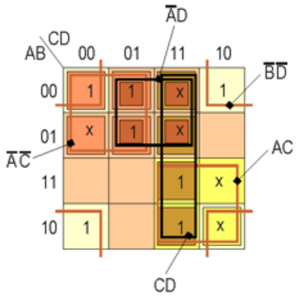

Figura 3.13. Reprezentarea funcției incomplet definite din Exemplul 3.11.

Funcția se poate scrie sub mai multe forme:

$$F(A,B,C,D)=\overline{B}\overline{D}+\overline{A}\overline{C}+AC$$
$$F(A,B,C,D)=\overline{B}\overline{D}+\overline{A}\overline{C}+CD$$
$$F(A,B,C,D)=\overline{B}\overline{D}+\overline{A}D+AC$$
$$F(A,B,C,D)=\overline{B}\overline{D}+\overline{A}D+CD$$