Se testează bitul $Q_0$ al înmulțitorului, şi dacă acest bit este 1, se adună deînmulțitul la produsul parțial aflat în registrul acumulator. Se deplasează registrul combinat A_Q la dreapta cu o poziție; pe poziția c.m.s. a registrului A se introduce 0. Se decrementează apoi numărătorul N. Dacă numărătorul nu a ajuns la 0, se continuă cu pasul următor al operației, testând următorul bit al înmulțitorului. Dacă numărătorul este 0, se transferă semnul rezultatului din bistabilul $Q_n$ pe poziția c.m.s. a registrului acumulator.

### Exemplul 6.2

Considerăm $X$ = `9`, $Y$ = `-12`. Execuția operației de înmulțire este ilustrată în Tabelul 6.4, care prezintă conținutul registrelor dispozitivului de înmulțire în fiecare pas al operației.

**Tabelul 6.4.** Execuția operației de înmulțire 9 × (-12) prin metoda directă.

| Pas | A | Q | B | $Q_n$ | $Q_0$ | N | Operații |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 0000 | 1100 | 1001 | 1 | 0 | 4 | Inițializare |
| 1 | 0 0000 | 0110 | 1001 | 1 | 0 | 3 | Deplasare A_Q la dreapta |
| 2 | 0 0000 + | 0011 | 1001 | 1 | 1 | 2 | Deplasare A_Q la dreapta |
| 3 | 1001<br>0 1001<br>0 0100 + | <br>0011<br>1001 | 1001 | <br><br>1 | <br><br>1 | <br><br>1 | Adunare deînmulțit<br><br>Deplasare A_Q la dreapta |
| 4 | 1001<br>0 1101<br>0 0110 | <br>1001<br>1100 | 1001 | <br><br>1 | <br><br>0 | <br><br>0 | Adunare deînmulțit<br><br>Deplasare A_Q la dreapta |
| 5 | 1 0110 | 1100 | 1001 | 1 | 0 | 0 | Stabilire semn rezultat |

Rezultatul este: $1\ 0110\ 1100_2 = -0110\ 1100_2 = -6Ch = -(6\cdot 16+12) = -108$.

#### 6.2.2.2. Metoda Booth

Dacă numerele din calculator sunt reprezentate în C2, se preferă o metodă de înmulțire care operează direct asupra numerelor în această reprezentare. Avantajul unei asemenea metode constă în eliminarea operației de complementare a operanzilor şi a rezultatului, dacă aceştia sunt negativi, ceea ce este important în cazul conversiei din C2 în MS, care este mai dificilă decât cea din C1 în MS. Asemenea metode sunt metoda Burks-Goldstine-von Neumann, metoda Robertson şi metoda Booth. Dintre acestea, metoda Booth (elaborată de A. D. Booth şi K. H. V. Booth), este cea mai utilizată.

Fie $X$ şi $Y$ deînmulțitul, respectiv înmulțitorul. Înmulțitorul se poate exprima sub forma:

$$Y = y_n 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} y_i 2^i \qquad (6.21)$$

unde $y_n$ este bitul de semn. Pentru început, se consideră că înmulțitorul este pozitiv, deci $y_n = 0$. Produsul $XY$ va fi:

$$XY = X\left(y_0 2^0 + y_1 2^1 + y_2 2^2 + ... + y_{n-1} 2^{n-1} + y_n 2^n\right) \tag{6.22}$$

Fiecare cifră $y_i$ se va înlocui cu diferența a două cifre alăturate ale înmulțitorului, $y_{i-1} - y_i$. Astfel, se vor efectua următoarele înlocuiri:

$y_0$ cu $y_{-1} - y_0$
$y_1$ cu $y_0 - y_1$
$y_2$ cu $y_1 - y_2$
…
$y_{n-1}$ cu $y_{n-2} - y_{n-1}$
$y_n$ cu $y_{n-1} - y_n$

Presupunând că $y_{-1} = 0$, produsul devine:

$$XY = X\left[-y_0 2^0 + (y_0 - y_1)2^1 + (y_1 - y_2)2^2 + ... + (y_{n-2} - y_{n-1})2^{n-1} + (y_{n-1} - y_n)2^n\right] \tag{6.23}$$

Se obține:

$$\begin{aligned} XY &= X\left[y_0\left(2^1 - 2^0\right) + y_1\left(2^2 - 2^1\right) + ... + y_{n-1}\left(2^n - 2^{n-1}\right) - y_n 2^n\right] \\ &= X\left(y_0 2^0 + y_1 2^1 + ... + y_{n-1} 2^{n-1} - y_n 2^n\right) \\ &= X\left(-y_n 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} y_i 2^i\right) \end{aligned}$$

Deoarece $y_n = 0$, în paranteză se află valoarea înmulțitorului $Y$. Înlocuirea este deci corectă. Pentru cazul în care înmulțitorul este negativ, demonstrația se efectuează în mod similar.

Diferența $y_{i-1} - y_i$ a două cifre alăturate poate fi 1, –1, sau 0. Dacă diferența este 1, trebuie să se efectueze o adunare a deînmulțitului la produsul parțial. Dacă diferența este –1, trebuie să se efectueze o scădere a deînmulțitului din produsul parțial. Dacă diferența este 0, nu trebuie să se efectueze nici adunarea, nici scăderea deînmulțitului pentru această cifră $i$ a înmulțitorului.

Se observă că dacă diferența $y_{i-1} - y_i$ este 1, cele două cifre alăturate $y_i y_{i-1}$ ale înmulțitorului sunt 01, dacă diferența este –1, cele două cifre sunt 10, iar dacă diferența este 0, cele două cifre sunt 00 sau 11. Rezultă următorul algoritm al metodei Booth:

> În fiecare pas al operației se testează doi biți alăturați ai înmulțitorului, $y_i$ (bitul curent) şi $y_{i-1}$ (bitul testat în pasul precedent, numit şi bit de referință). Bitul de referință pentru bitul c.m.p.s. al înmulțitorului este $y_{-1} = 0$. Testarea se efectuează începând cu bitul c.m.p.s. al înmulțitorului. În funcție de valoarea biților testați $y_i y_{i-1}$, se efectuează operațiile indicate în Tabelul 6.5.

**Tabelul 6.5.** Operațiile efectuate la înmulțirea prin metoda Booth, în funcție de valoarea biților testați.

| $y_i$ $y_{i-1}$ | **Operații** |
|---|---|
| 0 0 | Deplasare produs parțial la dreapta |
| 0 1 | Adunare deînmulțit, deplasare produs parțial la dreapta |
| 1 0 | Scădere deînmulțit, deplasare produs parțial la dreapta |
| 1 1 | Deplasare produs parțial la dreapta |

Structura unui dispozitiv de înmulțire prin metoda Booth este prezentată în Figura 6.11.

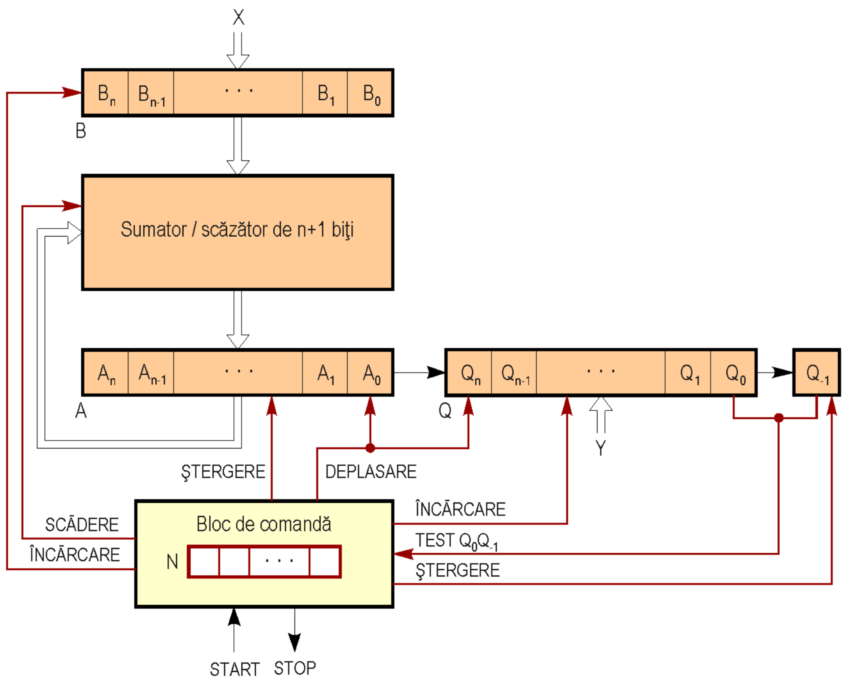


**Figura 6.11.** Schema bloc a unui dispozitiv de înmulțire prin metoda Booth.

Dispozitivul de înmulțire care utilizează această metodă conține un registru combinat A_Q, format din registrul acumulator A și registrul Q, de câte $n$+1 poziții, care păstrează produsul parțial, respectiv înmulțitorul. În acest caz, toate pozițiile înmulțitorului, inclusiv cea de semn, participă la deplasare. Registrul B, care păstrează deînmulțitul, are de asemenea $n$+1 poziții. Aceste registre trebuie să aibă posibilități similare cu cele utilizate la metoda de înmulțire directă. Mai este necesar un bistabil $Q_{-1}$, care păstrează bitul de referință. Sumatorul utilizat trebuie să aibă $n$+1 poziții, deoarece se operează cu toate cifrele, inclusiv cea de semn.

Blocul de comandă testează biţii $Q_0$, $Q_{-1}$ în fiecare pas al operaţiei. În funcţie de valoarea acestor biţi, se efectuează operaţiile necesare, astfel:

$Q_0 \oplus Q_{-1} = 0$: Deplasare la dreapta a registrului A_Q

$\overline{Q}_0 Q_{-1} = 1$: Adunare deînmulţit, deplasare la dreapta a registrului A_Q

$Q_0 \overline{Q}_{-1} = 1$: Scădere deînmulţit, deplasare la dreapta a registrului A_Q

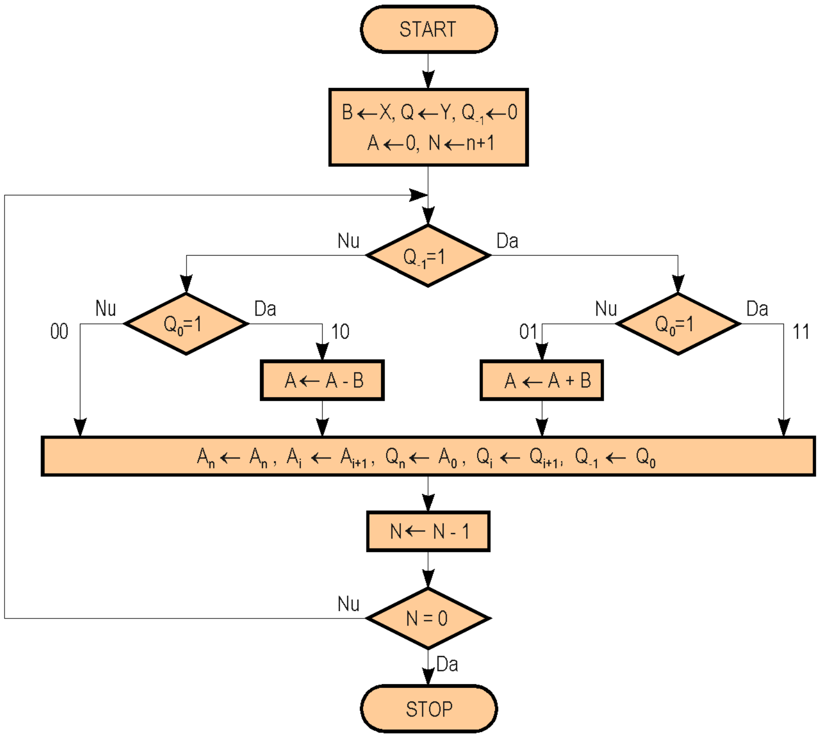


**Figura 6.12.** Organigrama operaţiei de înmulţire prin metoda Booth.

## Observaţii

1. Iniţial, bistabilul $Q_{-1}$ este şters, pentru ca bitul de referinţă pentru cifra c.m.p.s. a înmulţitorului să fie zero.
2. La deplasare se ţine cont de regula de deplasare pentru numerele cu semn reprezentate în C2. În acest caz, o deplasare spre dreapta necesită introducerea în poziţia de semn a bitului aflat aici înainte de deplasare. Bitul de semn din registrul A, deci $A_n$, este deplasat în $A_{n-1}$, dar rămâne şi în $A_n$ (se efectuează o deplasare aritmetică).
3. Se testează toţi biţii înmulţitorului, inclusiv bitul de semn.

4. Rezultatul se formează în registrul A_Q de $2n+2$ poziții, bitul de semn repetându-se pe primele două poziții (rezultatul propriu-zis are $2n+1$ biți).

Organigrama operației de înmulțire prin metoda Booth este prezentată în Figura 6.12.

În etapa de inițializare, se încarcă deînmulțitul şi înmulțitorul în registrul B, respectiv Q, bistabilul $Q_{-1}$ şi registrul acumulator sunt inițializate cu 0, iar numărătorul N este inițializat cu $n+1$.

În continuare se testează bitul de referință $Q_{-1}$ şi bitul $Q_0$ al înmulțitorului. Dacă $Q_0\,Q_{-1}$ = 01, se adună deînmulțitul din registrul B la produsul parțial din registrul A. Dacă $Q_0\,Q_{-1}$ = 10, se scade deînmulțitul din produsul parțial. Pentru celelalte două combinații ale biților testați, în această etapă nu se efectuează nici o operație. În etapa următoare se deplasează la dreapta registrul combinat A_Q, astfel încât în poziția bitului de semn $A_n$ să rămână aceeaşi valoare (păstrarea bitului de semn este indicată în organigramă prin transferul $A_n \leftarrow A_n$). Se decrementează numărătorul N, şi dacă acesta nu a ajuns la zero, se continuă operația cu testarea biților $Q_0\,Q_{-1}$. Dacă numărătorul N a ajuns la zero, operația se termină.

### Exemplul 6.3

Considerăm $X$ = `13`, $Y$ = `-10`. Exprimarea binară a acestor numere în C2 este următoarea:

$$X = 0\ 1101_2$$
$$Y = 1\ 0110_2$$

Scăderea deînmulțitului se efectuează prin adunarea complementului față de 2 al acestuia:

$$X\,(\mathrm{C2}) = -X = 1\ 0011_2$$

**Tabelul 6.6.** Execuția operației de înmulțire 13 × (–10) prin metoda Booth.

| Pas | A | Q | $Q_{-1}$ | B | $Q_0Q_{-1}$ | N | Operații |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 0000 | 1 0110 | 0 | 0 1101 | 0 0 | 5 | Inițializare |
| 1 | 0 0000 + | 0 1011 | 0 | 0 1101 | 1 0 | 4 | Deplasare A_Q la dreapta |
| 2 | 1 0011<br>1 0011<br>1 1001 | <br>0 1011<br>1 0101 | <br>0<br>1 | 0 1101 | <br><br>1 1 | <br><br>3 | Scădere deînmulțit<br><br>Deplasare A_Q la dreapta |
| 3 | 1 1100 + | 1 1010 | 1 | 0 1101 | 0 1 | 2 | Deplasare A_Q la dreapta |
| 4 | 0 1101<br>0 1001<br>0 0100 + | <br>1 1010<br>1 1101 | <br>1<br>0 | 0 1101 | <br><br>1 0 | <br><br>1 | Adunare deînmulțit<br><br>Deplasare A_Q la dreapta |
| 5 | 1 0011<br>1 0111<br>1 1011 | <br>1 1101<br>1 1110 | <br>0<br>1 | 0 1101 | <br><br>0 1 | <br><br>0 | Scădere deînmulțit<br><br>Deplasare A_Q la dreapta |

Conţinutul registrelor dispozitivului de înmulţire în fiecare pas al operaţiei este prezentat în Tabelul 6.6.

Rezultatul este: `1 0111 1110`$_2$ = `-1000 0010`$_2$ = `-82h` = `-(8·16+2)= -130`.

### 6.2.2.3. Înmulţirea pe grupe de cifre

În cazul acestei metode, înmulţirea se efectuează cu mai multe cifre ale înmulţitorului în acelaşi timp. Se reduce astfel numărul de paşi necesari efectuării operaţiei. Sunt necesare însă circuite suplimentare care să permită deplasarea cu mai multe poziţii şi adunarea multiplă a deînmulţitului într-un singur ciclu de adunare. Pentru reducerea complexităţii circuitelor, se utilizează grupe de doi sau trei biţi.

În cazul unor grupe de doi biţi, în funcţie de cifrele grupelor, pot apare următoarele situaţii:

00 : nu se efectuează adunarea;
01 : se adună deînmulţitul (*X*) la produsul parţial;
10 : se adună 2∗*X* la produsul parţial;
11 : se adună 3∗*X* la produsul parţial.

După fiecare test al grupei de cifre, se efectuează o deplasare la dreapta a registrelor A_Q cu două poziţii. Pentru adunarea dublului deînmulţitului (2∗*X*), fiecare bistabil al registrului B care păstrează deînmulţitul are două ieşiri la sumator. Bistabilul din poziţia *i* are o ieşire la poziţia *i* a sumatorului, şi o alta la poziţia *i*+1. Astfel, se poate aduna *X* la produsul parţial, sau se poate aduna *X* deplasat cu o poziţie spre stânga, ceea ce echivalează cu 2∗*X*.

Pentru adunarea triplului deînmulţitului (3∗*X*), există mai multe posibilităţi:

- Păstrarea într-un registru a triplului deînmulţitului;
- Adunarea deînmulţitului cu dublul său;
- Scăderea deînmulţitului din produsul parţial, urmând ca după deplasarea la dreapta cu două poziţii a produsului parţial (echivalentă cu înmulţirea *X* cu 4), să se adune *X* la produsul parţial. Astfel, se scade *X* şi se adună 4∗*X*.

Pentru a se putea efectua adunarea în pasul următor, blocul de comandă conţine un bistabil suplimentar (BS), care va fi poziţionat la 1 de fiecare dată când se întâlneşte combinaţia 11. Deci, operaţia efectuată într-un pas depinde atât de biţii din grupul testat, cât şi de conţinutul bistabilului BS setat în pasul anterior. La sfârşitul operaţiei, dacă BS = 1 se introduce un pas suplimentar, în care se adună *X* la produsul parţial, fără să se mai efectueze o deplasare.

Operaţiile efectuate sunt indicate în Tabelul 6.7. Biţii grupului testaţi sunt notaţi cu $y_{i+1}\, y_i$.