

2. Unitatea aritmetică și logică

- Adunarea
- Înmulțirea
- Împărțirea
- Numere și operații în virgulă mobilă

Înmulțirea

● Înmulțirea

- Înmulțirea prin deplasare și adunare
- Tehnica Booth
- Înmulțirea într-o bază superioară
- Înmulțirea matriceală
- Arborele Wallace
- Circuite de înmulțire *pipeline*

Înmulțirea

- Înmulțirea numerelor binare: similară cu cea a numerelor zecimale
 - Primul operand: **deînmulțit**
 - Al doilea operand: **înmulțitor**
 - Rezultatul: **produs**
- Dacă se ignoră biții de semn, prin înmulțirea a doi operanzi de câte n biți se obține un produs de $2n$ biți

Înmulțirea

- Înmulțirea

- Înmulțirea prin deplasare și adunare
- Tehnica Booth
- Înmulțirea într-o bază superioară
- Înmulțirea matriceală
- Arborele Wallace
- Circuite de înmulțire *pipeline*

Înmulțirea prin deplasare și adunare (1)

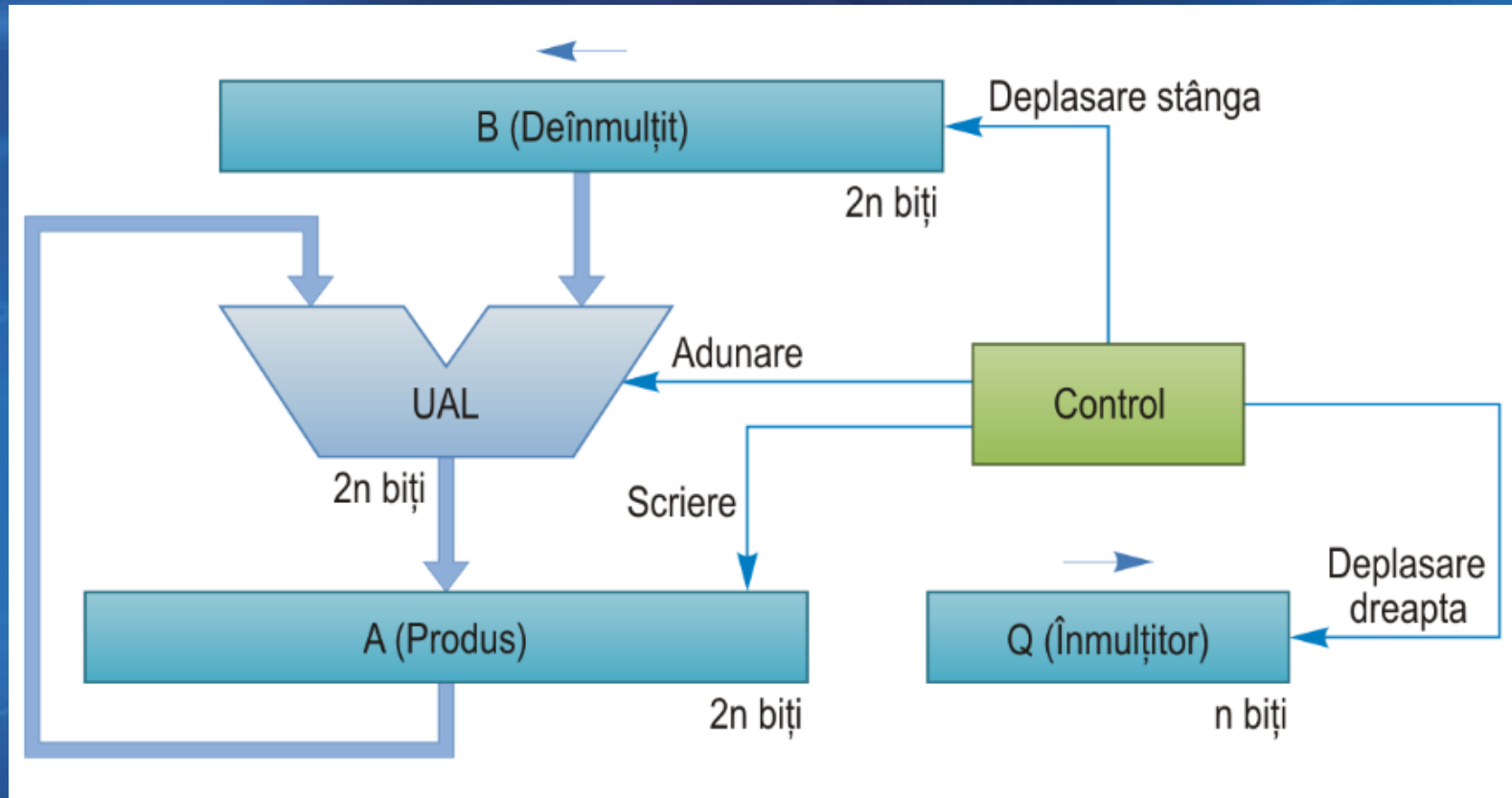
- Adună de înmulțitul X cu el însuși de Y ori
- Algoritmul:
 - Se selectează cifrele înmulțitorului una câte una de la dreapta la stânga
 - Se înmulțește de înmulțitul cu cifra selectată a înmulțitorului
 - Se plasează produsul intermediar la stânga rezultatelor precedente

Înmulțirea prin deplasare și adunare (2)

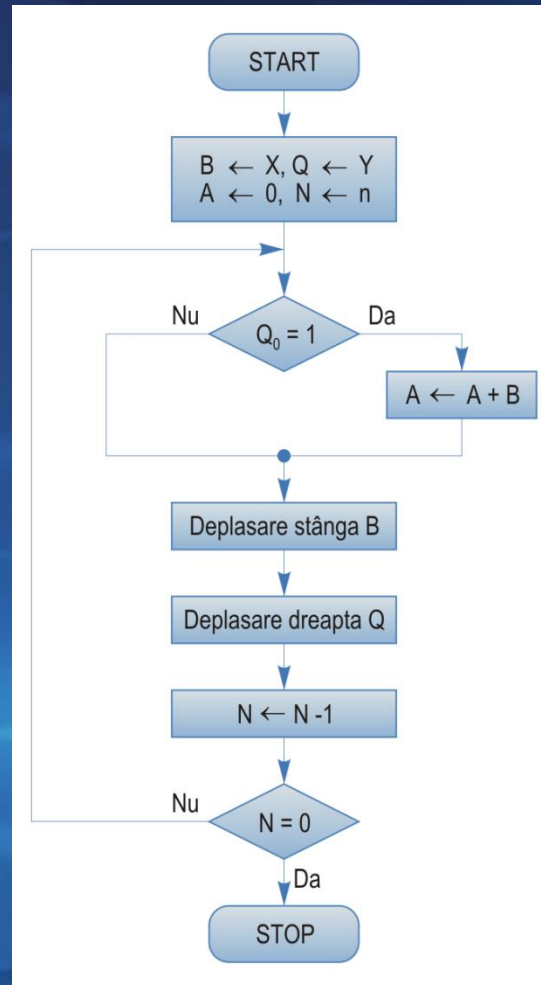
- În cazul înmulțirii binare, cifrele sunt 0 sau 1
- **Exemplu:** $X = 9$ (1001_2), $Y = 10$ (1010_2)

Deînmulțit	1 0 0 1 ×
Înmulțitor	<u>1 0 1 0</u>
	0 0 0 0
Produse parțiale	1 0 0 1
	0 0 0 0
	<u>1 0 0 1</u>
Produs	1 0 1 1 0 1 0 ($5A_{16} = 90$)

Înmulțirea prin deplasare și adunare (3)



Înmulțirea prin deplasare și adunare (4)



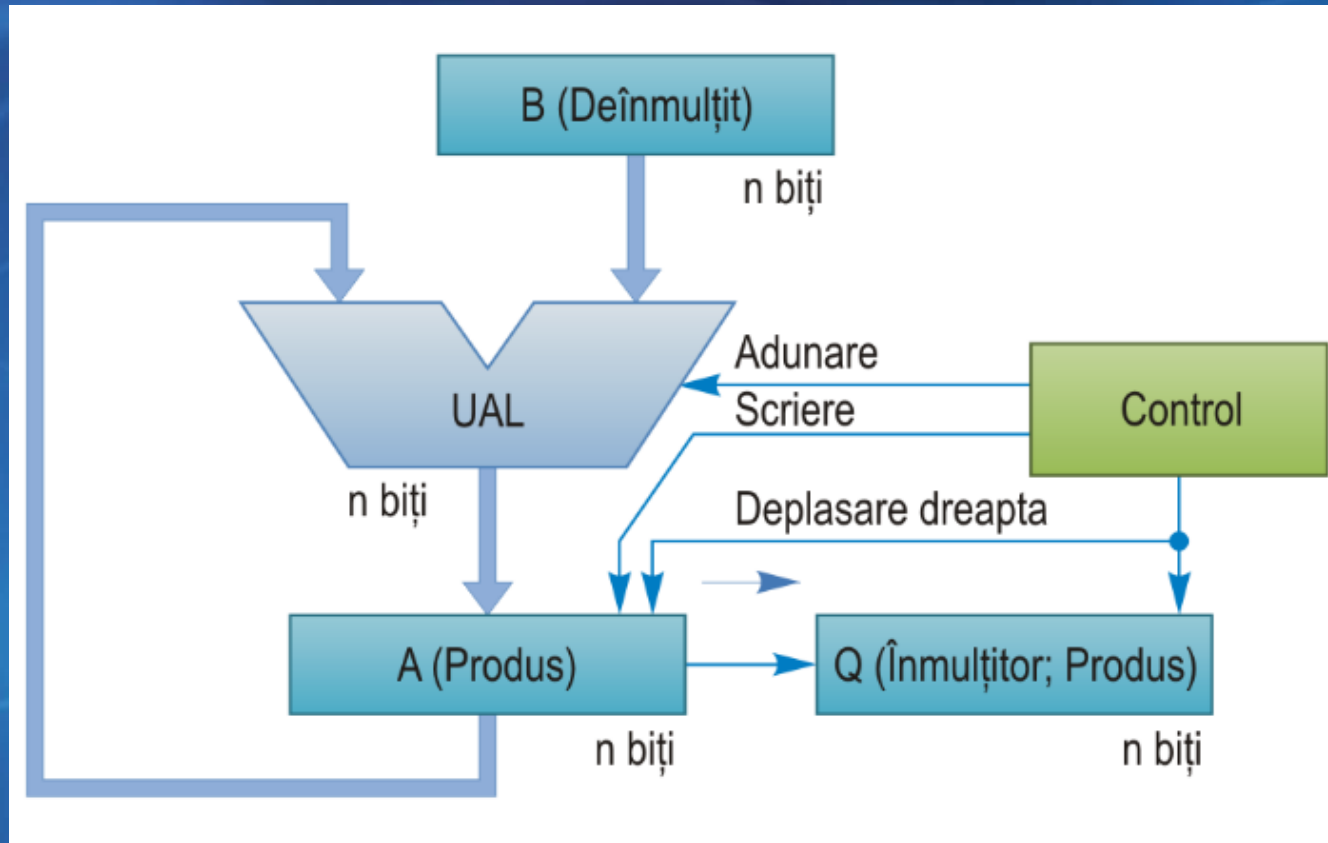
Înmulțirea prin deplasare și adunare (5)

- Algoritmul original deplasează deînmulțitul la stânga cu inserarea zerourilor în noile poziții
- În locul deplasării deînmulțitului la stânga, **se poate deplasa produsul la dreapta**
 - Deînmulțitul este fix relativ la produs
 - Sumatorul trebuie să fie de numai n biți → doar jumătatea din stânga a registrului produs este modificată în timpul adunării

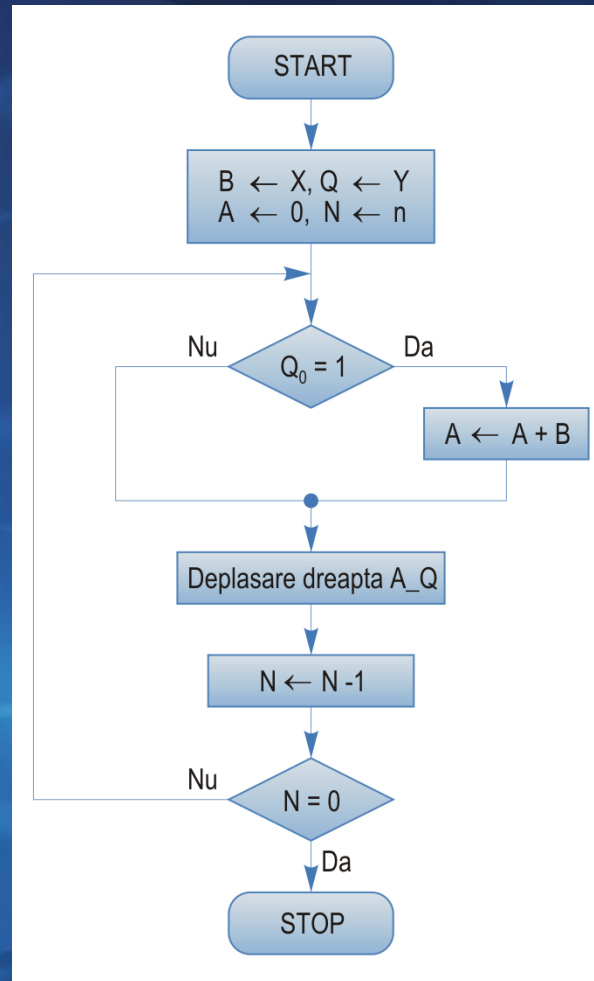
Înmulțirea prin deplasare și adunare (6)

- Registrul produs are un spațiu liber cu dimensiunea egală cu cea a înmulțitorului
- Pe măsură ce acest spațiu liber se reduce, se elimină și biții înmulțitorului
- **Versiunea finală** a circuitului de înmulțire combină produsul (registrul **A**) cu înmulțitorul (registrul **Q**)
 - Registrul **A** este de numai n biți
 - Produsul este format în registrele **A** și **Q**

Înmulțirea prin deplasare și adunare (7)



Înmulțirea prin deplasare și adunare (8)



Înmulțirea prin deplasare și adunare (9)

Exemplul 2.1

- $X = 9$ (1001_2), $Y = 12$ (1100_2)
- Versiunea finală a algoritmului de înmulțire

Pas	A	Q (Y)	B (X)	Operații
0	0000	110 <u>0</u>	1001	Inițializare
1	0000	011 <u>0</u>	1001	shr (A_Q)
2	0000	001 <u>1</u>	1001	shr (A_Q)
3	1001	001 <u>1</u>	1001	$A \leftarrow A + B$
	0100	100 <u>1</u>	1001	shr (A_Q)
4	1101	100 <u>1</u>	1001	$A \leftarrow A + B$
	0110	1100	1001	shr (A_Q)

- Rezultatul: $0110\ 1100_2 = 6C_{16} = 96 + 12 = 108$

Înmulțirea

● Înmulțirea

- Înmulțirea prin deplasare și adunare
- Tehnica Booth
- Înmulțirea într-o bază superioară
- Înmulțirea matriceală
- Arborele Wallace
- Circuite de înmulțire *pipeline*

Tehnica Booth (1)

- Aplicarea algoritmului de înmulțire pentru numere cu semn:
 - Conversia de înmulțitului și înmulțitorului la numere pozitive și memorarea semnelor
 - Produsul va fi înlocuit prin complementul său față de 2 dacă semnele originale sunt diferite
- Tehnica Booth:
 - Elimină necesitatea conversiei operanzilor la forma pozitivă
 - Poate reduce numărul operațiilor necesare

Tehnica Booth (2)

- Ideea principală: dacă se poate efectua atât adunare, cât și scădere, există mai multe posibilități de a calcula un produs
 - Un șir de cifre de 0 din înmulțitor necesită numai deplasare
 - Un șir de cifre de 1 poate fi tratat ca un număr cu valoarea $L - R$
 - L – ponderea cifrei 0 dinaintea cifrei 1 celei mai din stânga
 - R – ponderea cifrei 1 celei mai din dreapta

Tehnica Booth (3)

- **Exemplu:** Pentru $N = 01110_2$, $L = 2^4 = 16$,
 $R = 2^1 = 2 \Rightarrow N = 16 - 2 = 14$
- Un număr de adunări succesive este înlocuit printr-o scădere și o adunare
- La înmulțirea prin tehnica Booth se consideră **câte doi biți adiacenți** ai înmulțitorului pentru a determina operația care trebuie efectuată

Tehnica Booth (4)

Y_i	Y_{i-1}	Operații
0	0	Deplasare la dreapta
0	1	Adunare deînmulțit, deplasare la dreapta
1	0	Scădere deînmulțit, deplasare la dreapta
1	1	Deplasare la dreapta

Tehnica Booth (5)

● Observații

- Se testează doi biți ai înmulțitorului într-un pas: bitul curent y_i și bitul din dreapta y_{i-1} (bitul curent în pasul precedent)
- Registrul Q este extins cu o poziție, Q_{-1} , care conține bitul din dreapta
- Deplasarea produsului la dreapta trebuie să păstreze semnul rezultatului intermediar → **extinderea semnului**

Tehnica Booth (6)

● Exemplul 2.2

- $X = +13, Y = -10$
- Înmulțirea prin tehnica Booth
- $X = +13 = +1101_2 = 0\ 1101_2$
- $Y = -10 = -1010_2 = 1\ 0110_2$
- $-X = -13 = -1101_2 = 1\ 0011_2$

Tehnica Booth (7)

Pas	A	Q (Y)	Q ₁	Q ₀ Q ₁	B (X)	Operații
0	0 0000	1 0110	0	0 0	0 1101	Inițializare
1	0 0000	0 1011	0	1 0	0 1101	shr (A_Q)
2	1 0011	0 1011	0		0 1101	A ← A - B
	<u>1</u> 1001	1 0101	1	1 1		shr (A_Q)
3	<u>1</u> 1100+	1 1010	1	0 1	0 1101	shr (A_Q)
4	<u>0</u> 1101				0 1101	A ← A + B
	0 1001	1 1010	1			
	0 0100+	1 1101	0	1 0		shr (A_Q)
5	<u>1</u> 0011				0 1101	A ← A - B
	1 0111	1 1101	0			
	<u>1</u> 1011	1 1110	1	0 1		shr (A_Q)

● Rezultatul: $1\ 0111\ 1110_2 = -1000\ 0010_2 = -82_{16}$
 $= -(8 \times 16 + 2) = -130$

Rezumat

- Circuitul de înmulțire prin **deplasare și adunare** implementează metoda de înmulțire obișnuită
 - Circuitul poate fi optimizat pentru a utiliza registre de n biți și un sumator de n biți
- Înmulțirea prin **tehnica Booth** testează doi biți ai înmulțitorului în fiecare pas
 - Elimină necesitatea conversiei operanzilor la numere pozitive
 - Permite operații cu numere cu semn (în C2)
 - Poate reduce numărul operațiilor necesare

Noțiuni, cunoștințe

- Versiunea finală a circuitului de înmulțire prin deplasare și adunare
- Versiunea finală a algoritmului de înmulțire prin deplasare și adunare
- Execuția operației de înmulțire prin tehnica Booth
- Avantaje ale tehnicii de înmulțire Booth