Engineering is seeing solutions, not finding problems. ☺

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

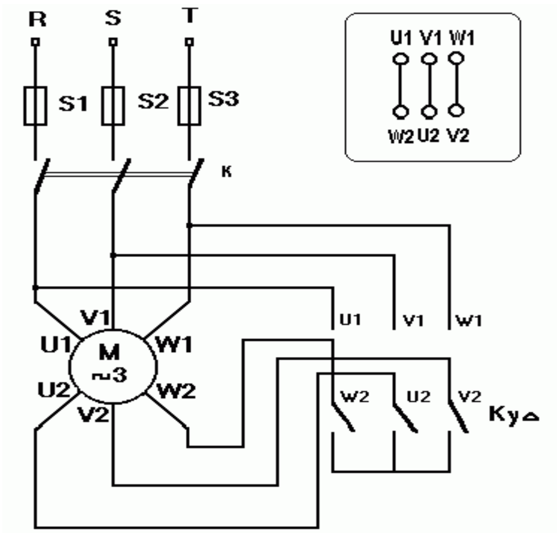
REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE – PARTEA I

Dr.Ing. Levente CZUMBIL

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Aplicație

Multe probeleme din domeniul electrotehnici implică într-o anumită etapă rezolvarea unor **ecuații neliniare, algebrice sau transcendente**, acestea constituind una dintre cele mai frecvente aplicații de calcul numeric, care apar în electrotehnică.



Fabrica de zahăr DIAMANT Oradea utilizează pompe antrenate de motoare de mare putere şi alimentate la medie tensiune. La pornire, din cauza curenţilor tranzitorii de valori ridicate, nivelul tensiunii în reţeaua de alimentare scade drastic. Se impune astfel studierea regimului de pornire a motoarelor, pentru a evita unele probleme de calitatea energiei care pot să apară.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Aplicaţie

Se consideră în acest context ecuaţia caracteristică pornirii maşinilor asincrone de mare putere. Necunoscuta este reprezentată de tensiunea la barele de alimentare (U_b) în momentul iniţial, al pornirii maşinii electrice, în situaţia în care de pe bare se alimentează şi altă sarcină:

$$\left[Z_p^{\,2}\cdot\left(\frac{U_{b0}}{S_{sc}}\right)^2+\frac{2\cdot X_p}{S_{sc}}+\frac{1}{U_{b0}^{\,2}}\right]\cdot\underline{U_b}^{\,2}-\left[\begin{array}{l}\left(\frac{S_{f0}}{S_{sc}}\right)^2+\frac{2\cdot\left(Q_{f0}-Q_f\right)}{S_{sc}}-\\-2\cdot\left(\frac{U_{b0}}{S_{sc}}\right)^2\cdot\left(R_p\cdot P_f+X_p\cdot Q_f\right)+1\end{array}\right]\cdot\underline{U_b}^{\,2}+S_f^{\,2}\cdot\left(\frac{U_{b0}}{S_{sc}}\right)^2=0$$

În această ecuaţie, datele cunoscute sunt reactanţele, rezistenţele şi impedanţa de pornire ale motorului, X_p, R_p, Z_p , puterea de scurtcircuit a nodului din care se alimentează motorul asincron, S_{sc} , tensiunea pe bare înaintea pornirii, U_{b0} , puterile absorbite de sarcina în funcţiune pe bare în regimul anterior pornirii, P_{f0}, Q_{f0} , respectiv în momentul pornirii, P_f, Q_f . Întrucât puterile depind de necunoscuta U_b , gradul ecuaţiei depinde de gradul de dependenţă al caracteristicilor sarcinii aflată în funcţiune pe bara de tensiune.

$$a_n\cdot X^n+a_{n-1}\cdot X^{n-1}+\cdots+a_1\cdot X+a_0=0$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Metoda Grafică de rezolvare a ecuațiilor

Această metodă constă în **reprezentarea grafică a funcției** și citirea datelor direct de pe grafic. Cu ajutorul **instrumentului zoom**, se mărește o porțiune din grafic și se citesc **coordonatele** punctului în care graficul intersectează axa Ox, adică se determină o rădăcină pentru funcția reprezentată grafic.

Se consideră ecuația: $4x^3 + e^{2x} - 16 = 0$ Să se determine o soluție a acesteia.

Pasul 1. Se introduce ecuația în *Mathcad.* La introducerea ecuațiilor se folosește **egalul boolean**. (Ctrl =)

$$4x^3 + e^{2x} - 16 = 0$$

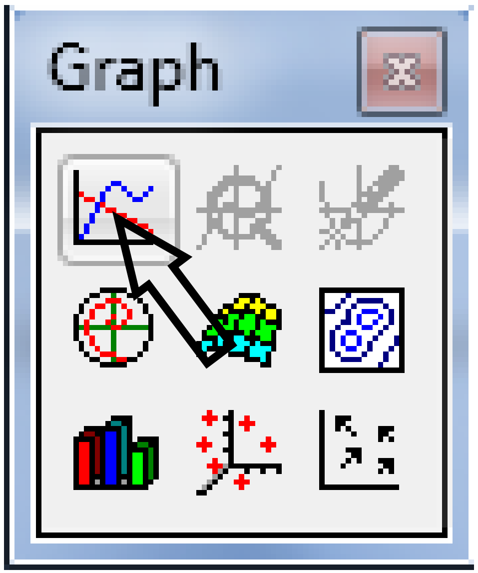
Pasul 2. Se definește funcția atașată ecuației. La definirea funcției se folosește operatorul de atribuire (:=)

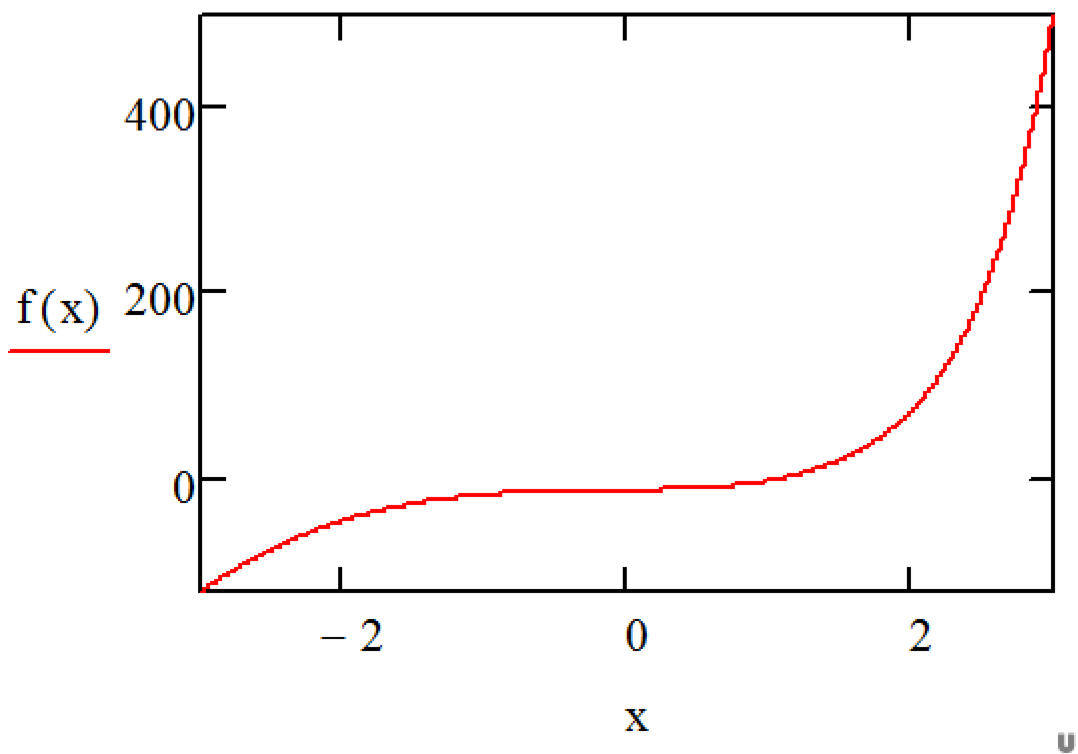
$$f(x) := 4x^3 + e^{2x} - 16$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

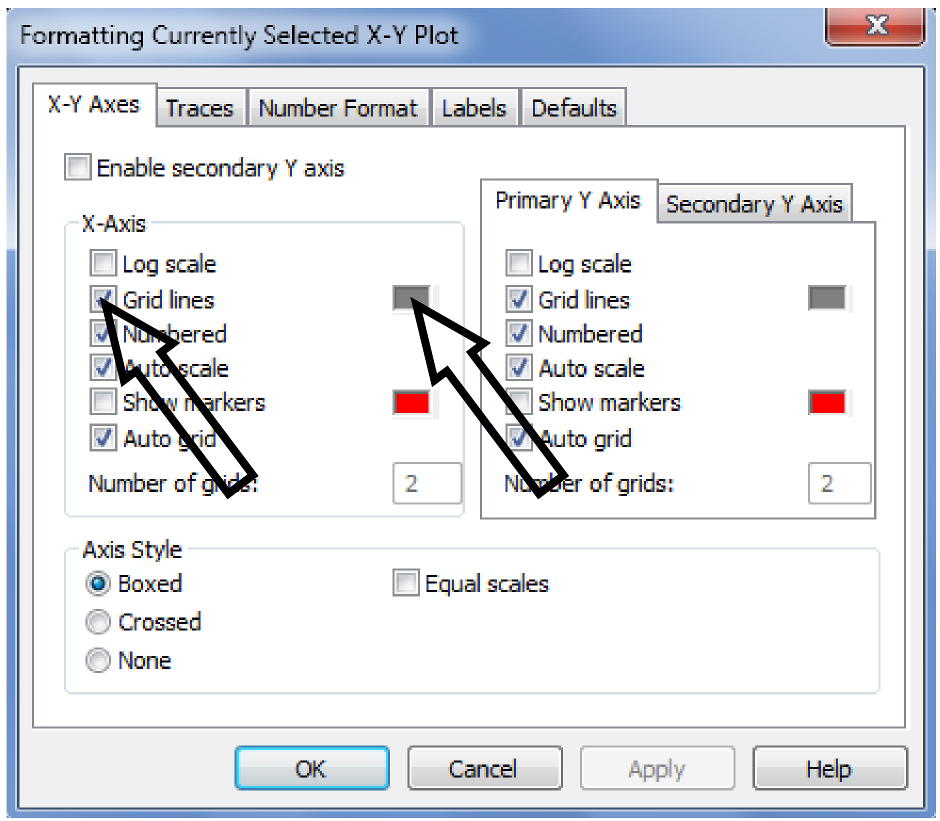
Pasul 3. Se reprezintă grafic funcția f(x) de la -3 până la 3, cu o un pas de 0,01. Graficul se introduce cu ajutorul toolbar-ului *Graph*. Se selectează *X – Y Plot* (Shortcut @)

$$x := -3, -2.995 .. 3$$





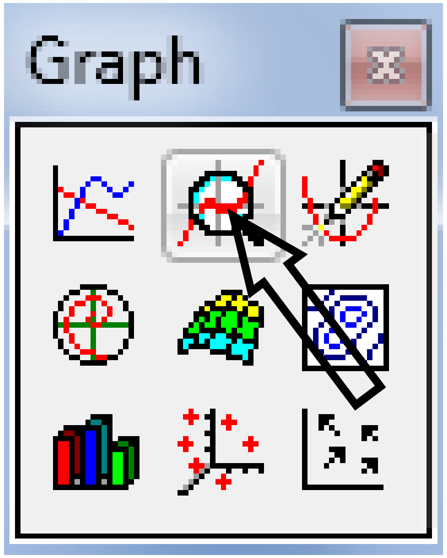
Pasul 4. Făcând dublu-click pe grafic se pot edita proprietățile acestuia. Se setează afișarea grilei pe ambele axe, cu o culoare gri, bifând căsuța din stânga lui *Grid lines*, pe ambele axe. Facând click pe culoare în dreapta *Grid lines*, se poate edita culoarea linilor grilei.

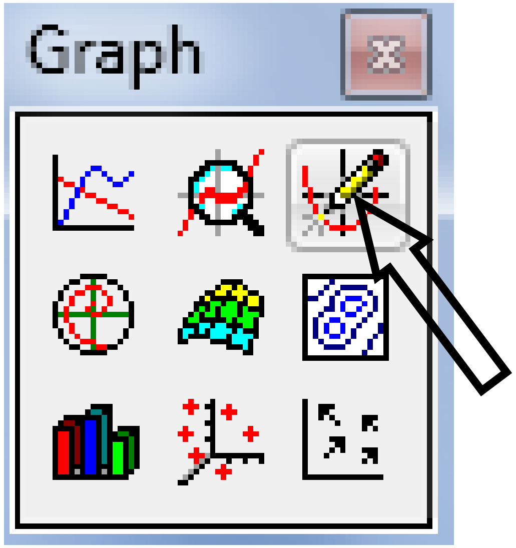


Metoda Grafică de rezolvare a ecuațiilor

Pasul 5. Se caută rădăcina ecuației – adică **locul unde graficul funcției intersectează axa Ox** – cu ajutorul comenzii *Zoom*. Cu graficul selectat, din toolbar-ul *Graph* se selectează *Zoom*.

Valoarea lui x se citește direct de pe axa Ox, ori se utilizează mijlocul *Trace* din toolbar-ul *Graph*.

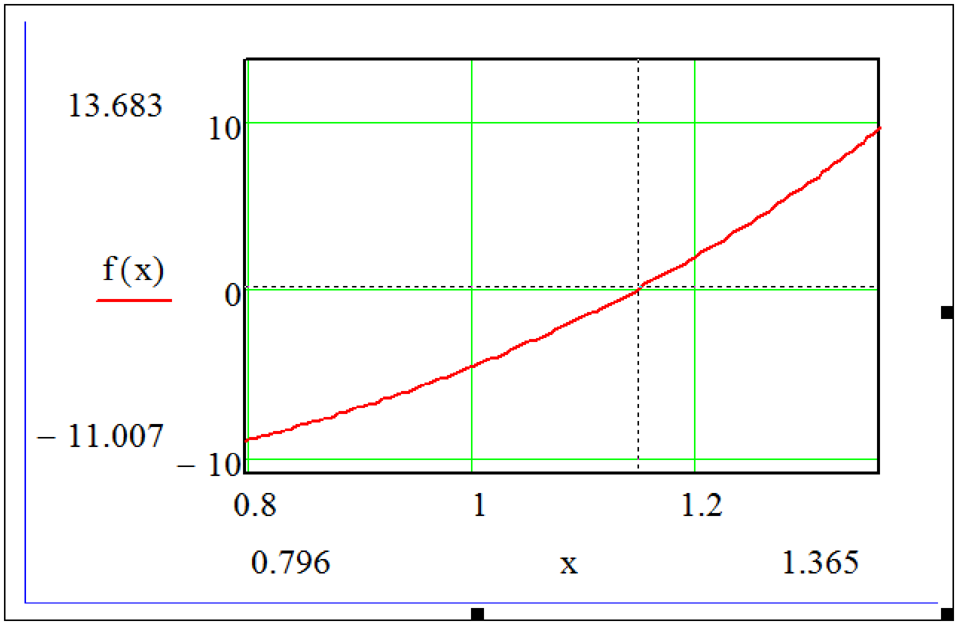


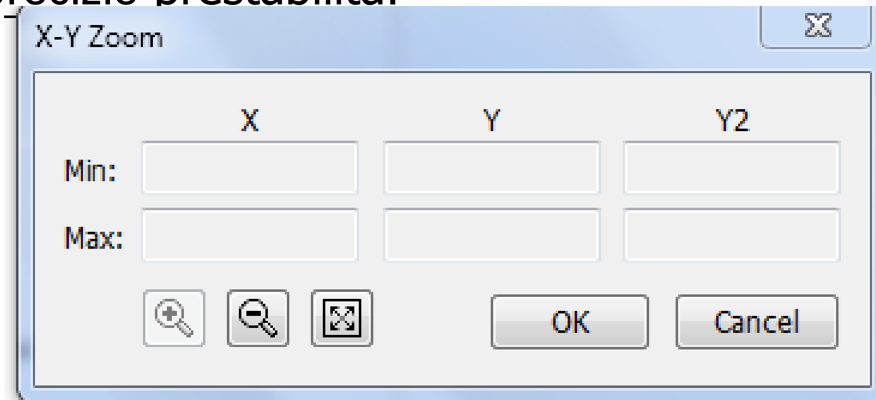


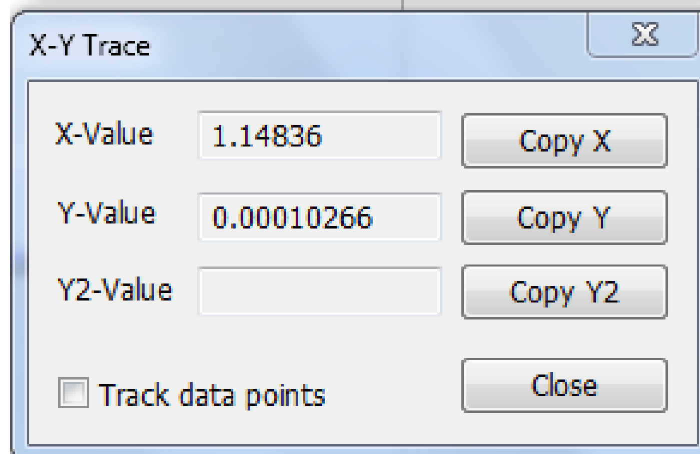
UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Metoda Grafică de rezolvare a ecuațiilor

Pasul 6. Se selectează aria pentru mărire, și apoi se apasă tasta +. Se repetă operația până se obține o anumită precizie prestabilită.







$$x_0 := 1.145$$

$$f(x_0) = -0.121$$

Comanda *Symbolics - Solve*

Pentru verificarea soluției identificate prin metoda grafică se determină rădăcinile ecuație studiate utilizând și comanda *Solve* din *Mathcad*.

Pasul 1. Se introduce ecuația, utilizând egalul boolean. (Ctrl =).

Pasul 2. Se selectează necunoscuta din ecuație (în cazul nostru x).

Pasul 3. Se verifică soluția obținută apelând comanda *Symbolics – Solve.*

Funcția predefinită *ROOT*

Funcția *root* permite determinarea unei soluții a unei ecuații algebrice f(x)=0 **în vecinătatea unui punct arbitrar fixat**.

$$solutie := root(f(x), x)$$

root(expresia sau numele funcției, variabila în raport cu care se rezolvă ecuația)

Să se rezolve ecuația: $x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$ utilizând funcția *root* din *Mathcad*.

Pasul 1. Se introduce ecuația și funcția atașată ecuației în *Mathcad*.

$$x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$$

$$f(x) := x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *ROOT*

Pasul 2. Se definește o primă aproximare arbitrară a soluției.

$$x_0 := -5$$

Pasul 3. Se aplică funcția *root.*

$$sol := root\left(f\left(x_0\right), x_0\right)$$

$$sol = -0.323628$$

Pasul 4. Se verifică soluția obținută apelând din meniul principal *Symbolics – Variable – Solve*.

$$x^2 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \text{ solve } \rightarrow -0.32362771106016612114$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *ROOT*

Funcția *root* permite determinarea tuturor soluțiilor **unei ecuații polinomiale.**

- Fie ecuația polinomială $2x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 5x - 20 = 0$
- Să se determine rădăcinile utilizând funcția *root* din *Mathcad*.

Pasul 1. Se introduce ecuația și funcția atașată în *Mathcad*. Indicii formali se introduc cu tasta punct .

$$2x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 5x - 20 = 0$$

$$f_1(x) := 2x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 5x - 20$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *ROOT*

Pasul 2. Se determină prima soluție în modul prezentat în **Exemplul 1**, pentru o soluție aproximativă arbitrară.

$$x_0 := 6$$

$$x_1 := \mathrm{root}\left(f_1\left(x_0\right), x_0\right)$$

$$x_1 = 3.415$$

Pasul 3. Se determină a doua soluție.

$$f_2(x) := \frac{f_1(x)}{x - x_1}$$

$$x_0 := -3$$

$$x_2 := \mathrm{root}\left(f_2\left(x_0\right), x_0\right)$$

$$x_2 = -0.724 - 1.048i$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *ROOT*

Pasul 4. Se determină restul soluțiilor în mod analog. (Numărul imaginar se introduce sub formă de **1i**) Dacă se caută soluții complexe aproximația introdusă va fi un număr complex.

$$f_3(x) := \frac{f_2(x)}{x - x_2} \qquad x_0 := i \qquad x_3 := \mathrm{root}\left(f_3\left(x_0\right), x_0\right) \qquad x_3 = 0.767 + 1.103i$$

$$f_4(x) := \frac{f_3(x)}{x - x_3} \qquad x_0 := i \qquad x_4 := \mathrm{root}\left(f_4\left(x_0\right), x_0\right) \qquad x_4 = -0.724 + 1.048i$$

$$f_5(x) := \frac{f_4(x)}{x - x_4} \qquad x_0 := i \qquad x_5 := \mathrm{root}\left(f_5\left(x_0\right), x_0\right) \qquad x_5 = 0.767 - 1.103i$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *POLYROOTS*

Să se rezolve ecuația polinomială $x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 10 = 0$ utilizând funcția *polyroots* din *Mathcad*.

Pasul 1. Se introduce ecuația în *Mathcad*. $x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 10 = 0$

Pasul 2. Se definește vectorul coeficienților:

• Vectorul se introduce cu ajutorul toolbar-ului *Matrix*. Se selectează prima icoană, *Matrix or Vector* (Shortcut: Ctrl+M), conform figurii 2.21.

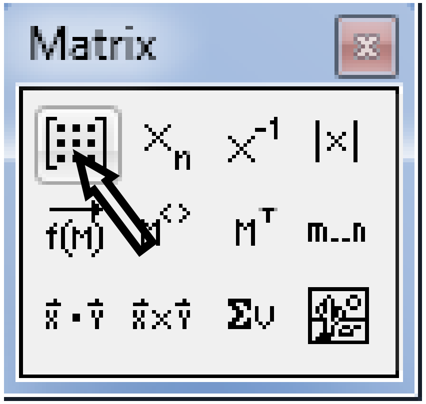


Fig. 2.21.

Funcția predefinită *POLYROOTS*

Pasul 3. Apare fereastra *Insert Matrix*.

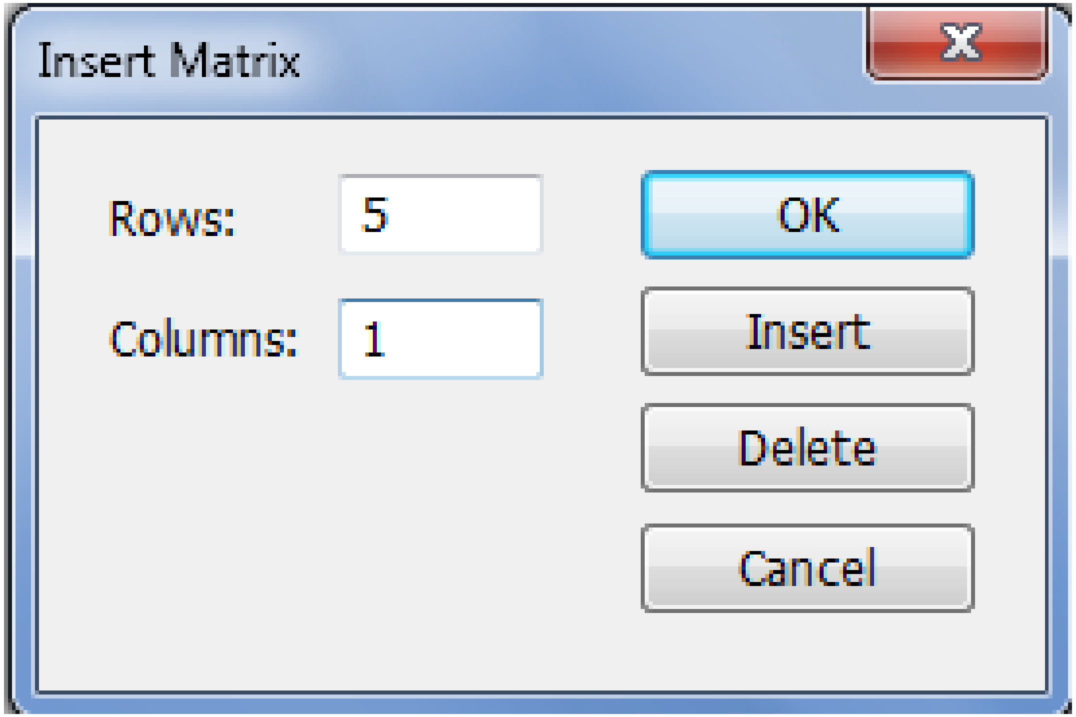


Fig. 2.22.

Pasul 4. Se creează un vector cu 5 linii (*Rows*) și 1 coloană (*Columns*).

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcția predefinită *POLYROOTS*

Pasul 5. Se introduc coeficienții începând cu **gradul cel mai mic**.

$$x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 6x - 10 = 0 \qquad v := \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pasul 6. Se determină soluțiile în modul prezentat mai jos. Rezultatul obținut este tot un vector, numit vectorul soluțiilor.

$$v := \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad sol := \mathrm{polyroots}(v) \qquad sol = \begin{pmatrix} -1.204 \\ 0.805 + 0.782i \\ 0.805 - 0.782i \\ 6.594 \end{pmatrix}$$

2.6. Instrucțiunea *if*

Să se reprezinte grafic funcția

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases}$$

$$x := -5, -4.99 .. 5$$

$$f(x) := \mathrm{if}\left(x < 0, -x, x^2\right)$$

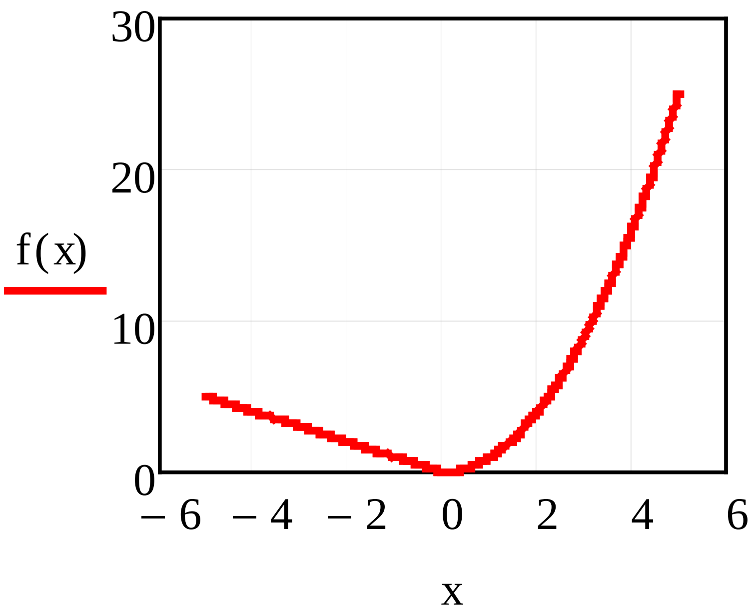


Fig. 2.24.

Să se reprezinte grafic funcțiile f(x) și g(x)=|f(x)| dacă:

a.) $f(x) = x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 2$

$x := -5, -4.99 .. 5$

$f(x) := x^4 + 7x^3 - 4^2 + 2$

$g(x) := \text{if}(f(x) < 0, -f(x), f(x))$

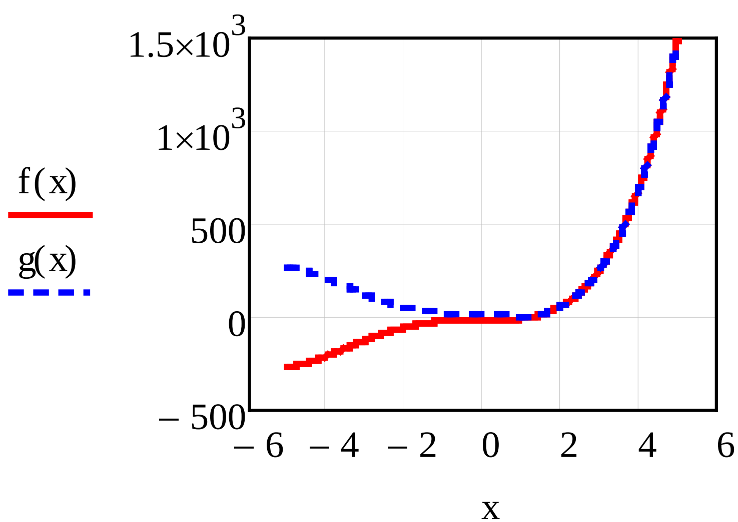


Fig. 2.25.

b.) $f(x) = \sin(x)$

$x := -5, -4.99 .. 5$

$f(x) := \sin(x)$

$g(x) := \text{if}(f(x) < 0, -f(x), f(x))$

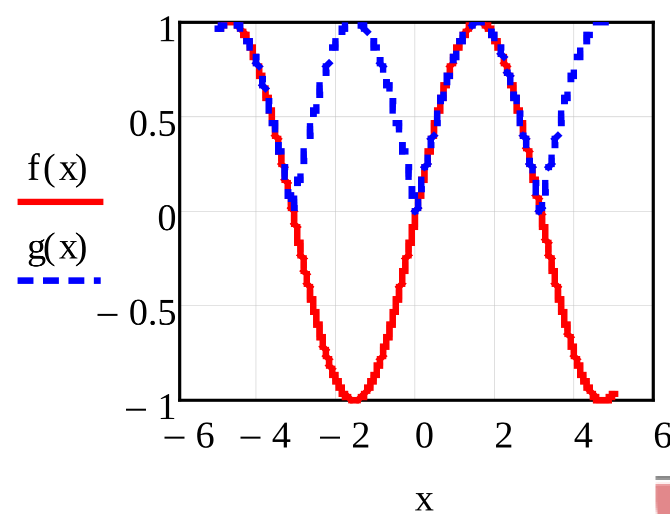


Fig. 2.26.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Instrucțiunea *for*

Exemplul 1: Să se calculeze 5! folosind instrucțiunea *for.*

$$
x\_factor := \left|
\begin{array}{l}
prod \leftarrow 1 \\
\text{for} \;\; i \in 1..5 \\
\quad prod \leftarrow prod \cdot i \\
prod
\end{array}
\right.
$$

$$x\_factor = 120$$

Observație: Variabila *prod* este definită local, fiind valabilă exclusiv în bucla *for.*