# Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuaţii

## Partea I

UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Laboratorul de Cercetare
în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS
Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

*As. Dr. ing.* **Levente CZUMBIL**
**E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro**
**WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil**

# Metoda Inversării Matriceale

Fie sistemul de ecuaţii de mai jos:

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

Se scrie sistemul de ecuaţii sub formă matriceală şi se identifică matricea coeficienţilor *A*, respectiv vectorul termenilor liberi *B*.

$$[A] \cdot [x] = [B]$$

$$[A] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad [B] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

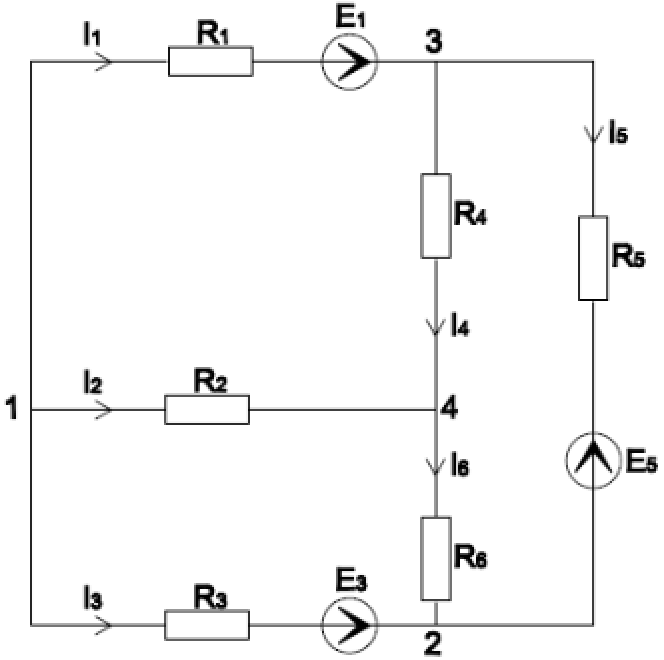
Ecuaţia matriceală obţinută se înmulţeşte la stânga cu inversa matricei *A*, astfel obţinându-se relaţia de calcul a vectorului necunoscutelor *x*

$$[A]^{-1} \Big| \quad [A] \cdot [x] = [B] \quad \Rightarrow [A]^{-1} \cdot [A] \cdot [x] = [A]^{-1} \cdot [B]$$

$$[x] = [A]^{-1} \cdot [B]$$

# Metoda Inversării Matriceale

Pentru circuitul de mai jos să se determine forma matriceală a **teoremelor lui Kirchhoff** și să se rezolve circuitul utilizând metoda inversării matriceale.



Se cunosc următoarele date numerice:

$R_1 := 1\Omega$ $R_2 := 1\Omega$ $R_3 := 3\Omega$ $R_4 := 2\Omega$ $R_5 := 3\Omega$ $R_6 := 3\Omega$

$E_1 := 10V$ $E_3 := 20V$ $E_5 := 30V$

# Metoda Inversării Matriceale

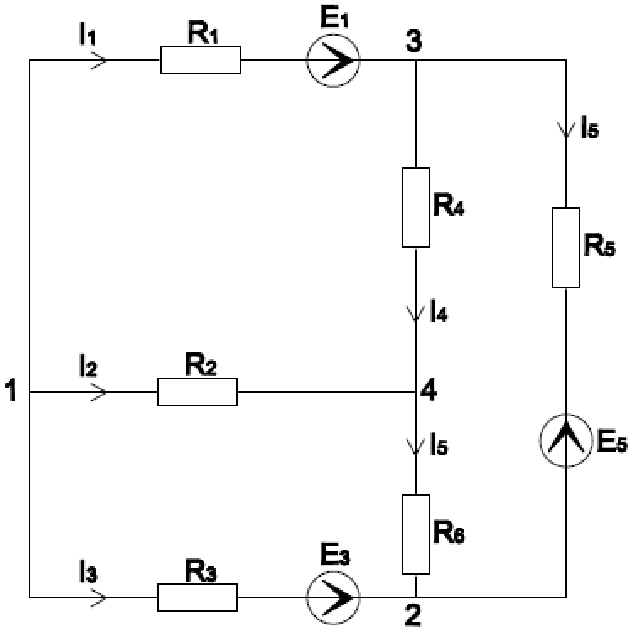
**Pasul 1.** Se scriu vectorii ***I***, ***E*** și ***Z***. unde ***I*** este vectorul curenților, având 6 elemente, $I_1, \ldots, I_6$, a căror valori sunt necunoscutele problemei, ***E*** este vectorul tensiunilor electromotoare, tot 6 elemente, ***Z*** este o matrice de 6 x 6, în care pe diagonala principală se trec valorile rezistențelor laturilor: $R_1, \ldots, R_6$, iar restul elementelor sunt completate cu zero.

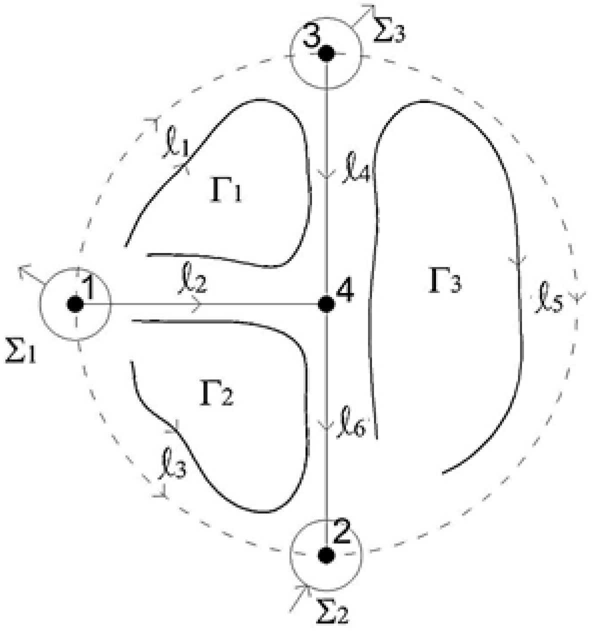
$$E := \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ E_3 \\ 0 \\ -E_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} V \qquad Z := \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Omega \qquad I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix}$$

Se observă că la definirea vectorului curenților se folosește **egalul boolean** (Ctrl =), iar la vectorul tensiunilor electromotoare și matricea rezistențelor se folosește **operatorul de atribuire** (:=), deoarece acestea conțin valori numerice concrete.

# Metoda Inversării Matriceale

**Pasul 2.** Pentru a determina matricele A (matricea de incidență a laturilor la suprafețele Σ) și B (matricea de apartenență a laturilor la contururile Γ), trebuie construită **graficul circuitului.**





Graficul este un **desen simplificat al unui circuit** care conține **doar laturile și nodurile circuitului**.

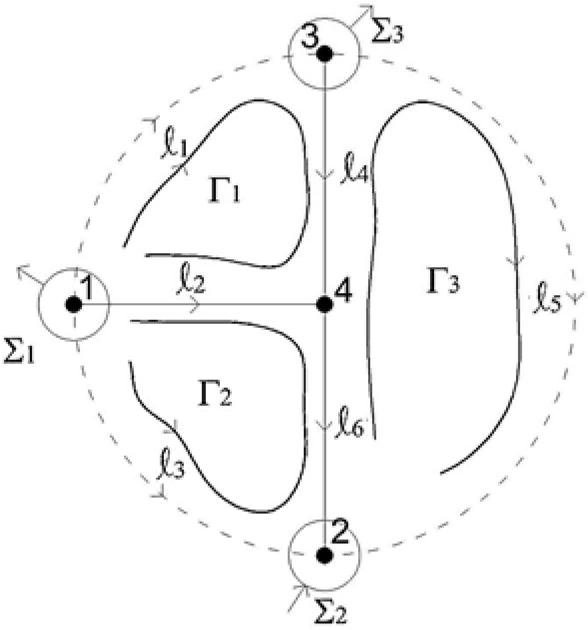
# Metoda Inversării Matriceale

**Pasul 3.** Se detemină matricile A și B utilizând graficul circuitului.

Suprafețele Σ nu pot să conțină decât o singură ramură (reprezentat cu linie continuă).

Contururile Γ nu pot să conțină decât o singură coardă (reprezentat cu linie întreruptă).

Inițial trebuie definit orientarea normalei la suprafeţele Σ şi sensul de parcurgere a contururilor Γ.



$$A = \begin{array}{c} \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Metoda Inversării Matriceale

**Pasul 5.** Se introduc în Mathcad matricele ***A*** și ***B***, utilizând operatorul de atribuire.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Pasul 6.** Se studiază **prima teoremă a lui Kirchhoff** şi se identifică că membrul drept un vector ***O*** cu *n-1=3* elemente nule. Se implementează o funcţie *VectNul(p)* care generează un vector cu *p* elemente nule şi se defineşte vectorul ***O***.

$$[A]\cdot[I]=[O]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Metoda Inversării Matriceale

**Pasul 7.** Se scrie ***a doua teoremă a lui Kirchhoff*** şi se calculează produşii ***B·Z***, respectiv ***B·E***, necesari implementării formei matriceale a teoremelor lui Kirchhoff.

$$[B]\cdot[Z]\cdot[I]=[B]\cdot[E]$$

$$\mathrm{B}\cdot\mathrm{Z}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -3\end{pmatrix}\Omega \qquad \mathrm{B}\cdot\mathrm{E}=\begin{pmatrix}10\\ 20\\ -30\end{pmatrix}\mathrm{V}$$

**Pasul 8.** Se scrie forma matriceală a ***teoremelor lui Kirchhoff*** şi se identifică matricea ***M*** a coeficienţilor şi vectorul ***N*** a termenilor liberi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}[A]\\ \cdots\\ [B]\cdot[Z]\end{bmatrix}}_{[M]}\cdot[I]=\underbrace{\begin{bmatrix}[O]\\ \cdots\\ [B]\cdot[E]\end{bmatrix}}_{[N]}$$

# Metoda Inversării Matriceale

**Pasul 9.** Folosind comanda *stack* se definesc matricea coeficienţilor ***M*** şi vectorul termenilor liberi ***N***.

$$M := \mathrm{stack}(A\cdot\boxed{\Omega}, B\cdot Z) \qquad N := \mathrm{stack}(O\cdot\boxed{V}, B\cdot E)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Omega \qquad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} V$$

**Pasul 10.** Pentru a determina curenţii din laturile circuitului se aplică metoda inversării matriceale asupra formei matriceale a teoremelor lui Kirchhoff:

$$[M]\cdot[I]=[N] \Rightarrow [I]=[M]^{-1}\cdot[N]$$

$$I := M^{-1}\cdot N \qquad I = \begin{pmatrix} -2.286 \\ -3.714 \\ 6 \\ 4.286 \\ -6.571 \\ 0.571 \end{pmatrix} A$$

# Funcţia *lsolve*

Funcția *lsolve* este o funcție built-in în Mathcad, utilizată pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (**l**inear **solve**).

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_3$$

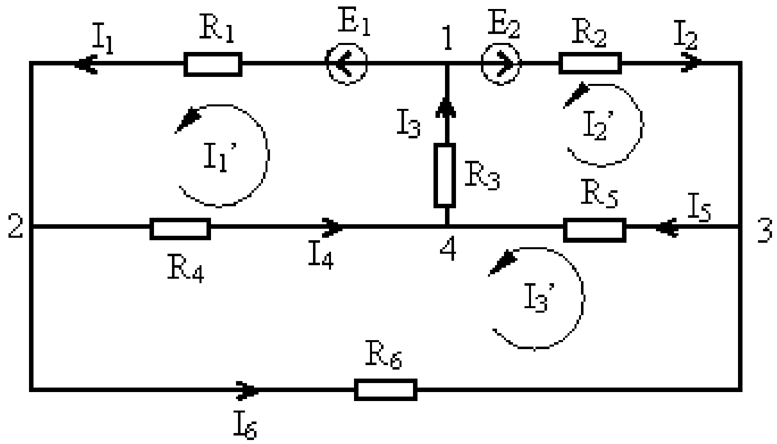
$$A \cdot x = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$x := lsolve(A, B)$$

# Funcţia *lsolve*

Să se rezolve circuitul electric de mai jos folosindu-se metoda curenţilor ciclici. Pentru soluţionarea sistemului de ecuaţii obţinut în urma aplicării acestei metode se recomandă folosirea funcţiei predefinite ***lsolve***.



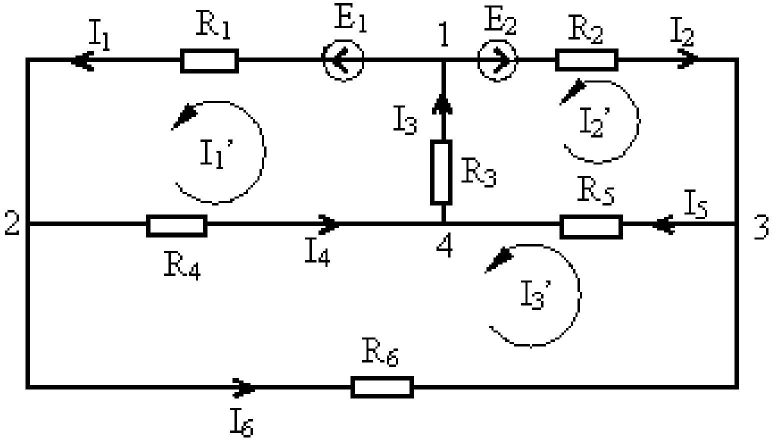
Se cunosc următoarele date numerice:

$R_1 = 1\Omega$ $\quad R_2 = 2\Omega$ $\quad R_3 = 1\Omega$ $\quad R_4 = 8\Omega$ $\quad R_5 = 4\Omega$ $\quad R_6 = 6\Omega$

$E_1 = 40V$ $\quad E_2 = 20V$

# Funcţia *lsolve*

**Pasul 1.** Se scrie sistemul de ecuaţii ataşat metodei curenţilor ciclici:



$$\begin{cases} Z'_{1,1}\cdot I_{C_1} + Z'_{1,2}\cdot I_{C_2} + Z'_{1,3}\cdot I_{C_3} = \Sigma E_1 \\ Z'_{2,1}\cdot I_{C_1} + Z'_{2,2}\cdot I_{C_2} + Z'_{2,3}\cdot I_{C_3} = \Sigma E_2 \\ Z'_{3,1}\cdot I_{C_1} + Z'_{3,2}\cdot I_{C_2} + Z'_{3,3}\cdot I_{C_3} = \Sigma E_3 \end{cases}$$

**Pasul 2.** Se identifică din circuit parametrii sitemului de ecuaţii ataşat metodei curenţilor ciclici.

$$Z'_{1,1} := R_1 + R_4 + R_3 \qquad Z'_{2,2} := R_2 + R_3 + R_5 \qquad Z'_{3,3} := R_5 + R_4 + R_6$$

$$Z'_{1,2} := -R_3 \qquad Z'_{1,3} := -R_4 \qquad Z'_{2,3} := -R_5 \qquad Z'_{2,1} := Z'_{1,2} \qquad Z'_{3,1} := Z'_{1,3}$$

$$Z'_{3,2} := Z'_{2,3} \qquad \Sigma E_1 := E_1 \qquad \Sigma E_2 := -E_2 \qquad \Sigma E_3 := 0$$

# Funcţia *lsolve*

**Pasul 3.** Se scrie ecuaţia maricială aferentă sistemului de ecuaţii.

$$Z' \cdot I_C = \Sigma E$$

$$Z' = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -8 \\ -1 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 18 \end{pmatrix} \Omega \qquad \Sigma E = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} V$$

**Pasul 4.** Se determină vectorul curenţilor ciclici folosind funcţia predefinită *lsolve*.

$I_{C_3}$

$$I_C = lsolve(Z', \Sigma E) \qquad I_C = \begin{pmatrix} 5.965 \\ -0.561 \\ 2.526 \end{pmatrix} A$$

**Pasul 5.** Se calculează curenţii din laturi folosindu-se valorile curenţilor ciclici.

$$I_1 := I_{C_1} \qquad I_2 := -I_{C_2} \qquad I_3 := I_{C_1} - I_{C_2} \qquad I_4 := I_{C_1} - I_{C_3}$$

$$I_5 := I_{C_2} - I_{C_3} \qquad I_6 := I_{C_3}$$

$$I = \begin{pmatrix} 5.965 \\ 0.561 \\ 6 \\ 3.439 \\ -3.088 \\ 2.526 \end{pmatrix} A$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

# Funcţia *lsolve*

Să se rezolve problema de la metoda inversării matriceale folosind funcţia *lsolve*.

**Pasul 1.** Se cunoaște ecuația matriceală a ciruitului. $[M]\cdot[I]=[N]$

**Pasul 2.** Se apelează funcția *lsolve* din Mathcad pentru matricile ***M*** și ***N***.

$$I' := \mathrm{lsolve}(M,N)$$

$$I' = \begin{pmatrix} -2.286 \\ -3.714 \\ 6 \\ 4.286 \\ -6.571 \\ 0.571 \end{pmatrix} A$$

# Blocul Given - Find

Blocul *Given* – *Find* se poate utiliza la calculul direct al valorii uneia sau a mai multor variabile. Pentru aceasta este necesară o iniţializare în prealabil a necunoscutelor şi introducerea ecuaţiilor caracteristice, cu egal Boolean (Ctrl+“=”) în interiorul blocului *Given-Find*

- se iniţializează necunoscutele problemei;
- se introduce cuvântul cheie *Given*;
- se introduc ecuaţiile ce trebuie rezolvate în interiorul blocului *Given-Find;*
- se introduce comanda *Find* pentru determinarea necunoscutelor.

$x := 0$

Given

$3x + 4 = 5$

$\mathrm{Find}(x) = 0.333$

sau

Given

$3x_1 + 8x_2 = 19$

$x_1 \cdot x_2 = 2$

$$\mathrm{Find}(x_1, x_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & 1 \\ \frac{3}{8} & 2 \end{pmatrix}$$

# Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuaţii

## Partea I

*As. Dr.Ing.* **Levente CZUMBIL**

UNIVERSITATEA
TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA