

Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații Partea II



Laboratorul de Cercetare
în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca

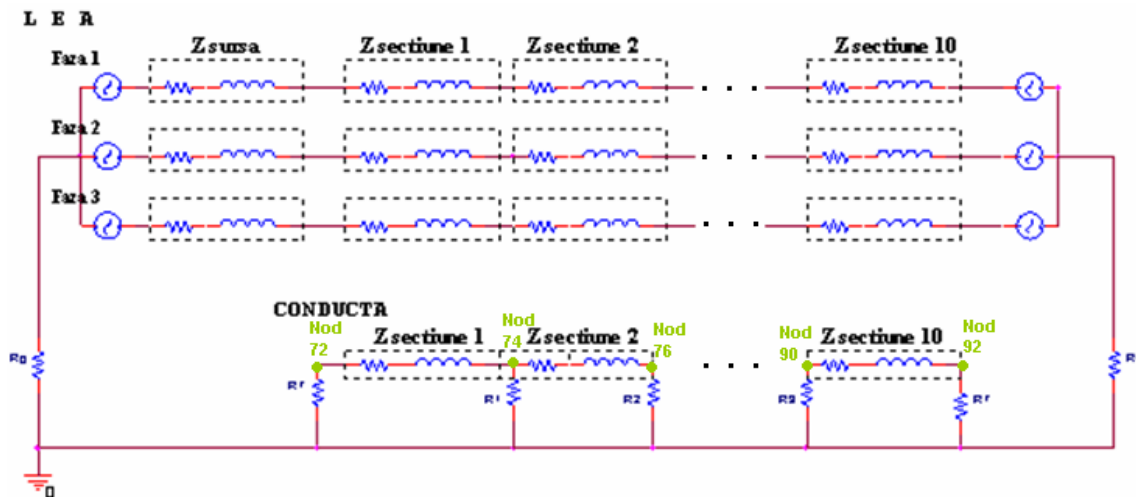
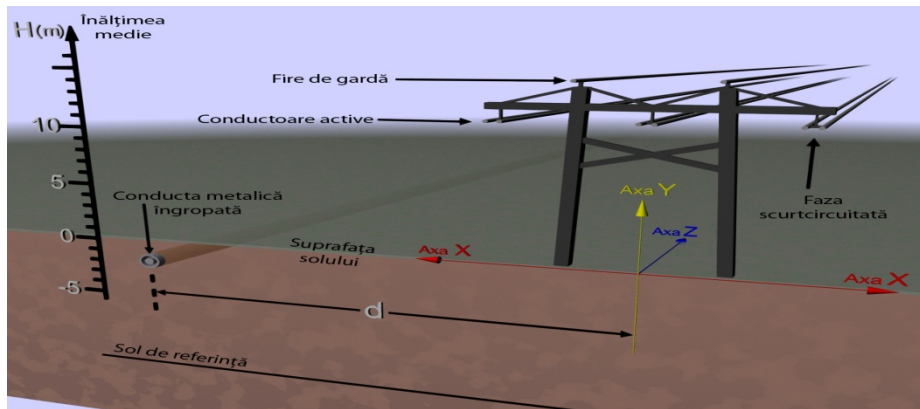
As. Dr. ing. Levente CZUMBIL

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

Aplicație

În studiul interferențelor electromagnetice dintre liniile electrice aeriene și conductele metalice subterane de transport gaze naturale, petrol sau apă potabilă se pune problema determinării tensiunii și curentului indus în conducte. Se prezintă modelul fizic al problemei și circuitul electric echivalent.



Metoda aproximațiilor succesive (Jacobi)

$$\beta := \begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{last}(B) \\ b_i \leftarrow \frac{B_i}{A_{i,i}} \\ b \end{cases} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0.065 \\ 0.101 \\ 0.391 \\ -0.218 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \backslash\! \backslash \text{ procedeu analog de calcul} \\ \text{pentru vectorul termenilor} \\ \text{liberi } \beta \end{array}$$

$x^{(0)} := \beta$ $\backslash\! \backslash$ initializarea primei aproximatii cu valorile vectorului β (fiecare element din β se incarca si in x).

$m := 250$ $i := 1..m$ $\backslash\! \backslash$ numarul de iteratii propuse pentru determinarea solutiei; se reduce până la valoarea la care solutia se stabilizează, fapt ce se observă din afisajul numeric al procesului iterativ (convergent).

$x^{(i)} := \beta + \alpha \cdot x^{(i-1)}$ $\backslash\! \backslash$ formula de recurentă

$\text{sol} := \begin{cases} \text{for } k \in 1..m \\ x^{(k)} \leftarrow \beta + \alpha \cdot x^{(k-1)} \\ x^{(m)} \end{cases} \quad \text{sol} = \begin{pmatrix} -0.08277037 \\ 0.22287125 \\ 0.42372062 \\ -0.52249427 \end{pmatrix} \quad \backslash\! \backslash \text{ extragerea ultimei iteratii, care se adopta ca solutie a sistemului de ecuatii}$

Eroare := B - A·sol

Eroare =

$$\begin{pmatrix} -1.332 \times 10^{-15} \\ 0 \\ -2.665 \times 10^{-15} \\ -3.109 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$



Blocul *Given - Find*

Blocul *Given – Find* se poate utiliza la calculul direct al valorii uneia sau a mai multor variabile. Pentru aceasta este necesară o inițializare în prealabil a necunoscutelor și introducerea ecuațiilor caracteristice, cu egal Boolean (Ctrl+“=”) în interiorul blocului *Given-Find*

- se inițializează necunoscutele problemei;
- se introduce cuvântul cheie *Given*;
- se introduc ecuațiile ce trebuie rezolvate în interiorul blocului *Given-Find*;
- se introduce comanda *Find* pentru determinarea necunoscutelor.

$$x := 0$$

Given

Given

$$3x_1 + 8x_2 = 19$$

$$3x + 4 = 5$$

sau

$$x_1 \cdot x_2 = 2$$

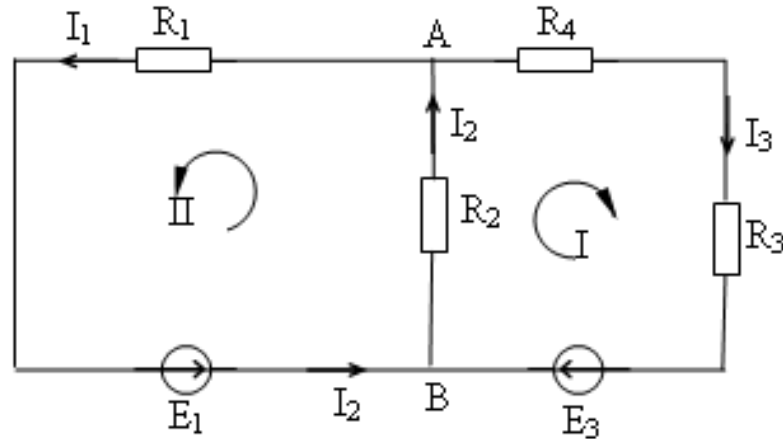
$$\text{Find}(x) = 0.333$$

$$\text{Find}(x_1, x_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{16}{3} & 1 \\ \frac{3}{8} & 2 \end{pmatrix}$$



Blocul Given - Find

Să se rezolve circuitul electric de mai jos implementând teoremele lui Kirchhoff într-un bloc *Given – Find*.



Se cunosc parametrii circuitului electric:

$$R_1 := 20 \, \Omega, \quad R_2 := 10 \, \Omega, \quad R_3 := 15 \, \Omega, \quad R_4 := 10 \, \Omega,$$
$$E_1 := 80 \, \text{V}, \quad E_3 := 90 \, \text{V}.$$



Blocul Given - Find

Pasul 1. Se inițializează valorile necunoscutelor cu zero.

$$I_1 := 0 \quad I_2 := 0 \quad I_3 := 0$$

Pasul 2. Se introduce cuvântul cheie *Given*.

Pasul 3. Se scriu teoremele lui Kirchhoff pentru circuitul studiat.

Pasul 4. Se determină soluția sistemului apelând funcția *Find*.

Given

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0$$

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = E_1$$

$$R_2 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_3 + R_3 \cdot I_3 = E_3$$

$$\text{sol} := \text{Find}(I_1, I_2, I_3)$$

$$\text{sol} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ A}$$



Blocul *Given - Minerr*

În cazul în care blocul *Given-Find* nu converge spre o soluție exactă atunci acesta se poate înlocui cu blocul se poate utiliza la calculul direct al valorii uneia sau a mai multor variabile. *Given-Minerr* care va returna o soluție aproximativă astfel încât această înlocuită în sistemul de ecuații inițial să determine o abatere medie pătratică minimă.

- se inițializează necunoscutele problemei;
- se introduce cuvântul cheie *Given*;
- se introduc ecuațiile ce trebuie rezolvate în interiorul blocului *Given-Find*;
- se introduce comanda *Minerr* pentru determinarea necunoscutelor.

$$x_1 := 0 \quad x_2 := 0$$

Given

$$x_1 + e^{x_2} = 9$$

$$\sin(x_1) - x_2 = -5$$

$$\mathbf{sol} := \mathbf{Find}(x_1, x_2)$$

înlocuim *Find* cu *Minerr*

$$x_1 + e^{x_2} = 9.15$$

$$\underline{x}_1 := 0 \quad \underline{x}_2 := 0$$

Given

$$x_1 + e^{x_2} = 9$$

$$\sin(x_1) - x_2 = -5$$

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{pmatrix} := \mathbf{Minerr}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1.663 \\ 2.381 \end{pmatrix}$$



Metoda lui Newton-Raphson

Să se rezolve următorul sistem neliniar de ecuații, utilizând metoda lui Newton-Raphson:

$$x + 3 \cdot \log(x) - y^2 = 0$$

$$2x^2 - x \cdot y - 5 \cdot x + 1 = 0$$

$$z^2 = 0$$

Pasul 1. Se asociază o funcție fiecărei ecuații neliniare din sistem.

$$F(x, y, z) := x + 3 \cdot \log(x) - y^2$$

$$G(x, y, z) := 2x^2 - x \cdot y - 5 \cdot x + 1$$

$$H(x, y, z) := z^2$$

Pasul 2. Funcțiile se derivează parțial după toate variabilele. Indicii formali se introduc utilizând tasta punct (.).

$$F_x(x, y, z) := \frac{d}{dx} F(x, y, z)$$

$$F_x(x, y, z) \rightarrow \frac{3}{x \cdot \ln(10)} + 1$$

$$F_y(x, y, z) := \frac{d}{dy} F(x, y, z)$$

$$F_y(x, y, z) \rightarrow -2 \cdot y$$

$$F_z(x, y, z) := \frac{d}{dz} F(x, y, z)$$

$$F_z(x, y, z) \rightarrow 0$$



Metoda lui Newton-Raphson

$$G_x(x, y, z) := \frac{d}{dx} G(x, y, z) \quad G_x(x, y, z) \rightarrow 4 \cdot x - y - 5$$

$$G_y(x, y, z) := \frac{d}{dy} G(x, y, z) \quad G_y(x, y, z) \rightarrow -x$$

$$G_z(x, y, z) := \frac{d}{dz} G(x, y, z) \quad G_z(x, y, z) \rightarrow 0$$

$$H_x(x, y, z) := \frac{d}{dx} H(x, y, z) \quad H_x(x, y, z) \rightarrow 0$$

$$H_y(x, y, z) := \frac{d}{dy} H(x, y, z) \quad H_y(x, y, z) \rightarrow 0$$

$$H_z(x, y, z) := \frac{d}{dz} H(x, y, z) \quad H_z(x, y, z) \rightarrow 2 \cdot z$$

Pasul 3. Utilizând rezultatele obținute din calculul simbolic (operatorul de evaluare simbolică se introduce din toolbar-ul *Symbolic*, selectând *Symbolic Evaluation*), se introduce matricea Jacobian:

$$J(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \\ G_x(x, y, z) & G_y(x, y, z) & G_z(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) & H_y(x, y, z) & H_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$



Metoda lui Newton-Raphson

Pasul 4. Se introduc matricile funcționale:

$$J_x(x, y, z) := \begin{pmatrix} F(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F_z(x, y, z) \\ G(x, y, z) & G_y(x, y, z) & G_z(x, y, z) \\ H(x, y, z) & H_y(x, y, z) & H_z(x, y, z) \end{pmatrix} \quad J_y(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F(x, y, z) & F_z(x, y, z) \\ G_x(x, y, z) & G(x, y, z) & G_z(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) & H(x, y, z) & H_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$J_z(x, y, z) := \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) & F_y(x, y, z) & F(x, y, z) \\ G_x(x, y, z) & G_y(x, y, z) & G(x, y, z) \\ H_x(x, y, z) & H_y(x, y, z) & H(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Pasul 5. Se definește numărul de pași de iterare și se introduc aproximații inițiale ale soluțiilor sistemului de ecuații (valori aleatoare).

$$N := 50$$

$$i := 0.. N$$

$$x_0 := 3$$

$$y_0 := 5$$

$$z_0 := 7$$



Metoda lui Newton-Raphson

Pasul 6. Se aplică formula recurentă Newton-Raphson conform algoritmului de mai jos, și se afișează rezultatul obținut.

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_i - \frac{|J_x(x_i, y_i, z_i)|}{|J(x_i, y_i, z_i)|} \\ y_i - \frac{|J_y(x_i, y_i, z_i)|}{|J(x_i, y_i, z_i)|} \\ z_i - \frac{|J_z(x_i, y_i, z_i)|}{|J(x_i, y_i, z_i)|} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.487 \\ 2.262 \\ 6.217 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Pasul 7. Se verifică rezultatele prin înlocuirea lor în funcțiile inițiale.

$$F(x_N, y_N, z_N) = 0 \quad G(x_N, y_N, z_N) = 0 \quad H(x_N, y_N, z_N) = 0$$



Metoda triangularizării a lui Gauss

Să se rezolve următorul sistem de ecuații, scris sub formă matriceală, utilizând trianghiularizarea Gauss.

ORIGIN := 1

$$A \cdot X = B$$

$$A := \begin{pmatrix} 15.21 & 1.11 & 2.13 & 1.14 \\ 1.32 & 14.82 & 0.61 & 0.74 \\ 0.75 & 1.26 & 15.44 & 0.22 \\ 1.35 & 1.42 & 0.33 & 14.32 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 9.01 \\ 8.58 \\ 8.33 \\ 8.88 \end{pmatrix}$$

Pasul 1. Se concatenează matricea A și vectorul B într-o matrice globală M folosind funcția *augment*.

$$M := \text{augment}(A, B) \quad n := \text{rows}(A) \quad M = \begin{pmatrix} 15.21 & 1.11 & 2.13 & 1.14 & 9.01 \\ 1.32 & 14.82 & 0.61 & 0.74 & 8.58 \\ 0.75 & 1.26 & 15.44 & 0.22 & 8.33 \\ 1.35 & 1.42 & 0.33 & 14.32 & 8.88 \end{pmatrix}$$



Metoda triangularizarii a lui Gauss

Pasul 2. Algoritmul pentru anulara elementelor de sub diagonala principala (triangularizare).

```
F(A) := | n ← rows(A)
        | m ← cols(A)
        | W ← A
        | for k ∈ 2..n
        |   | for i ∈ k..n
        |   |   | for j ∈ k - 1..m
        |   |   |   |  $W_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \frac{A_{k-1,j}}{A_{k-1,k-1}} \cdot A_{i,k-1}$ 
        |   |   |   | W
        |   |   |   | A ← W
        |   |   |   | W
        |   |   |   | W
```

\| declararea numarului de
elemente de pe prima coloana a
matricei A
\| incarcarea matricii interne w cu
matricea A
\| inceperea instructiunii de iterare
for pentru k, i, j
\| recalcularea elementelor w,
dupa elementele matricei A
(fomula iterativa realizeaza
triangularizarea)
\| programul returneaza matricea
w recalculata



Metoda triangularizării a lui Gauss

Pasul 3. Se verifică dacă operațiunea a avut efectul dorit prin afișarea matricii triangularizate.

$$M' := F(M)$$

$$M' = \begin{pmatrix} 15.21 & 1.11 & 2.13 & 1.14 & 9.01 \\ 0 & 14.724 & 0.425 & 0.641 & 7.798 \\ 0 & 0 & 15.3 & 0.111 & 7.247 \\ 0 & 0 & 0 & 14.161 & 7.332 \end{pmatrix}$$

Pasul 4. Se extrag forma triunghiularizată a matricii A, respectiv vectorului B din noua matrice M':

$$A' := \text{submatrix}(M', 1, 4, 1, 4)$$

$$B' := \text{submatrix}(M', 1, 4, 5, 5)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 15.21 & 1.11 & 2.13 & 1.14 \\ 0 & 14.724 & 0.425 & 0.641 \\ 0 & 0 & 15.3 & 0.111 \\ 0 & 0 & 0 & 14.161 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 9.01 \\ 7.798 \\ 7.247 \\ 7.332 \end{pmatrix}$$



Metoda triangularizării a lui Gauss

Pasul 5. Se determină variabila din ultima ecuație a sistemului:

$$X_n := \frac{B_n}{D_{n,n}} \quad j := n..1 \quad i := n..1 \quad X_n = 0.581$$

Pasul 6. Soluționarea aplicației cu algoritmul metodei lui Gauss, implementat în *Mathcad*, începe, în sistemul triangularizat, de jos în sus, adică de la ultima variabilă la prima, prin procedee iterative, la fiecare pas determinând încă o variabilă.

$$X_i := \frac{B'_i - \sum_j \text{if}(j > i, A'_{i,j} \cdot X_j, 0)}{A'_{i,i}} \quad X = \begin{pmatrix} 0.452 \\ 0.494 \\ 0.47 \\ 0.518 \end{pmatrix}$$



Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații Partea II



As. Dr.Ing. Levente CZUMBIL