Metode Numerice – Lucrarea nr. 5

METODE NUMERICE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAȚII – PARTEA II

Modelul matematic şi metodele numerice utilizate

Metoda aproximațiilor succesive a lui Jacobi (metodă iterativă)

Considerăm un sistem de ***n*** ecuaţii liniare cu ***n*** necunoscute scris matricial **[A]·[x]=[B]**, dacă $\det(A) \neq 0$ şi dacă $a_{ij} \neq 0$ atunci sistemul **[A]·[x]=[B]** îl rescriem sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n \end{cases}$$

adică matricial: **[x]=[α]·[x]+[β]** unde:

$$\alpha = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Se continuă rezolvarea sistemului în forma $x = \alpha \cdot x + \beta$.

Se alege vectorul aproximaţiilor iniţiale ale soluţiilor $x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} & x_2^{(0)} & \ldots & x_n^{(0)} \end{bmatrix}^T$ care se obţine prin măsurători experimentale sau se alege de obicei în aplicaţiile practice ca fiind egal cu vectorul termenilor liberi $x^{(0)} = \beta$.

Metoda lui Jacobi presupune calculul unui şir de aproximaţii succesive $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ cu ajutorul formulei de iterare într-un pas care se demonstrează prin inducţie:

$$x^{(k+1)} = \alpha \cdot x^{(k)} + \beta \tag{2}$$

Astfel vectorul soluţie după prima iteraţie devine:

$$x^{(1)} = \alpha \cdot x^{(0)} + \beta \tag{3}$$

Dacă şirul de soluţii aproximative de la iteraţia *k*, $x^{(k)}$, converge, atunci limita lui $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)},..., x_n^{(k)}\right) = x$ este soluţie a sistemului **[A]·[x]=[B]**.

Evaluarea erorii în metoda Jacobi se face în funcţie de normele lui **[α]** şi **[β]**, conform relației:

$$er = \left\| x - x^{(k)} \right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|}\cdot\|\beta\| \tag{4}$$

Comentarii asupra metodei lui Jacobi

- Metoda se poate aplica şi pentru sisteme neliniare;
- Soluţia se obţine printr-o serie (proces) de aproximaţii succesive, fiecare secvenţă de operaţii aritmetice elementare (mai mic decât la metodele directe) este parcursă de mai multe ori (metodă iterativă);
- Pentru calculul lui $x_i^{(k+1)}$ avem nevoie de toate valorile $x_1^{(k)},...,x_n^{(k)}$ ceea ce duce la creşterea timpului de calcul;
- Dacă şirul iteraţiilor este convergent, cu cât se efectuează mai multe iteraţii, cu atât soluţia numerică este mai precis determinată iar erorile atât cele de trunchiere cât şi cele de rotunjire, devin tot mai mici;
- Se obţin aproximaţii din ce în ce mai bune ale soluţiei (prin parcurgerea procesului iterativ) până la atingerea unei precizii fixate dinainte (precizie dorită);
- condiţie suficientă pentru convergenţa procesului este: $\max_{1\le j\le n}\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right| < 1$, iar datorită convergenţei lor metodele iterative au proprietatea de a corecta erorile de rotunjire;
- Aceste metode permit obţinerea soluţiei numerice a unui sistem de ecuaţii prin generarea unui şir care tinde la soluţia exactă;
- Deoarece practic se poate efectua numai un număr finit de iteraţii, în mod inevitabil erorile de rotunjire sunt însoţite în cazul metodelor iterative şi de erori de trunchiere;
- Dintre principalele avantaje ale metodelor iterative menţionăm simplitatea şi eficienţa implementării lor în programe de calcul în cazurile în care nu sunt rezolvabile prin metode directe;
- Chiar dacă soluţia obţinută prin metode iterative este afectată de erori de trunchiere (prin reţinerea din şirul convergent către soluţia exactă a unui număr finit de termeni), erori care nu apar la metodele directe, este totuşi posibil ca soluţia să fie mai precisă decât cea obţinută prin metode directe;
- În practică, prin efectuarea unui număr finit de iteraţii, se poate ajunge la o aproximare suficient de bună a soluţiei exacte;
- Eroarea finală depinde de eroarea iniţială, de numărul de iteraţii efectuate şi de norma matricei de iteraţie, care determină viteza de convergenţă.