## Metode Numerice – Lucrarea nr. 6+7

# POLINOAME DE INTERPOLARE

### Modelul matematic şi metodele numerice utilizate

Accentuarea problematicii interpolării decurge din faptul că există numeroase aplicaţii din domeniul ingineriei electrice care se bazează pe aproximare şi interpolare, precum şi faptul că interpolarea polinomială stă la baza multor metode numerice primare.

Există justificări consistente pentru aproximarea unor funcţii, fie că acestea sunt definite analitic, fie că sunt definite numeric. Aproximarea unei funcţii exprimată analitic sub forma unor formule explicite, implicite sau parametrice, sub forma unor serii, a unui algoritm se face cu scopul simplificării calculelor de evaluare a mărimii funcţiei, a derivatelor acesteia sau a integralei definite. Evaluarea unei funcţii definită sub formă numerică, presupune aproximarea ei (interpolarea) în intervalele dintre nodurile reţelei în orice punct al domeniului de definiţie. Dacă nu există informaţii asupra problemei electrotehnice care a generat modelul matematic, atunci cel mai des se utilizează pentru interpolare polinoame pentru a putea fi prelucrată uşor în continuare (interpolare, derivare, integrare etc.) evaluarea funcţiei reducându-se la operaţii aritmetice elementare (adunări şi înmulţiri).

Pentru aproximarea funcţiilor prin polinoame de interpolare se utilizează in principal următoarele tipuri de polinoame de interpolare:

- Polinoame de interpolare de tip Lagrange
- Polinoame de interpolare bazate pe diferenţe (de tip Newton, Gauss, Bessel)

***Polinoame de interpolare de tip Lagrange***

În aplicaţiile electrotehnice alegerea funcţiei de aproximare se bazează şi pe cunoaşterea formei funcţiei care trebuie aproximată ţinând cont de informaţiile asupra aplicaţiei practice care a generat modelul matematic.

Problema care se pune este determinarea polinomului $p_n$ care satisface relaţia $\left| f(x) - p_n(x) \right| < \varepsilon$, unde $f(x)$ este o funcţie definită şi continuă pe intervalul $[a,b]$, $f \in C_{[a,b]}$, iar $\forall \varepsilon > 0$. Cunoscând valorile funcţiei $f(x)$, determinate experimental prin măsurători în nodurile $x_i$, $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b] \rightarrow f(x_0),\ f(x_1), ..., f(x_n),\ x_i \neq x_j, i \neq j,\ y_i = f(x_i)$, se pune problema determinării valorilor funcţiei în alte puncte, adică găsirea unui polinom $p_n$, astfel încât: $p_n(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$. Polinomul $p_n$ trebuie să coincidă cu $f(x)$ pe $n+1$ puncte. Se ştie că există un polinom şi numai unul de grad mai mic ca $n$ care îndeplineşte această condiţie. Acesta este polinomul de interpolare.

În plus are loc formula aproximativă:

$$f(x) \cong p(x) \quad \forall x \in [a,b]; \quad f(x_i) = p(x_i) = y_i, \quad i \in [0,n] \tag{1}$$

unde $p(x)$ este unic pentru un tabel dat iar $f$ şi $p$ au aceleaşi valori în nodurile fixate.

Se poate construi polinomul de interpolare de tip Lagrange $L_n(x)$ de grad cel mult $n$:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \overset{not}{=} L_n(x) \tag{2}$$

cu funcţiile de bază:

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{3}$$

$$l_i(x_k) = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases} \quad 0 \le i,k \le n \tag{4}$$

$$L_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \delta_{ki} = y_i \tag{5}$$

deci $L_n(x_i) = y_i = f(x_i)$.

Deci $L_n(x)$ este polinomul Lagrange de interpolare asociat tabelului de valori $x_i \leftrightarrow y_i$. Formula $f(x) \cong L_n(x)$ este sugerată de faptul că $f(x_i) = L_n(x_i) = y_i$, $0 \le i \le n$, adică funcţia ***f*** şi polinomul $L_n$ au aceleaşi valori în nodurile fixate.

Avem formula de interpolare a lui Lagrange exactă:

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x) \tag{6}$$

unde $R_n(x)$ este restul formulei de interpolare de tip Lagrange şi are forma:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) \tag{7}$$

iar $\xi$ este un punct din cel mai mic interval care conţine nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi variabila $x$.

***Interpolarea Newton cu diferenţe divizate***

Presupunem că $L_n(x)$ este polinomul Lagrange de grad n care interpolează funcţia $f(x)$ în nodurile distincte $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Diferenţele divizate ale funcţiei $f(x)$ sunt utilizate pentru a exprima polinomul $L_n(x)$ sub forma lui Newton $N_n(x)$, iar polinomul se va scrie sub o formă generalizată:

$$L_n(x) = N_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \tag{8}$$

Pentru determinarea coeficienţilor $a_0, a_1, \ldots a_n$, evaluăm polinomul în noduri:

$$x = x_0 \Rightarrow a_0 = N_n(x_0) = f(x_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = N_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{9}$$

Expresiile $\dfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ $i=1,\ldots,n$, se numesc diferenţe divizate de ordinul I ale lui f pe nodurile $x_i$, şi se notează $f[x_{i-1},x_i]$ sau $[x_{i-1},x_i;f]$. Diferenţele divizate de ordinul *(k+1)*:

$$f[x_{i-1},x_i,\ldots,x_{i+k}]=\frac{f[x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_{i-1},x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{x_{i+k}-x_{i-1}} \tag{10}$$

Diferenţele divizate de ordinul 0 pe un nod:

$$f[x_0]=f(x_0) \tag{11}$$

Diferenţele divizate liniare de ordinul 1 pe două noduri:

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \tag{12}$$

Diferenţele divizate de ordinul 2 pe trei noduri:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \tag{13}$$

Diferenţele divizate de ordinul *n* pe *n+1* noduri:

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\ldots x_n]-f[x_0,x_1,\ldots x_{n-1}]}{x_n-x_0} \tag{14}$$

Se notează coeficienţii polinomului de interpolare Newton astfel:

$$a_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1],\quad a_k=f[x_0,x_1,\ldots,x_k] \tag{15}$$

Proprietăţile diferenţelor divizate: $f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$; $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=f[x_{\alpha_0},x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_n}]$;

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f[x_i]}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_n)} \tag{15}$$

Dacă *f(x)* este o funcţie liniară avem $f[x_0,x]=f[x_0,x_1]$ pentru că valoarea derivatei este constantă.

$$f[x_0,x]=\frac{f[x]-f[x_0]}{x-x_0}\Rightarrow f[x]=f[x_0]+f[x_0,x]\cdot(x-x_0)$$ - funcţia şi polinomul coincid

Dacă *f(x)* este o funcţie neliniară gradul *n*, aproximarea ei prin polinomul de interpolare Newton este:

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x) \tag{16}$$

$$N_n(x)=\underbrace{\underbrace{f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]}_{N_1(x)=f(x)-R_0(x)=f(x)}+\underbrace{(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]}_{R_1(x)}}_{N_2(x)}+(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,\ldots,x_n]$$

iar restul este:

$$R_n(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n] \tag{17}$$