Aproximarea Funcţiilor prin Polinoame de Interpolare

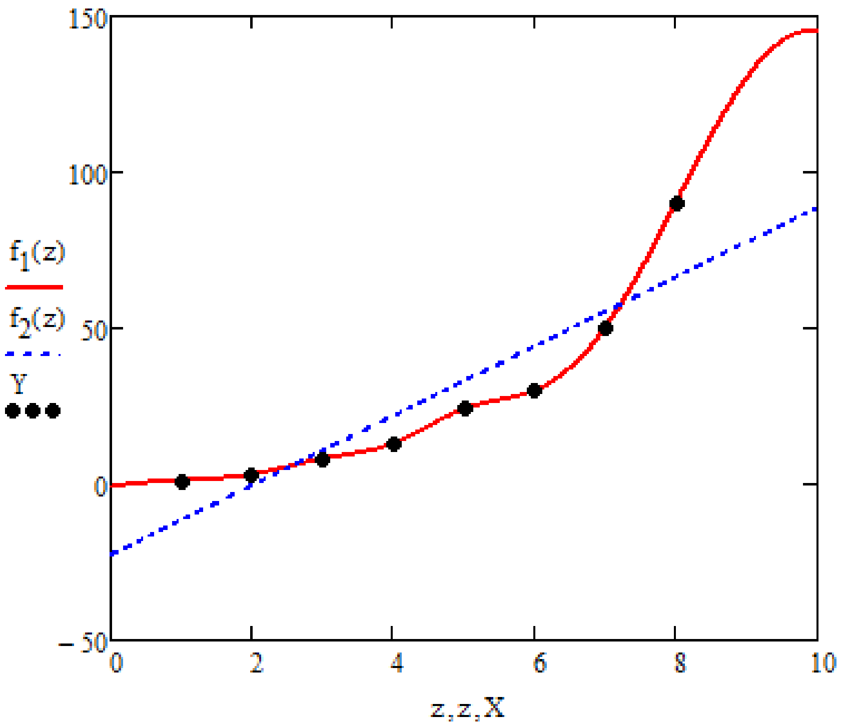
As. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro
WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Aproximarea Funcţiilor

În general în aplicaţiile din domeniul electrotehnic **nu se cunoaşte expresia analitică** a funcţiei care trebuie aproximată ci **doar valorile** ei într-un anumit număr de puncte.

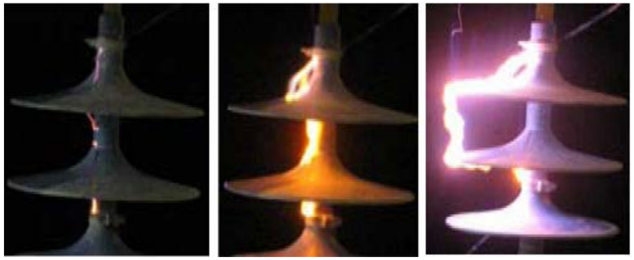
Prin procesul de aproximare se pot obține două tipuri de funcții:

- O funcție care **trece prin toate punctele date** (funcţie de interpolare).
- O funcție care **nu trece prin toate punctele date**, dar **are o formă predefinită** (funcţie de aproximare).

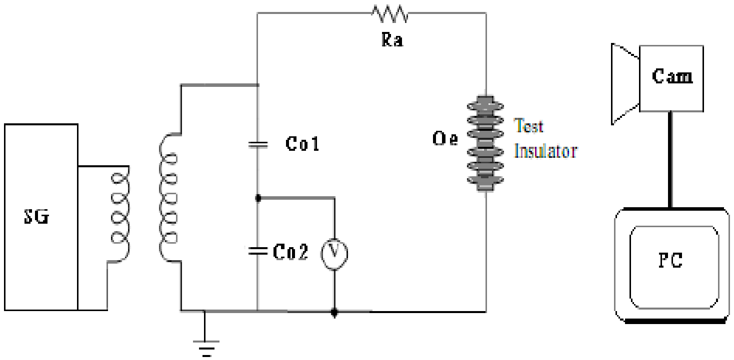


Aplicaţie

O problemă de importanţă majoră în faza de fabricaţie a izolatorilor siliconici de pe liniile electrice aeriene o constitue testarea rezistenţei superficiale a acestora.



Metoda de testare presupune alimentarea bornelor unui izolator cu o tensiune foarte ridicată şi efectuarea mai multor măsurători de încercare, până la străpungerea izolaţiei, conform schemei electrice de principiu de mai jos:



În urma efectuării încercărilor se stabilesc funcţii numerice de dependenţă între valorile rezistenţei de izolaţie şi nivelul tensiunilor aplicate. Pentru determinarea acestor funcţii de interdependenţă se apelează la polinoame de interpolare.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Polinoame de interpolare de tip Lagrange

Problema care se pune este determinarea polinomului p_n care satisface relaţia $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$, unde $f(x)$ este o funcţie definită şi continuă pe intervalul $[a,b]$, $f \in C_{[a,b]}$, iar $\forall \varepsilon > 0$. Cunoscând valorile funcţiei $f(x)$, determinate experimental prin măsurători în nodurile x_i, $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b] \rightarrow f(x_0), \; f(x_1), \dots, f(x_n), \; x_i \neq x_j, i \neq j$

$y_i = f(x_i)$, se pune problema determinării valorilor funcţiei în alte puncte, adică găsirea unui polinom p_n, astfel încât: $p_n(x_i) = f(x_i), \; i = \overline{0,n}$. Polinomul p_n trebuie să coincidă cu $f(x)$ pe $n+1$ puncte. Se ştie că există un polinom şi numai unul de grad mai mic ca n care îndeplineşte această condiţie. Acesta este polinomul de interpolare.

Se poate construi polinomul de interpolare de tip Lagrange $L_n(x)$ de grad cel mult n:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x) \overset{not}{=} L_n(x)$$

cu funcţiile de bază:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$l_i(x_k) = \delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases} \qquad 0 \leq i, k \leq n$$

$$L_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \delta_{ki} = y_i$$

Polinoame de interpolare de tip Lagrange

Fie un interval [*a*,*b*] în care se cunosc un set de valori *x(i)* cărora le corespunde în mulţimea numerelor reale un alt set de valori *y(i)*. Se cere să se determine relaţia de dependenţă între cele două seturi de numere utilizând polinomul de interpolare de tip Lagrange şi să se traseze graficul aferent acesteia pe intervalul [*a*,*b*].

Pasul 1. Se definesc limitele intervalului de studiu [*a*,*b*], numărul de puncte intermediare şi pasul de parcurgere a acestui interval.

$$a := 0 \qquad b := 10 \qquad N := 50 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.2$$

Pasul 2. Se definesc șirurile de valori *x(i)* și *y(i)* având *N* elemente. Elementele celor două şiruri se definesc utilizându-se „[” pentru a indica indexul *i* al şirurilor:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h \cdot i \qquad y_i := \frac{i^2 - 3}{N}$$

Pasul 3. Se definește coeficientul diferență dintre două elemente x_i, x_j cunoscute folosindu-se instrucțiunea condițională ***IF*** sub forma unui șir cu *N* elemente. Acest coeficient ia valoarea 1 dacă diferența se face între acelaș element *i*=*j*:

$$j := 0..N \qquad coef_i := \prod_j \left[\text{if}\left[(i = j), 1, \left(x_i - x_j\right)\right]\right]$$

Pasul 4. Se definește un polinom intermediar de ordin *N+1* care are soluții, elementele șirului *x(i)*:

$$\text{intermediar}(z) := \prod_j \left(z - x_j\right)$$

Pasul 5. Pe baza acestui polinom intermediar și a șirului de coeficienți diferență se definesc funcțiile de baza ce intră în definirea polinomului Lagrange. Această funcție ia valoarea 1 pentru orice element din șirul *x(i)*:

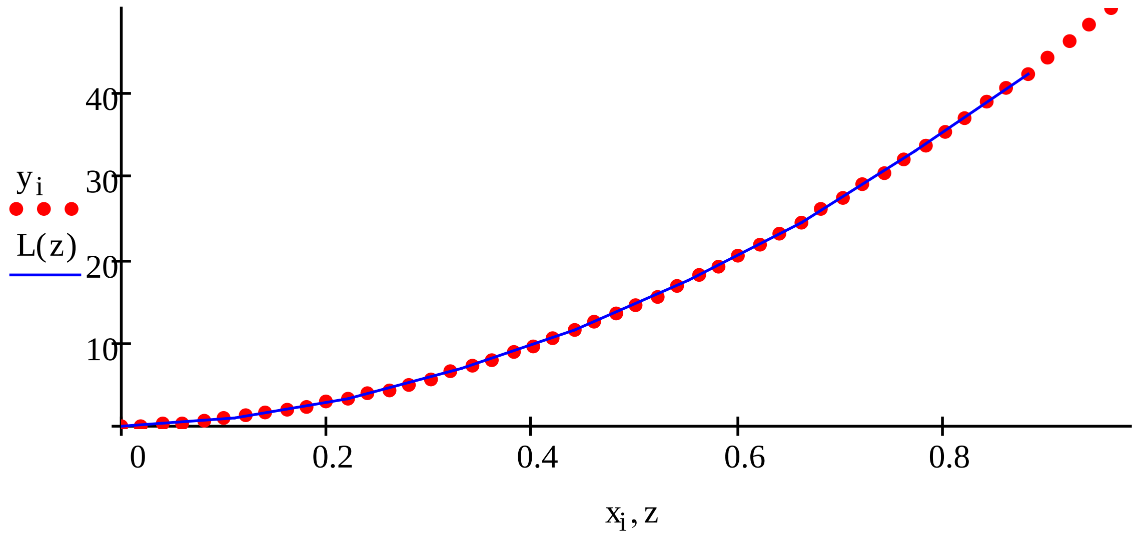
$$l(i,z) := \text{if}\left[z = x_i, 1, \frac{\text{intermediar}(z)}{\left(z - x_i\right)\cdot \text{coef}_i}\right]$$

Pasul 6. Însumând aceste funcții de bază ponderate de elementele șirului *y(i)*, se obține polinomul Lagrange ce interpolează funcția de legătură, *f(z)*, dintre cele două șiruri *x(i)* și *y(i)* pe intervalul [*a*,*b*]:

$$L(z) := \sum_i \left(l(i,z)\cdot y_i\right)$$

Pasul 7. În final se face reprezentarea grafică a polinomului de interpolare *L(z)* pe intervalul [*0*,*0.9*] dorit şi valorile date tabelar y_i.

$$z := 0, 0.11 .. 0.9$$



Polinoame de interpolare de tip Spline

Metodele de aproximare cu funcţii spline utilizează porţiuni de polinoame $P_n(x_i)$ de gradul m, mult mai mic decât numărul de puncte în care se cunoaşte valoarea lui $f(x)$. Coeficienţii funcţiilor spline rezultă din condiţii de forma $P_n(x_i) = y_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$, la care se adaugă şi cele legate de egalitatea valorilor derivatelor segmentelor de polinoame în punctele date.

Termenul de spline (engleză: dispozitiv pentru trasarea curbelor netede) a fost introdus pentru a desemna o funcţie formată din mai multe polinoame, definite pe intervale adiacente şi care se racordează între ele împreună cu un număr de derivate ale acestora.

Se utilizează funcţii de aproximare de tip spline liniare, parabolice şi cubice.

- **lspline**
- **pspline**
- **cspline**

Polinoame de interpolare de tip Spline

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele $\mathbf{x_i}$, care aparțin vectorului **X**. Rezultatele măsurătorilor $\mathbf{y_i}$ se trec în vectorul **Y**. Folsind datele din tabelul de mai jos pentru **X** și **Y**, să se ridice caracteristica **Y=f(X)**, **interpolând rezultatele**.

Pasul 1. Se definesc vectori X și Y:

$$X := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 2. Se construiește un vector auxiliar, necesar interpolării, folosind comanda **spline**. Funcția de interpolare **interp** din Matchad construiește un polinom de interpolare, folosind coeficienții din acest vector auxiliar.

Vectorul auxiliar poate fi construit prin chemarea funcției **lspline** (linear), **cspline** (cubic) sau **pspline** (parabolic). Conform acestuia, coefcienții o să fie calculați utilizând o funcție **liniară** ori una **parabolică** ori una **cubică**.

Se definesc cele trei vectori M_1, M_2 și M_3, utilizâd funcțiile **lspline**, **pspline** și **cspline**, pe rând. Se afișează rezultatele.

$$M_1 := \mathrm{lspline}(X, Y)$$

$$M_2 := \mathrm{pspline}(X, Y)$$

$$M_3 := \mathrm{cspline}(X, Y)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Aproximarea folosind de interpolare spline

Pasul 3. Se apleleazǎ funcția **interp**, pentru fiecare vector de coefcienți recent calculați.

funcția **interp** are 4 arguemente: **interp(M,X,Y,z)**

- M: vectorul de coeficienți
- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

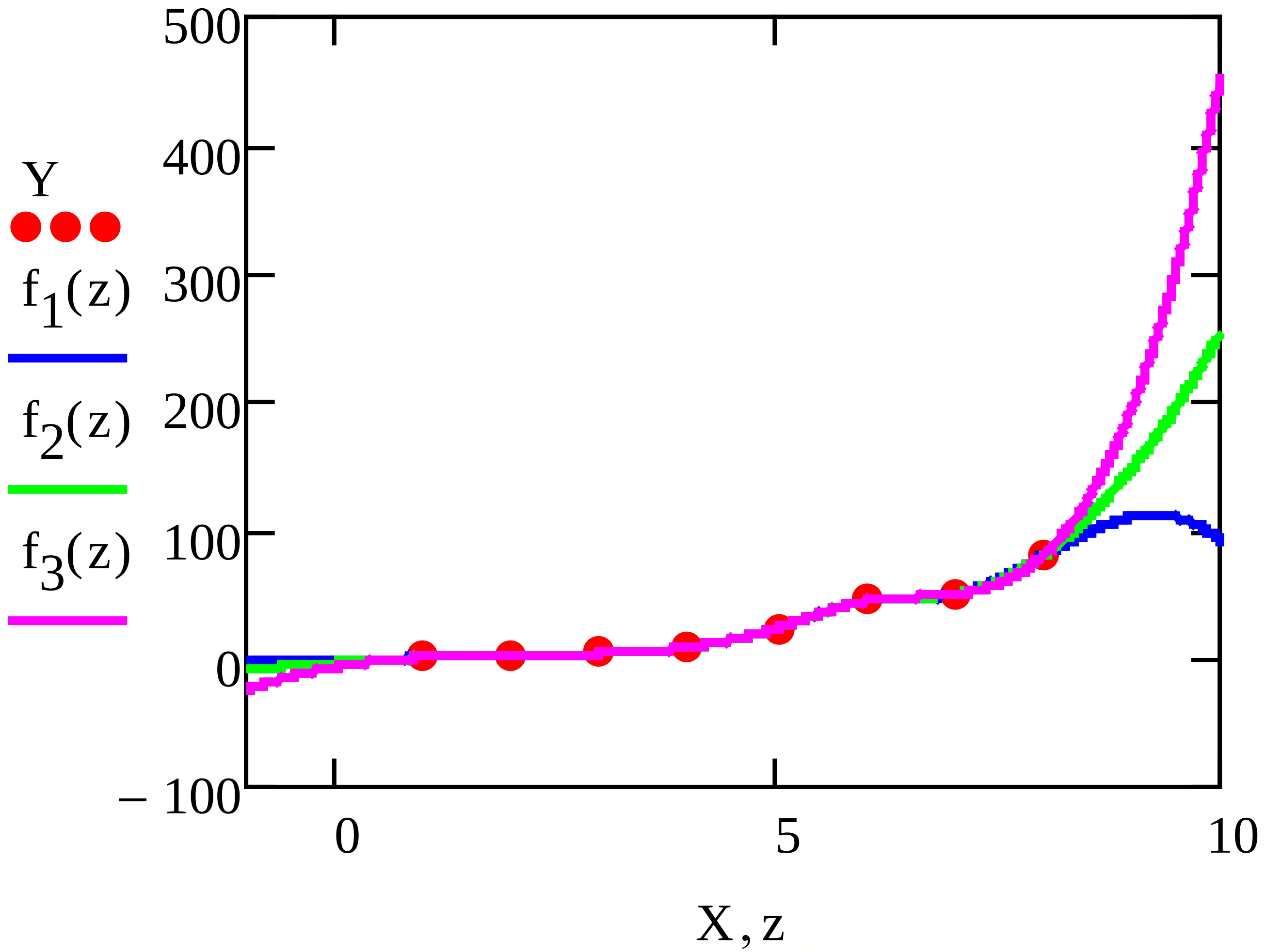
$$f_1(z) := \operatorname{interp}\left(M_1, X, Y, z\right)$$

$$f_2(z) := \operatorname{interp}\left(M_2, X, Y, z\right)$$

$$f_3(z) := \operatorname{interp}\left(M_3, X, Y, z\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 4. Se reprezintă grafic cele trei funcții obținute și tabelul de valori. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



Aproximarea folosind de interpolare spline

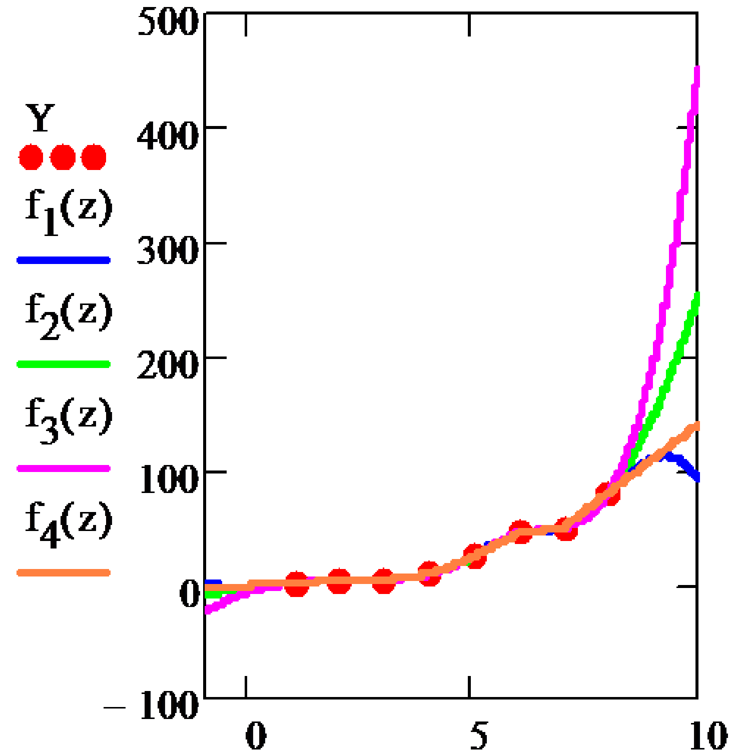
Pasul 5. Folosind funcția **linterp** două puncte consecutive se conectează prin intermediul unei linii.

funcția **linterp** are 3 arguemente: **linterp(X,Y,z)**

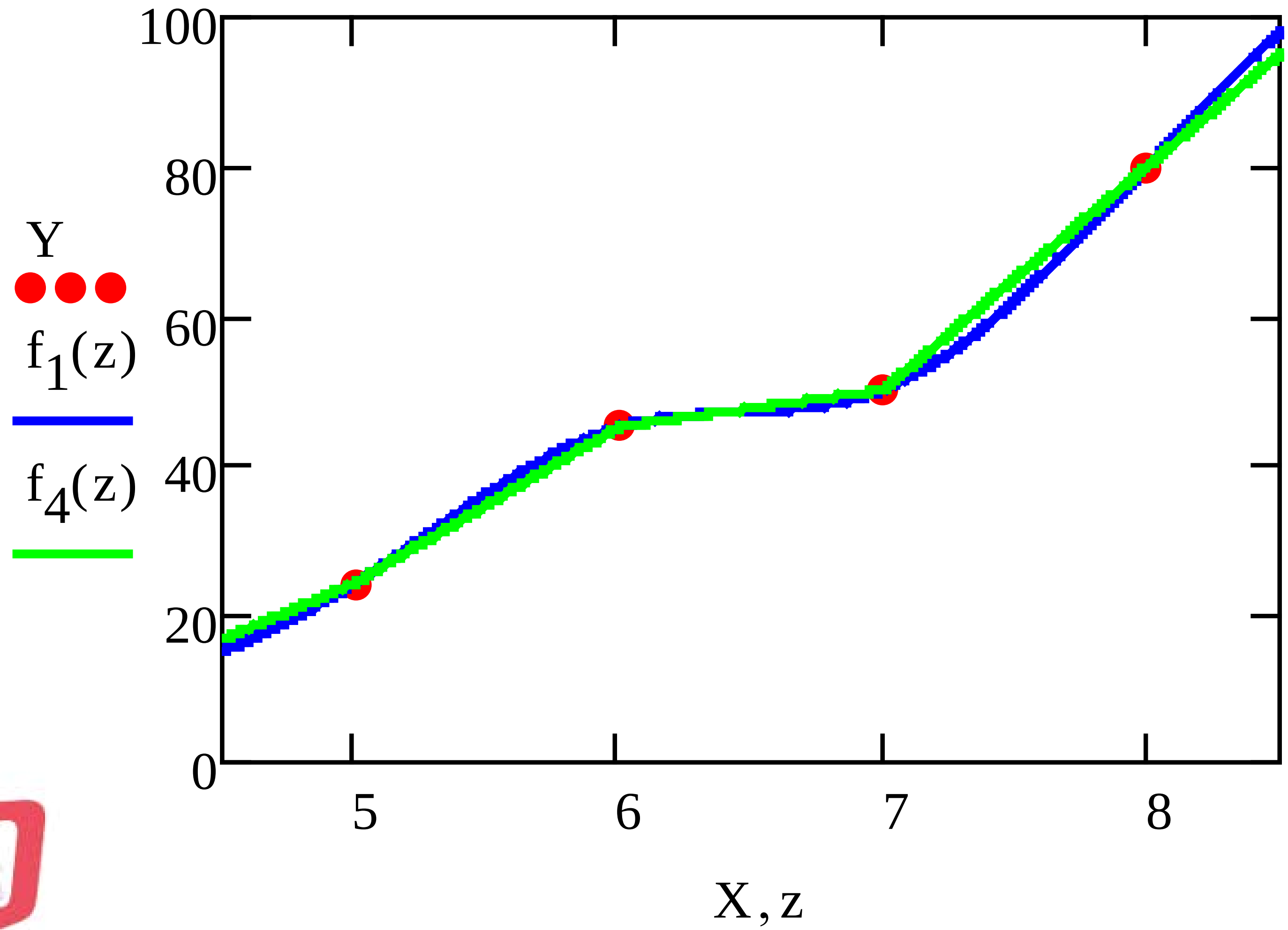
- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

$$f_4(z) := \mathrm{linterp}(X, Y, z)$$

Pasul 6. Se reprezintă grafic funcția obținută prin **linterp**. Pe un alt grafic se compară cu funcțiile obținute prin utilizarea comenzilor **spline** și **interp**. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



Pasul 7. Se compară cu rezultatul obținut plin **linterp** și rezultatul obținut prin **lspline -> interp**. Limitele da afișare pentru axa OX se setează de la 4,5 până la 8,5.



Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferenţe divizate

Presupunem că $L_n(x)$ este polinomul Lagrange de grad n care interpolează funcţia f(x) în nodurile distincte $x_0, x_1, \dots, x_n$. Diferenţele divizate ale funcţiei f(x) sunt utilizate pentru a exprima polinomul $L_n(x)$ sub forma lui Newton $N_n(x)$, iar polinomul se va scrie sub o formă generalizată:

$$L_n(x) = N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Pentru determinarea coeficienţilor a_0, a_1,...a_n, evaluăm polinomul în noduri:

$$x = x_0 \Rightarrow a_0 = N_n(x_0) = f(x_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = N_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Expresiile $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ $i = 1, \dots, n$, se numesc diferenţe divizate de ordinul I ale lui f pe nodurile x_i , şi se notează $f[x_{i-1}, x_i]$ sau $[x_{i-1}, x_i; f]$. Diferenţele divizate de ordinul (k+1):

$$f[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_{i-1}}$$

Diferenţele divizate de ordinul 0 pe un nod:

$$f[x_0] = f(x_0)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferenţe divizate

Diferenţele divizate liniare de ordinul 1 pe două noduri:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Diferenţele divizate de ordinul 2 pe trei noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Diferenţele divizate de ordinul n pe n+1 noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots x_n] - f[x_0, x_1, \dots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Se notează coeficienţii polinomului de interpolare Newton astfel:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \qquad a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferenţe divizate

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele $\mathbf{x_i}$, care aparțin vectorul **x**. Rezultatele măsurătorilor $\mathbf{y_i}$ se trec în vectorul **y**. Folsind datele de mai jos pentru **x** și **y**, să se ridice caracteristica **y=f(x)**, **interpolând rezultatele** prin **metoda lui Newton**.

Pasul 1. Se definesc vectori **x** și **y**:

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \\ 49 \end{pmatrix}$$

sau

$$x := (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 7)^T$$

$$y := (1 \;\; 4 \;\; 9 \;\; 16 \;\; 25 \;\; 36 \;\; 49)^T$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 2. Diferenţele finite folosite pentru determinarea polinomului de interpolare Newton se reţin într-o matrice , care se determină prin intermediul unui algoritm de calcul. Liniile de cod ale algoritmului de calcul se introduc utilizându-se comanda ***Add Line*** din toolbar-ul ***Programming*** (tasta ”**]**”):

$$\text{Matrix\_dif\_div} := \left|\begin{array}{l} a \leftarrow x \\ b \leftarrow y \\ \blacksquare \end{array}\right.$$

Pasul 3. Prin intermediul unei instrucţiuni repetitive ***for*** se iniţializează **prima coloană** a unei matrice interne **G** cu valorile din **x** lui **a**. Lungimea vectorului este data de funcția ***last(Y)*** și reţinută în variabila internă **n**. Matricea **G** este o **matrice pătratică** în care se calculează **diferenţele divizate** și va fi returnată ca rezultat al algoritmului:

$$\text{Matrix\_dif\_div} := \left|\begin{array}{l} a \leftarrow x \\ b \leftarrow y \\ n \leftarrow \text{last}(a) \\ \text{for } j \in 0..n \\ \quad G_{j,0} \leftarrow b_j \\ \blacksquare \end{array}\right.$$

Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

Pasul 4. Elementele matricei **G** se calculează **iterativ** conform **formulei recursive de determinare a diferențelor divizate.** Pentru parcurgerea liniilor și coloanelor matricei **G** se folosesc două variabile **i** şi **j**, şi două instrucţiuni repetitive ***for***. Elementele rămase necalculate se egalează cu **0** printr-o altă instrucţiune repetitivă ***for***:

$$
\mathrm{Matrix\_dif\_div} := \left|
\begin{array}{l}
a \leftarrow x \\
b \leftarrow y \\
n \leftarrow \mathrm{last}(a) \\
\text{for } j \in 0..n \\
\quad G_{j,0} \leftarrow b_j \\
\text{for } j \in 1..n \\
\quad \left| \begin{array}{l}
\text{for } k \in 0..n-j \\
\quad G_{k,j} \leftarrow \dfrac{G_{k+1,j-1} - G_{k,j-1}}{a_{k+j} - a_k} \\
\text{for } i \in 1..j \\
\quad G_{n-j+i,j} \leftarrow 0 \\
G
\end{array} \right. \\
G
\end{array}
\right.
$$

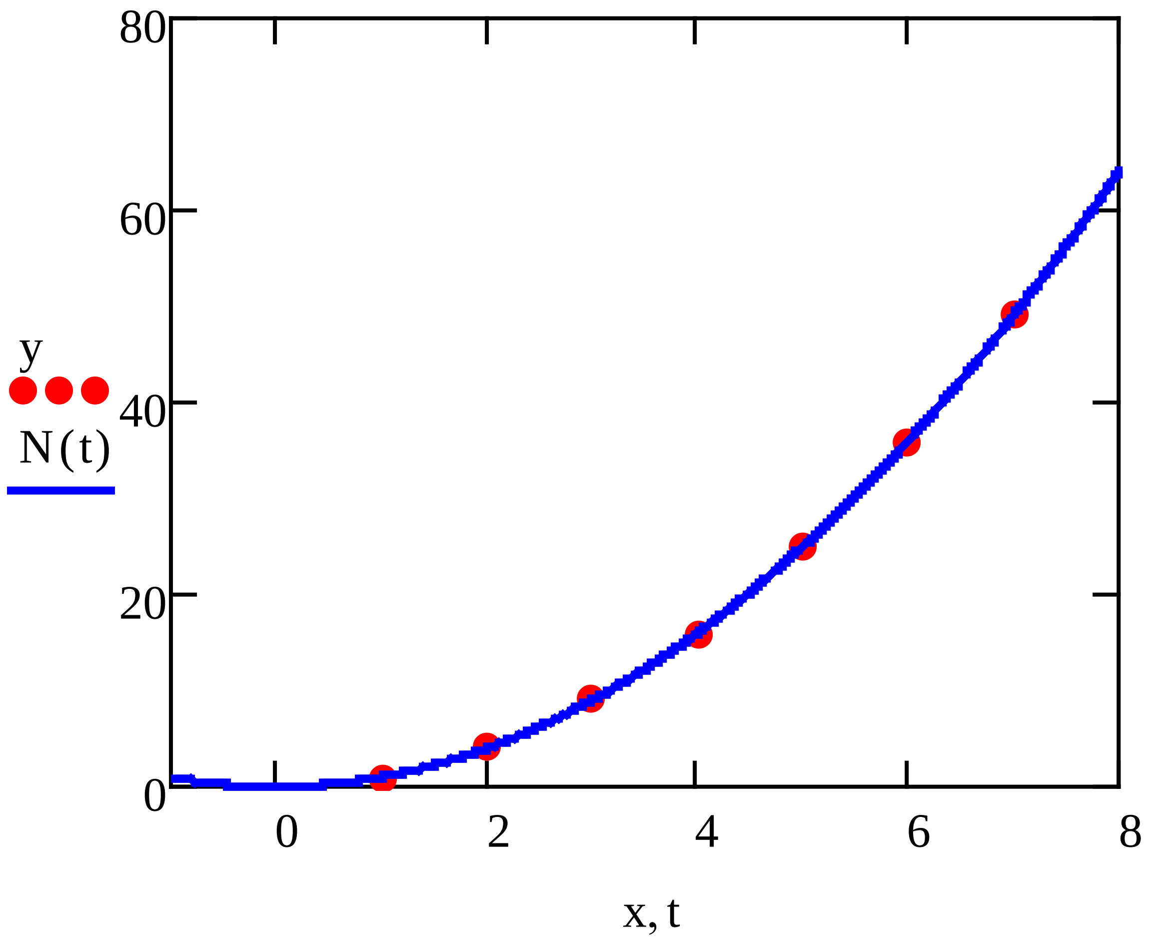
Pasul 5. Utilizând acest algoritm de calcul, se obține următoarea matricea **D** de diferenţe divizate:

$$D := \mathrm{Matrix\_dif\_div} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasul 6. Pe baza matricei **D** se construieşte **funcția de interpolare Newton** conform formulei de definiţie a acesteia:

$$j := 1..\,\mathrm{last}(x) \qquad N(t) := \sum_{j} \left[D_{0,j} \cdot \prod_{i=0}^{j-1} \left(t - x_i\right) \right] + D_{0,0}$$

Pasul 7. Se reprezintă grafic **funcţia de interpolare Newton** pe intervalul pe care se cunosc valorile funcției în nodurile **x(i)**. **Limitele de afișare** pentru axa **OX** se setează de la **-1** la **8**.



Aproximarea Funcţiilor prin Polinoame de Interpolare

As. Dr.Ing. **Levente CZUMBIL**

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA