

# Aproximarea Funcțiilor prin Polinoame de Interpolare

## Partea II



Laboratorul de Cercetare  
în **METODE NUMERICE**  
**NUMERICAL METHODS**  
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca

*As. Dr. ing. Levente CZUMBIL*

E-mail: [Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro](mailto:Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro)

WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

# Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

Presupunem că  $L_n(x)$  este polinomul Lagrange de grad  $n$  care interpoalează funcția  $f(x)$  în nodurile distincte  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Diferențele divizate ale funcției  $f(x)$  sunt utilizate pentru a exprima polinomul  $L_n(x)$  sub forma lui Newton  $N_n(x)$ , iar polinomul se va scrie sub o formă generalizată:

$$L_n(x) = N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Pentru determinarea coeficienților  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , evaluăm polinomul în noduri:

$$x = x_0 \Rightarrow a_0 = N_n(x_0) = f(x_0)$$

$$x = x_1 \Rightarrow f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = N_n(x_1) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Expresiile  $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$   $i = 1, \dots, n$ , se numesc diferențe divizate de ordinul I ale lui  $f$  pe

nodurile  $x_i$ , și se notează  $f[x_{i-1}, x_i]$  sau  $[x_{i-1}, x_i; f]$ . Diferențele divizate de ordinul  $(k+1)$ :

$$f[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_{i-1}}$$

Diferențele divizate de ordinul 0 pe un nod:  $f[x_0] = f(x_0)$



# Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

Diferențele divizate liniare de ordinul 1 pe două noduri:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

Diferențele divizate de ordinul 2 pe trei noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Diferențele divizate de ordinul n pe n+1 noduri:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Se notează coeficienții polinomului de interpolare Newton astfel:

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \qquad a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$



## Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele  $x_i$ , care aparțin vectorul  $\mathbf{x}$ . Rezultatele măsurătorilor  $y_i$  se trec în vectorul  $\mathbf{y}$ . Folsind datele de mai jos pentru  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ , să se ridice caracteristica  $\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , **interpolând rezultatele prin metoda lui Newton.**

**Pasul 1.** Se definesc vectori  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \\ 36 \\ 49 \end{pmatrix}$$

sau

$$\mathbf{x} := (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7)^T$$

$$\mathbf{y} := (1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \ 36 \ 49)^T$$



## Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

**Pasul 2. Diferențele finite** folosite pentru determinarea polinomului de interpolare Newton se rețin într-o matrice , care se determină prin intermediul unui algoritm de calcul. Liniile de cod ale algoritmului de calcul se introduc utilizându-se comanda **Add Line** din toolbar-ul **Programming** (tasta ”]”):

```
Matrix_dif_div := | a ← x  
                  | b ← y  
                  |
```

**Pasul 3.** Prin intermediul unei instrucțiuni repetitive **for** se inițializează **prima coloană** a unei matrice interne **G** cu valorile din **x** lui **a**. Lungimea vectorului este data de funcția **last(Y)** și reținută în variabila internă **n**. Matricea **G** este o **matrice pătratică** în care se calculează **diferențele divizate** și va fi returnată ca rezultat al algoritmului:

```
Matrix_dif_div := | a ← x  
                  | b ← y  
                  | n ← last(a)  
                  | for j ∈ 0..n  
                  |   Gj,0 ← bj  
                  |
```



# Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

**Pasul 4.** Elementele matricei  $\mathbf{G}$  se calculează **iterativ** conform **formulei recursive de determinare a diferențelor divizate**. Pentru parcurgerea liniilor și coloanelor matricei  $\mathbf{G}$  se folosesc două variabile  $i$  și  $j$ , și două instrucțiuni repetitive **for**. Elementele rămase necalculate se egalează cu  $0$  printr-o altă instrucțiune repetitivă **for**:

```
Matrix_dif_div :=
  a ← x
  b ← y
  n ← last(a)
  for j ∈ 0..n
    Gj,0 ← bj
  for j ∈ 1..n
    for k ∈ 0..n - j
      Gk,j ←  $\frac{G_{k+1,j-1} - G_{k,j-1}}{a_{k+j} - a_k}$ 
    for i ∈ 1..j
      Gn-j+i,j ← 0
  G
```



## Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

**Pasul 5.** Utilizând acest algoritm de calcul, se obține următoarea matricea **D** de diferențe divizate:

$$D := \text{Matrix\_dif\_div} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 11 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

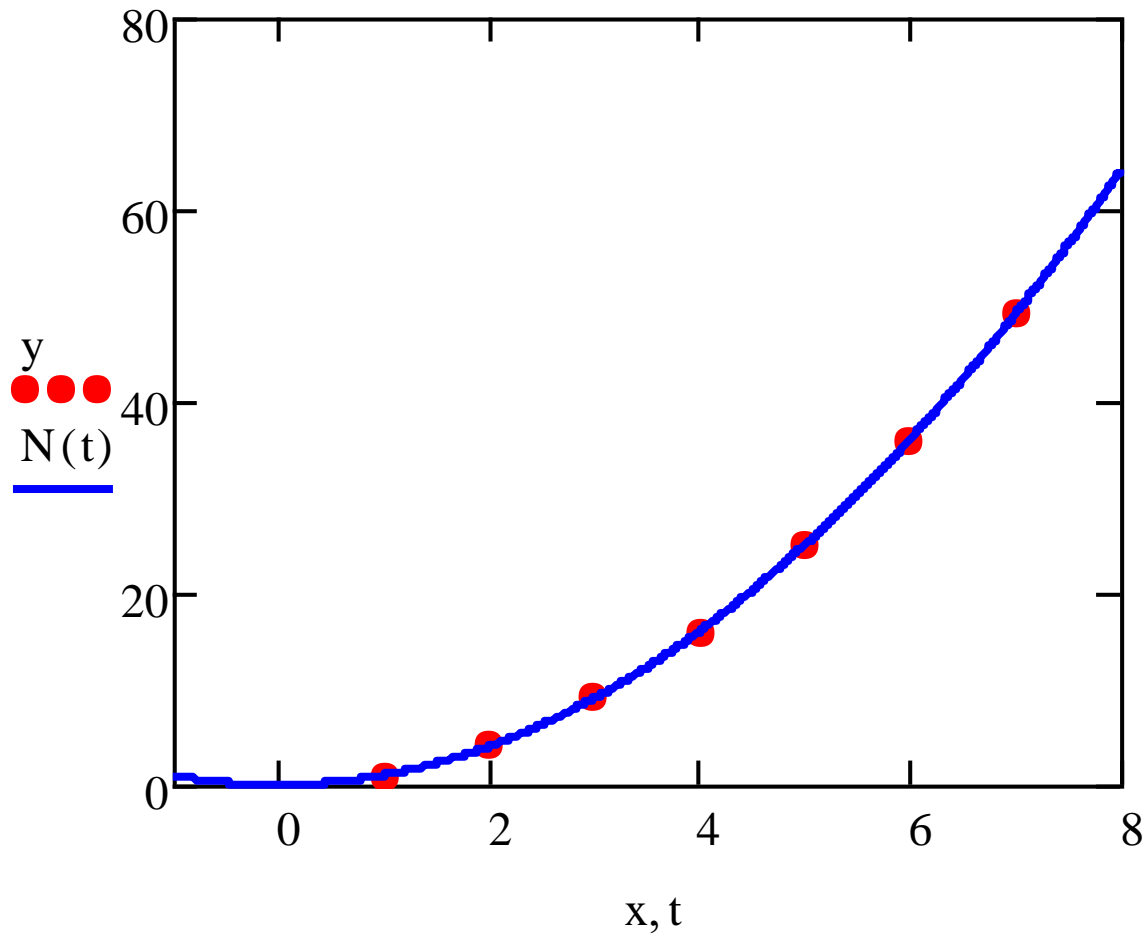
**Pasul 6.** Pe baza matricei **D** se construiește **funcția de interpolare Newton** conform formulei de definiție a acesteia:

$$j := 1..last(x) \quad \underline{N}(t) := \sum_j \left[ D_{0,j} \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (t - x_i) \right] + D_{0,0}$$



## Polinomul de interpolare a lui Newton cu diferențe divizate

**Pasul 7.** Se reprezintă grafic **funcția de interpolare Newton** pe intervalul pe care se cunosc valorile funcției în nodurile  $x(i)$ . **Limitele de afișare** pentru axa **OX** se setează de la **-1** la **8**.



## Polinoame de interpolare de tip Spline ("LINTERP")

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele  $x_i$ , care aparțin vectorului  $\mathbf{X}$ . Rezultatele măsurătorilor  $y_i$  se trec în vectorul  $\mathbf{Y}$ . Folosind datele din tabelul de mai jos pentru  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ , să se ridice caracteristica  $\mathbf{Y}=\mathbf{f}(\mathbf{X})$ , **interpolând rezultatele**.

**Pasul 1.** Se definesc vectori  $\mathbf{X}$  și  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$



## Polinoame de interpolare de tip Spline ("LINTERP")

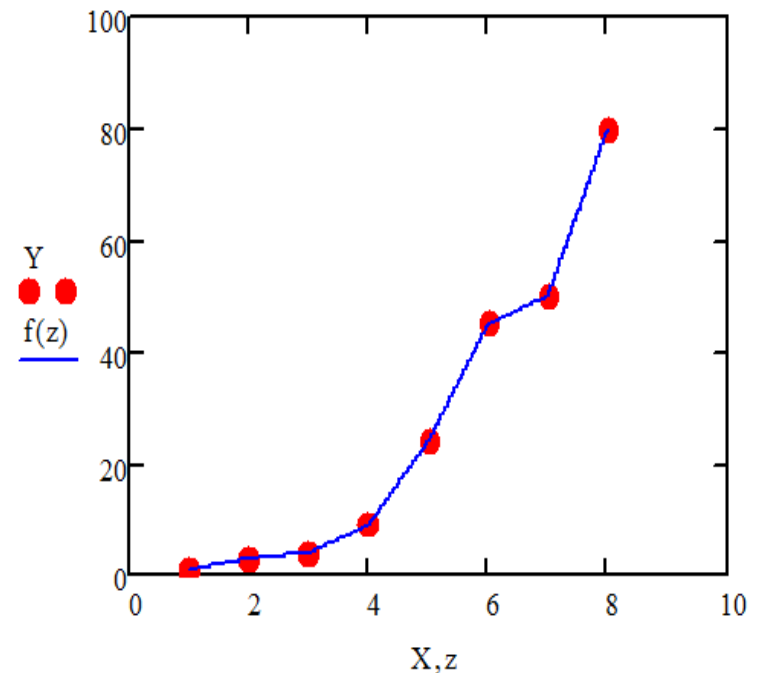
**Pasul 2.** Folosind funcția **linterp** două puncte consecutive se conectează prin intermediul unei linii.

funcția **linterp** are 3 argumente: **linterp(X,Y,z)**

- X: vectorul nodurilor de interpolare
- Y: vectorul rezultatelor determinate experimental
- z: variabila de funcție

$$f(z) := \text{linterp}(X, Y, z)$$

**Pasul 3.** Se reprezintă grafic funcția obținută prin **linterp**. Pe un alt grafic se compară cu funcțiile obținute prin utilizarea comenzilor **spline** și **interp**. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.



# Aproximarea Funcțiilor prin Polinoame de Interpolare Partea II



*As. Dr.Ing. Levente CZUMBIL*